TROIS POINTS DE VUE D'UTILISATEURS.

Apprendre les mathématiques, cela participe à la formation de l'esprit, nul ne le nie. On pense même si souvent à cet aspect de notre enseignement qu'on oublie parfois qu'il a aussi une utilité pratique (comme si former l'esprit ce n'en était pas déjà une...). Trois scientifiques qui opèrent dans des domaines très différents nous donnent leur point de vue sur cette utilisation des connaissances mathématiques.

MATHÉMATIQUES UTILES AU NATURALISTE ET AU GÉOGRAPHE

Lors d'une rencontre commune entre mathématiciens et naturalistes, en 1956, M. WALUSINSKI m'a prié de porter à la connaissance de nos Collègues quelques observations sur les Mathématiques qui peuvent être utiles aux naturalistes et aux géographes des années 1958 à 1980 ou 1990.

La question qui se pose est la suivante : Etant donné un certain état, existant en 1958, ou prévisible, pour les années 1960-1990, de la société et de l'économie en France, et des besoins des laboratoires, des instituts de recherche, des universités et de l'industrie, quelles sont les parties des Mathématiques qui, enseignées aux jeunes gens de 12 à 18 ans principalement, pourront plus tard être le plus utiles à ceux d'entre eux qui se dirigeront vers les sciences naturelles et vers la géographie ?

Les éléments de ma réponse seront tirés surtout de trois sources :

a) Pratique de la recherche géologique et géographique, depuis 1934. Contacts avec de nombreux chercheurs français et étrangers.

b) Enseignement dans les Lycées, en sciences naturelles (1934-1956), physique (1934-1937) et mathématiques en Sixième-Cinquième (1934-1936).

c) Enseignement supérieur, troisième cycle, dans ma spécialité, en sédimentologie et géographie physique, à Paris (1956-...) et dans diverses Universités d'Allemagne, Suède, Pays-Bas, Belgique, Brésil, Etats-Unis et Canada (1949-...).

En France, et dans tous les pays cités, presque sans exception, tous les professeurs d'Enseignement Supérieur, et tous les chercheurs scientifiques, dans les sciences naturelles et en géographie, constatent, dans la formation reçue entre 12 et 18 ans, des lacunes très graves, qui pèsent très lourdement sur le rendement des chercheurs, et dont il est émouvant d'entendre, même des hommes à cheveux gris, vous faire l'aveu. Ces lacunes portent surtout sur la connaissance des langues vivantes (sauf aux Pays-Bas) et ensuite, quoique à un moindre degré, sur les Mathématiques (sauf pour la statistique, bien étudiée, aux Etats-Unis). Elles entraînent, dans les recherches pures ou appliquées, des retards qu'on peut évaluer à un à trois ans, pour un chercheur moyen, et un abaissement de la somme de résultats qu'on peut attendre de son travail, abaissement très difficile à évaluer, mais qui, par comparaison avec les rares chercheurs mieux formés, peut être évalué à la proportion de deux ou trois à un, et parfois de dix à un. C'est dire que la mauvaise préparation des chercheurs cause à la société un préjudice très grave, et que nous devons chercher à y remédier, dans nos classes.

Les lignes qui vont suivre, sont un témoignage à corriger par d'autres ; bien qu'elles ne prétendent en rien proposer un programme, elles pourront être lues tout de même dans la perspective d'une réforme, mais d'une réforme vraie, c'est-à-dire telle que savent en promouvoir nos Collègues, vrais professeurs, et non pas, bien entendu, de ces redécoupages confus, dans des locaux trop petits, par lesquels, sous le nom fallacieux de réforme de l'Enseignement, des gens, sans contact direct avec les élèves, égarent l'opinion.

Si une réforme vraie des Mathématiques pour les jeunes de 12 à 18 ans (et aussi

pour ceux de 6 à 12 ans, où elle serait au moins aussi importante) s'impose aux yeux de beaucoup, certains feront remarquer qu'elle ne saurait être faite en vue du mieux d'une seule spécialité, telle que les sciences naturelles ou géographiques. Ceci est l'évidence même. Toutefois, une autre évidence est qu'au cours des temps, tout va se subdivisant et se spécialisant de plus en plus et de plus en plus vite : professions, recherches, Enseignement Supérieur même. Dès lors, dans les Mathématiques à enseigner aux jeunes, on doit distinguer deux parts : l'une, commune, comprenant les bases essentielles, nécessaires à tous, et formatrices pour tous, et l'autre, différente suivant les professions futures : médecine, art de l'ingénieur, économie et sociologie, etc... Mes Collègues mathématiciens sont mieux placés que personne pour distinguer ces deux parts, dans le témoignage forcément limité qui suit. Qu'ils veuillent bien en excuser la forme paradoxale et souvent excessive. Pour être franc, il fallait schématiser : il sauront apporter la modération nécessaire.

