FAMILLES DE PROBLÈMES

Un exercice pour le développement mental des élèves de Sixième et de Cinquième et peut-être au-delà

Pour cet exercice, il faut prendre un texte très simple que les élèves, même les plus faibles, puissent dominer entièrement, car l'intérêt de la chose n'est pas dans la résolution plus ou moins habile d'un problème.

Par exemple, ceci :

J'ai acheté des jouets pour une somme de 760 F. Il y a 7 baigneurs coûtant chacun 80 F et 5 Peaux-Rouges à 40 F la pièce.

La question est : Est-ce possible ?

Ce texte est possible, c'est préférable pour commencer.

Les enfants cherchent à leur guise si le compte est juste. On peut s'attendre à ce que, sans raisonner le moins du monde et généralement sans même donner un titre à leurs calculs, tous fassent ceci :

$$80\text{ F} \times 7 = 560\text{ F},$$
$$40\text{ F} \times 5 = 200\text{ F},$$
$$560\text{ F} + 200\text{ F} = 760\text{ F}.$$

C'est bien ça.

On leur demande alors : « Pour vérifier cette histoire, quel problème avez-vous résolu ? »

Ils ont résolu :

(1) J'ai acheté 7 baigneurs à 80 F l'un et 5 Peaux-Rouges à 40 F la pièce, quelle somme ai-je dépensée ?

Puis on demande : « Auriez-vous pu vérifier en donnant la somme dépensée et en posant une autre question ? »

On finit par établir le tableau suivant qui rassemble tous les problèmes que l'on peut se poser, les données et la réponse étant dans le texte :

	(1)	(2)	(2 bis)	(3)	(3 bis)
Nombre de baigneurs	7	?	7	7	7
Nombre de Peaux-Rouges	5	5	?	5	5
Prix d'un baigneur	80	80	80	?	80
Prix d'un Peau-Rouge	40	40	40	40	?
Somme dépensée	?	760	760	760	760

Faire le tableau est facile et amusant. Dire ou écrire un énoncé correct pour chaque problème présente pour certains quelque difficulté.

Dans cet exemple, aucun des trois problèmes-possibles n'est difficile à résoudre, mais (2) et (3) sont moins immédiats, moins naturels que (1).

On les résout.

Il en résulte un état de surprise et de satisfaction. Ce très simple exercice intéresse beaucoup les élèves. Il les porte à s'étonner et à réfléchir. Je pense qu'il développe en eux le goût et le pouvoir de saisir une question dans son ensemble et cette mystérieuse faculté de synthèse, qui nous sert constamment et nous est indispensable et dont nous ne savons rien (du moins je crois).

Remarques : 1. La solution de chacun des trois problèmes peut servir de vérification aux deux autres. Pour (2) et (3) il sera naturel de préférer la solution de (1) qui est la plus simple.

De même, la solution de (1) donnera la solution algébrique de (2) et (3), d'où l'intérêt accru de cet axiome pour la classe de Cinquième ; il peut être bon alors de prendre un exemple où l'un des problèmes au moins serait difficile.

On voit en même temps qu'il serait ridicule de chercher une solution algébrique de (1).

Certains, se référant à la tradition, appellent le raisonnement de (1) « synthétique » quand il résout (1), et « analytique » quand il sert à résoudre (2) et (3), ce qui n'ajoute rien à la compréhension de la chose, au contraire.

2. Le même exercice peut s'appliquer à un texte de géométrie, mais il peut y avoir des difficultés si celui-ci n'est pas assez précis, comme il arrive. Il introduit la notion de *réciproque*.

Exemple : Tout se passe dans un angle $\widehat{xoy}$ saillant ou plat. Il y a deux angles aigus et égaux $\widehat{xoA}$ et $\widehat{yoB}$ et une demi-droite oz formant les angles aigus égaux $\widehat{zoA}$ et $\widehat{zoB}$, adjacents. L'angle $\widehat{zoy}$ est droit. Est-ce possible ? (Justifier avec les définitions et les propriétés connues).

Le tableau des problèmes posés et résolus par ce texte est :

	(1)	(2)	(3)	(4)
$\widehat{xoy}$ saillant ou plat	plat	plat	plat	?
$\widehat{yoB}$ et $\widehat{xoA}$ aigus, égaux	oui	oui	?	oui
$\widehat{Aoz}$ et $\widehat{zoB}$ aigus, égaux et adjacents.....	oui	?	oui	oui
$\widehat{zoy}$ droit	?	droit	droit	oui

(tout est contenu dans $\widehat{xoy}$).

Pour chaque problème, on fait la figure en notant les hypothèses (ce que l'on fait exprès) et on prouve les conclusions (ce qui se produit nécessairement, sans qu'on le fasse exprès) en raisonnant avec les définitions et les propriétés connues, si on le peut, en tout cas, on les distingue nettement des hypothèses.

Il n'y a pas d'inconvénient à ce que, au cours de cet exercice, les élèves se trouvent en face d'un problème qui dépasse leurs forces : il est bon pour eux de se sentir plongés dans un moule trop grand qu'ils auront à remplir en grandissant.

Mlle GOUKOWSKY (*Lycée Montaigne*).