QUELQUES POINTS DE PÉDAGOGIE THÉORIQUE

Voici de menues remarques sur les Mathématiques de Seconde, Première et Sciences Expérimentales consécutives à diverses expériences auxquelles je me suis livré au cours des dernières années :

1) ALGÈBRE MODERNE ET LOGIQUE.

Une expérience que j'ai tentée l'an passé en Seconde montre qu'un enseignement systématique de l'Algèbre *à partir* de l'Algèbre moderne est trop dogmatique et n'est réellement accessible qu'à deux ou trois très bons élèves. D'autre part, s'il attire l'attention sur les mécanismes et les règles de calcul, il n'a pas d'influence bénéfique sur la pratique du calcul dans le domaine réel. Cependant, tel quel, il intéresse les élèves et la simplicité des structures algébriques, tant que n'intervient pas la continuité, leur donne le sentiment de mieux posséder le cours (1). Le calcul matriciel, donné en application, sur des matrices 2×2 avec prolongement sur les nombres complexes présentés comme corps des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est facilement pratiqué (d'ailleurs aux U.S.A. les nombres complexes figurent dans les programmes d'algèbre élémentaire). Il y aurait donc, à mon avis, un moyen-terme à trouver, consistant à construire la théorie des nombres réels sur la mesure des vecteurs portés par un axe, image indispensable pour les questions d'ordre, de continuité, de valeurs

(1) Je me fonde ici sur leurs propres appréciations.

absolues, etc... ; mais on pourrait ensuite mettre en évidence les axiomes sur lesquels reposent les règles de calcul et traiter en exercices des exemples divers : congruences modulo n, matrices carrées, nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$ par exemple (a et b rationnels donnent un corps, a et b entiers donnent un anneau dont l'étude du groupe multiplicatif des éléments unitaires est intéressante), sans oublier les espaces vectoriels. Il est difficile de dissocier, avec des coefficients pris dans le domaine réel, ou même dans un corps infini quelconque, la notion de forme polynômiale de celle de fonction polynômiale, puisqu'il n'arrive jamais que deux formes différentes soient associées à la même fonction ; il paraîtra donc bien artificiel de « définir » la somme de deux polynômes ou leur produit qui, pour les élèves, doit être l'unique forme susceptible, à leurs yeux, de représenter la somme ou le produit des deux fonctions. Mais on aurait intérêt à insister plus qu'on ne fait, semble-t-il, sur le quotient de deux polynômes et sur leur division suivant les puissances décroissantes. A propos des fractions rationnelles on pourrait alors mettre en évidence la distinction entre forme et fonction ; on n'hésitera pas à écrire $\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ en remarquant qu'il ne s'agit pas d'une stricte égalité entre les fonctions associées, ce qui nécessitera des précautions dans les résolutions d'équations.

Quel que soit le degré de pénétration dans l'étude des structures, il sera en tout cas utile d'éliminer des démonstrations absurdes comme celle-ci, extraite d'un manuel en usage et que des Collègues reconnaîtront peut-être : pour prouver que

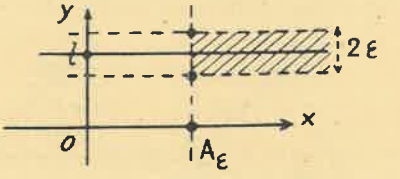
$$a = b \Longrightarrow a + c = b + c,$$ on procède aussi

$$a = b \Longrightarrow a - b = 0 \Longrightarrow (a + c) - (b + c) = 0 \Longrightarrow a + c = b + c,$$

comme si la définition de l'addition n'entraînait pas, *ipso facto*

$$a = b \text{ et } c = d \Longrightarrow a + c = b + d.$$

Dans le domaine de la logique l'usage des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ devrait être répandu et même imposé. En ce qui concerne les questions de limites infinies, qu'il est difficile d'éluder en Première et Sciences Expérimentales à propos des fonctions, j'ai constaté qu'il faut, ou bien se contenter d'inscrire les symboles $\pm\infty$ dans les tableaux sans les définir autrement que par des allusions intuitives, ou bien utiliser $\exists$ et A. J'ai constaté que des élèves assez médiocres peuvent reconstituer la phrase en « péanien » (comme disait Poincaré), alors que les meilleurs trébuchent sur l'interminable phrase du langage courant. Il ne m'a pas paru mauvais d'associer l'idée de « souricière » ou piège à courbe à celle de limite, sur le plan graphique.



Si $y \to l$ quand $x \to +\infty$ on peut enfermer la courbe dans un couloir aussi étroit qu'on veut autour de $y = l$ pourvu que x soit assez grand.

De telles leçons demeurent assez difficiles et fastidieuses, mais entièrement compréhensibles et constituent un exercice de précision des idées, sous le contrôle impitoyable du symbolisme logique. On n'a plus le droit de répéter de nos jours que les traductions latines ont une vertu irremplaçable pour la formation de l'esprit quand il existe un langage autrement logique et synthétique que le latin, lequel signifie par la même phrase que les Romains seront vainqueurs et vaincus (*dico romanos vincere posse*).