I. — Ce qui ne nous a jamais servi

Presque toutes les Mathématiques de Spéciales de 1927. La géométrie descriptive. Les coniques. La géométrie en général (sauf les premiers livres vus vers 12 ou 13 ans, et qui sont très formateurs). La géométrie dans l'espace et en particulier les chinoiseries sur les droites et plan perpendiculaires (mais les symétries sont utiles).

L'algèbre, sauf les équations du premier degré. L'équation du second degré ne nous a jamais servi, nos problèmes sont si simples ! La grosse question, en algèbre, n'est pas de résoudre les équations (encore moins de les discuter), mais bien de mettre un problème en équation, et un problème réel.

Ceci, me dira-t-on, regarde le physicien, ou le naturaliste. Mais le mathématicien ne pourrait-il pas nous y aider ? Partir d'un fait réel, d'une donnée réelle, et montrer comment on y pique une formule, une équation, n'est-ce pas aussi de la Mathématique ? En tout cas, toute la Mathématique du naturaliste ou du géographe est là.

Le principe du calcul différentiel et intégral est indispensable, mais, ici encore, il s'agit de l'appliquer. Les seules fonctions utiles sont : linéaire, deuxième degré à la rigueur, trigonométriques et surtout exponentielle. Toutes les intégrations chinoises, dont je me faisais une sorte de jeu en classe de Mathématiques Spéciales, ne nous ont jamais servi à rien, ni à moi, ni à mes amis ; il y a là un gros effort de mémoire tout à fait inutile.

En trigonométrie, $\sin 2x$ et autres, et tout ce qui dépasse les définitions et les relations fondamentales, paraît du temps perdu. Si, par extraordinaire, on a, une fois dans sa vie, besoin de la formule, on la cherche dans un livre ou on la demande à un ami mathématicien. Ceci vaut aussi pour les intégrales.

En arithmétique élémentaire, pour enfants de 6 à 12 ans, j'admets l'addition et la soustraction. La multiplication et la division, je les fais à la règle à calculs, ou au cercle à calculs : c'est beaucoup plus sûr, les erreurs que je risque sont faibles, et bien inférieures à la précision des données. Si, par extraordinaire, j'ai besoin d'une précision plus forte, ma table de logarithmes est là. La pensée du temps perdu, par les enfants de 7 à 11 ans, à faire des divisions, est l'un de mes plus grands soucis : 10 % du temps de notre jeunesse est gâché pour une opération périmée, sans utilité pratique, et sans rôle formateur. Soyons modérés : accordons les divisions de deux chiffres : 24 par 8, 60 par 7, oui, cela peut servir. Je conserverais aussi la table de multiplication étendue à 12, et les divisions correspondantes.

La racine carrée ne m'a jamais servi. Quand j'en ai besoin, je la prends dans une table. Sur 20 chercheurs de nos disciplines, on n'en trouverait pas plus d'un ou deux qui sachent encore l'extraire : cette situation, nos Collègues mathématiciens la connaissent et la comprennent très bien. Mais alors, pourquoi en faire une *preuve* redoutable, pour les enfants de 11 à 13 ans, au lieu de lui laisser son vrai rôle, qui

est celui d'un *apprentissage*. C'est comprendre le mécanisme d'extraction qui est intéressant, je pense, et non le posséder.

De tout ce que je viens d'énoncer, en gros, il ressort que la moitié au moins du temps consacré aux Mathématiques pourrait être mieux employé, pour les jeunes gens de 12 à 18 ans, mais aussi pour ceux de 6 à 12 ans, pour lesquels une réforme me semble au moins aussi indispensable.

Le temps ainsi libéré pourra être affecté à des exercices, ou à des chapitres, plus utiles, mais il ne suffira pas, et l'horaire des Mathématiques devra être augmenté et des exercices pratiques devront être institués, comme je vais maintenant le montrer.

II. — On en redemande

A. *Forme.* — Quatre étudiants sur cinq ne savent pas écrire des chiffres lisibles ; leurs tableaux de valeurs numériques sont incompréhensibles, avec oubli de libellés, ou d'unités, ou chiffres non alignés en colonnes. Chez les chercheurs avancés, candidats au doctorat, chez le signataire de ces lignes, environ 5 % des mesures ou relevés sont inutilisables pour fautes ou manques du genre précédent, et 30 % du temps de la recherche est affecté à réparer des erreurs ou à combler des lacunes de cet ordre, ou concernant l'étiquetage. Il s'agit ici d'habitudes d'ordre élémentaires, qui devraient être acquises dès l'âge de 10 ans environ, et maintenues entre 12 et 18 ans. Pour les faire acquérir, les professeurs de géographie et de sciences peuvent jouer un rôle, mais que peuvent-ils, si le mathématicien ne les soutient, ne donne l'exemple, n'est le premier à exiger ? Je résume : nous voulons des chiffres lisibles, alignés horizontalement et verticalement ; en colonnes, avec en-têtes. Des travaux pratiques sont indispensables.

B. *Principes.* — Mes Collègues mathématiciens ne peuvent pas soupçonner l'état d'ignorance de nos futurs chercheurs. Il est si affligeant que je préfère rédiger, sous forme positive, et indiquer le programme minimum que nous souhaiterions *assimilé*, en particulier par nos jeunes géographes, qui, en l'état actuel de notre enseignement, sont issus en majorité de la classe de Philosophie, mais dans l'avenir viendront plutôt de Sciences Expérimentales.

1. Savoir distinguer un chiffre d'un nombre.
2. Savoir distinguer une mesure d'un calcul.
3. Savoir distinguer une mesure d'un dénombrement. Notion d'unité.
4. Savoir distinguer une grandeur du nombre qui la mesure. Systèmes d'unité.

Une anecdote : Je mesure les galets, j'exprime mes résultats en millimètres. Un de mes Collègues les mesure comme moi, mais exprime ses résultats en centimètres. D'où virgules. Et pour comparer nos résultats, cela prête à confusion. Je lui en fais la remarque, je lui demande : Pourquoi ? — Réponse : « Centimètre, système C.G.S., c'est plus scientifique. » Or, il s'agit d'un homme éminent, ayant reçu sa formation dans les Lycées.

On me dira : Ceci regardait ses professeurs de physique.

Peut-être. Mais est-ce que le mathématicien aussi n'aurait pas pu lui en parler ? Je m'en excuse : mais, pour moi non plus, jamais un de mes professeurs de Mathématiques ne s'est avisé que j'aurais peut-être à écrire des centaines de mesures alignées, et qu'il n'était pas indifférent, dans ce cas-là, d'écrire : 1,3 cm, ou 13 mm. Personne ne m'en a jamais rien dit.

Les géographes ont à mesurer, ou à faire état, de longueurs, de superficies. Qui leur enseignera les fondements ? Le physicien ? Depuis quand la géométrie est-elle une partie de la physique ? Pourquoi la notion de mesure serait-elle réservée au physicien, pourquoi le mathématicien n'aurait-il pas aussi à en enseigner les principes ? Quel mal y aurait-il à cela ? — L'élève, dira-t-on, verra deux fois la même chose. — Je réponds : Il verra qu'en géométrie, comme en physique, les mesures

posent les mêmes problèmes, admettent les mêmes discussions. Sera-ce un mal ? — Pour tout ce programme : travaux pratiques indispensables.

5. Perdre le fétichisme de la précision. Savoir que la précision s'obtient aux dépens du temps. Qu'il ne faut pas chercher plus de précision dans les résultats que dans les données, dans les calculs que dans les mesures qui leur servent de point de départ. Ne chercher, dans une mesure, ou dans un calcul, pas plus de précision qu'on n'en a besoin.

6. Avoir la notion d'erreur absolue, d'erreur relative. Calcul des erreurs : nous y reviendrons plus loin.

7. Approximations successives. Démarche essentielle dans la recherche scientifique. Quand elle se présente à nos étudiants, le tiers d'entre eux écarquille les yeux : ils n'en ont jamais entendu parler.

C. *Matières utiles.* — Je les indique en commençant par celles dont je ressens le plus impérieusement le besoin, soit chez moi, soit chez mes étudiants ou mes amis. Et je m'excuse si le libellé en est inadéquat et les coupures inhabituelles.

1. *Notion de population, d'ensemble.* — Elle se présente à chaque pas, impérieusement (et jamais, entre 12 et 18 ans, on ne m'en a parlé). Notion d'individu, limite de l'individu (pas toujours nette : un mouton est net, mais une région naturelle ? ou même une brebis gravide ?) ; population (de grains de sables, d'espèces animales, de mesures pluviométriques...), ensembles distincts (continents) se juxtaposant (Etats), se recoupant (religions), se comprenant (subdivisions administratives). Logique des ensembles (?). Echantillonnage (notion fondamentale, dont 99 % de nos étudiants n'ont jamais entendu parler).

2. *Notion de répartition, statistique, probabilité.* — Chapitre absolument fondamental. Cet enseignement devrait s'étaler sur plusieurs années. Rester simple : loi de Gauss, de Poisson. Histogramme, courbe cumulative. Médiane (la notion de médiane doit être à la portée d'enfants de 6 ou 7 ans, des expériences sont en cours à ce sujet), quartiles. Quelques tests de signification, les plus simples (ceci, en classe terminale, vers 18 ans).

3. *Notion de corrélation.* — Toutes les Mathématiques de 12 à 18 ans sont fondées sur la notion de fonction. Or, ce n'est pas celle-ci que rencontrent le géographe et le naturaliste : c'est celle de corrélation, *toujours*. Le nuage de points. Je crois qu'il y a là un point essentiel de la réforme. Il faut que la corrélation soit introduite *avant* la fonction, ou au plus tard *en même temps*. Il faut que dans l'heure même où la notion de fonction est enseignée, l'élève ait acquis cette idée qu'elle n'est qu'un cas particulier, une *chance*, rarement réalisée dans la nature. Autrement, on le trompe. Toutes les mathématiques qu'on m'a enseignées, m'ont donné une idée fausse. Une grande partie des défauts que nous ressentons chez les polytechniciens doit venir de là : l'abus de la fonction. La fonction-dieu.

La notion de corrélation pourrait être introduite à partir de n'importe quel couple de mesures, géométriques par exemple : longueur et largeur d'une feuille d'arbre, etc... Graphique. Droite de régression tracée au jugé. C'est seulement vers 17-18 ans que seraient enseignées une ou deux méthodes plus rigoureuses, et quelque test de signification.

Travaux pratiques évidemment indispensables.

4. *Rapports et proportions.* — Fondamental. Distinguer : « être proportionnel à » et « varier dans le même sens que ».

5. *Calcul des erreurs.* — Très simple : erreur sur un produit, sur un quotient.

6. *Algèbre.* — Equations du premier degré. Fonction linéaire. Inégalités.

Exponentielle. Logarithmes. Usage de la règle à calcul ou du cercle à calcul. Travaux pratiques. Tout ceci est le chapitre de base, l'exponentielle est pour nous la fonction la plus importante. Usage de la table de logarithmes.

Echelle logarithmique (semi- et bi-). Intérêt. Emploi. A mes étudiants, je l'expose ainsi : une même longueur, dans l'échelle arithmétique, représente l'addition d'un même nombre ; en échelle logarithmique, la multiplication par un même nombre. Au début, c'est très déroutant pour eux, obnubilés par les échelles arithmétiques. L'échelle logarithmique pourrait être enseignée peut-être vers l'âge de 10 ans, époque où on sait bien multiplier. Il s'agit d'une convention, et je ne vois pas pourquoi compter 1, 10, 100, 1 000, en avançant d'un pas à chaque fois, serait plus difficile que compter 1, 2, 3, 4. Une fois l'expérience faite sur des enfants de 10 ans, on pourra essayer sur de plus jeunes.

Un peu d'analyse combinatoire : ce qu'il faut pour l'étude des probabilités (17-18 ans).

7. *Calcul différentiel et intégral.* — En Sixième, en 1936, en sciences naturelles, l'étude d'allongement de jeunes plants de petits pois, de semaine en semaine, reportés sur graphiques (arithmétiques...), a conduit mes élèves à *inventer* la notion de dérivée. Je la mettrais donc au programme de Sixième, ou de Cinquième. Autres matériaux possibles pour travaux pratiques : courbes de population, ou de production, à tirer des manuels de géographie.

Calcul intégral : fonction linéaire, exponentielle, trigonométriques (vers 17-18 ans ?).

8. *Géométrie.* — Symétries et rotations : devraient être incomparablement plus développées (vers 13-15 ans ?). Travaux pratiques indispensables. La géométrie dans l'espace, pour le naturaliste, c'est avant tout une question de symétrie. Polyèdres réguliers.

Isotropie. Grandeurs vectorielles (vers 13-14 ans ?). Dérivées vectorielles (vers 17-18 ans ?).

Mesure des longueurs. Pied à coulisse. Vernier. Curvimètre. Précautions. Tout ceci est fondamental. Travaux pratiques indispensables, comme pour ce qui suit.

Mesure des aires. Emploi du planimètre intégrateur.

Mesure des angles. Rapporteur. Unités d'angle.

9. *Trigonométrie.* — Définitions de la trigonométrie plane. Relations entre les fonctions de x.

Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. Et un exemple d'application. Cette discipline élargit heureusement les idées ; elle est utile au géographe (point astronomique, projections) et au géologue (mesure des inclinaisons de couches sur une section transversale). J'ai eu l'occasion de résoudre un problème sur les dispositions de galets, grâce à elle. Je la verrais enseignée vers 17-18 ans.

En trigonométrie plane, j'ai eu l'étonnement d'avoir à utiliser une fois la sécante.

Usage des tables de valeurs naturelles des lignes trigonométriques.

Usage des tables de logarithmes (sans s'y appesantir, car il est rare qu'on ait à s'en servir : la règle à calcul nous suffit en général).

*
**

Toutes les matières qui viennent d'être indiquées, et dont l'enseignement est souhaitable, pourraient être réparties entre 6 ans et 17-18 ans. Les plus difficiles et les plus spécialisées d'entre elles seraient évidemment réservées à la classe terminale des Lycées, vers 17-18 ans, et comme il s'agit ici des jeunes gens se destinant aux sciences naturelles ou à la géographie, c'est surtout dans le programme de la classe de Sciences Expérimentales qu'elles devraient être introduites.

La classe de Philosophie et celle de Mathématiques Elémentaires fréquentées par des jeunes gens se destinant à d'autres professions, auraient des programmes

différents, adaptés aux besoins de ces professions, et ce que j'ai indiqué ci-dessus ne s'y applique pas.

Pour établir le programme futur de la classe de Sciences Expérimentales, il serait utile de tenir grand compte des besoins des sciences médicales. Pour les Mathématiques, je pense qu'ils sont pour la plupart compris dans ceux que je viens d'exposer pour les sciences naturelles et géographiques, mais une enquête est nécessaire pour le contrôler.

III. — Tendances possibles d'une réforme

De ce qui précède, on voit qu'une bonne part des Mathématiques, actuellement enseignées entre 6 et 18 ans, pourrait être gardée : presque la moitié. Outre tout ce que j'ai cité, et qui nous est directement utile, j'ajouterais *peut-être* les fractions (sans excès, et avec doute) entre 10 et 13 ans ; et sûrement la géométrie plane, comme étant l'un des fondements de la pensée mathématique. Géométrie plane et arithmétique de base mise à part, je ressens impérieusement la nécessité d'une réforme très profonde de notre enseignement mathématique. Je la voudrais d'une hardiesse extrême, bien entendu après toutes les expériences pédagogiques nécessaires, lesquelles demanderaient un an ou deux. Ces expériences seraient à tenter par de jeunes collègues. Les tendances possibles de la réforme seraient, en résumé, les suivantes :

1. Elaguer les inutilités périmées. Gain : plus de 50 % du temps.

2. Rajeunir les matières, introduire des notions modernes (ensembles, corrélation, statistique, etc...).

3. Commencer le plus tôt possible ces enseignements neufs ; certains, dès l'école primaire (c'est ici que des expériences préalables sont nécessaires).

4. Pour le neuf, comme pour l'ancien, s'en tenir à l'essentiel, élaguer toutes les babioles ; au diable les corollaires. Mais faire acquérir à fond, et ne pas hésiter à rabâcher (une *autre* année). Nous n'avons besoin, ni des détails, ni du fignolé, mais de la base, et du bien assimilé.

5. Davantage de concret au départ. Toute la pureté que vous voulez après, mais partez de la nature, à laquelle nos élèves reviendront.

6. Des travaux pratiques : ils seront une base et ils seront aussi l'aboutissement, du moins pour les futurs naturalistes et géographes. Leur création est rigoureusement indispensable.

7. Au moins les travaux pratiques devront se traduire, se matérialiser, par des tableaux de valeurs numériques et par des figures ou graphiques lisibles, propres, clairs, impeccables.

La plus grande rigueur de langage sera exigée.

8. L'horaire total des Mathématiques sera augmenté, sauf en latin-grec et en philo.

*
**

Les naturalistes et les géographes ont une tendance de plus en plus marquée à envisager des ensembles, à les étudier statistiquement, à dénombrer les choses et à mesurer les phénomènes. Cette double tendance, statistique et quantitative, est le trait le plus saillant de l'évolution récente de leurs recherches. Elle leur inspire l'impérieux désir d'une meilleure information mathématique et, pour leurs futurs successeurs, d'une meilleure formation. Ils se réjouissent à la pensée qu'une réforme — mais une réforme vraie, un rajeunissement vigoureux — permettra à la génération montante de profiter à plein du magnifique épanouissement de l'école mathématique française.

André de Cayeux, *chargé de cours à la Sorbonne.*