Le quantificateur $\forall$, permet, entre mille avantages, d'éliminer l'usage douteux des identités dans la définition des fonctions paires, périodiques, etc...

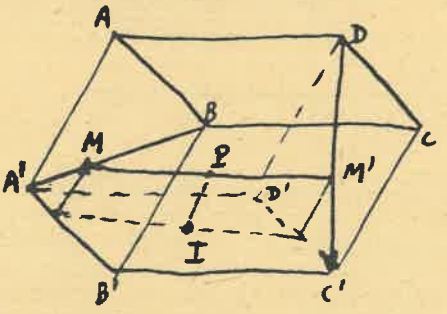
2) Etude des fonctions.

Les valeurs absolues, qui surprennent toujours les élèves, fournissent des sujets d'exercices nombreux exploités par les manuels. Il y a un thème que je n'ai pas encore vu et qui est intéressant. On pourrait le baptiser, pour être à la mode, « la fusée à plusieurs étages » : c'est celui qu'emploie Lebesgue, dans sa démonstration du théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues (2). Il est basé sur le fait simple que la fonction $f(x) + |f(x)|$ est nulle quand $f(x)$ est négative et égale à $2f(x)$, quand $f(x)$ est positive. On peut ainsi fabriquer des fonctions assez extravagantes avec des moyens très simples et notamment des fonctions représentées par telle ligne brisée qu'on s'est fixée d'avance. Il suffit de partir avec une fonction linéaire sur le premier côté, puis d'ajouter à chaque sommet la fonction linéaire convenable, « neutralisée » jusqu'alors par le procédé du $f(x) + |f(x)|$ qui vaut zéro tant que $f(x)$ est négative : d'où la comparaison avec une fusée à plusieurs étages. Le dernier de nos élèves de Seconde peut s'amuser à ce jeu inoffensif.

Pour en rester à ce domaine il est intéressant d'initier les élèves à une topologie des fonctions, à cette occasion ou à une autre. La ligne brisée inscrite dans telle parabole ou hyperbole, on évalue aisément, dans un intervalle (a, b) le maximum de la différence des ordonnées qui est une « distance », sur (a, b), entre les deux fonctions.

3) Géométrie dans l'espace.

L'équilibre et la cohérence du cours de Première me paraissent gagner à une division nette entre géométrie linéaire et géométrie métrique. Il est possible de consacrer le premier trimestre à l'ensemble des questions linéaires : parallélisme (3), théorèmes de Thalès, vecteurs, translation, symétrie par rapport à un point, homothétie, projection cylindrique (j'ai eu déjà l'occasion de dire dans cette revue combien il me paraît nécessaire de ne pas se limiter à la projection orthogonale, ce qui n'augmente pas d'une ligne la longueur du cours) ; le plus tôt possible il est bon d'étudier des solides et notamment le parallélépipède quelconque qui, complaisamment, fournit tous les sujets d'exercices imaginables sur les questions énumérées et offre le considérable avantage de soulager l'imagination et le langage avec son plancher, son plafond et ses murs. Un problème comme celui du lieu des milieux des segments de droites parallèles à un plan et s'appuyant sur deux droites non coplanaires se résout bien facilement sur le parallélépipède ci-contre, en projetant le segment variable MM' sur le plan « horizontal » parallèlement à AA'.



(2) Cf., par exemple, Goursat : *Analyse*, t. II, p. 408.

(3) A propos duquel le parallélisme au sens large (voir article de M. Crozes, n° 177, page 490) me paraît d'un usage indispensable même à propos des droites et plans. Faute de s'en servir, on énonce des théorèmes faux (deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles, par exemple).

Lassé du parallélépipède on pourra en tirer, comme un lapin d'un chapeau, des tétraèdres divers et un bel octaèdre centré. Il n'est pas jusqu'à la toile d'araignée du paraboloïde hyperbolique qui ne s'y dissimule à l'usage des élèves les mieux doués.

Ayant ainsi travaillé pendant un trimestre sur une géométrie relativement pauvre en théorèmes, mais non en figures, on peut aborder au deuxième trimestre l'ensemble des questions métriques. A la fin de cette deuxième étape se posera la question des symétries par rapport à la droite et au plan. Le programme prescrit des définitions qui ne peuvent que demeurer inutilisables si on ne va pas plus loin. Or la question des déplacements dans l'espace est trop complexe pour être étudiée en Première. Je propose la méthode suivante : définir les isométries sans s'attacher à distinguer le sous-groupe des déplacements ; montrer dans le cas général qu'une isométrie transforme une droite en droite, un plan en plan et conserve les angles (par exemple, la droite AB est le lieu des M tels que $|MA \pm MB| = AB$) ; puis montrer que la symétrie par rapport à un plan est une isométrie et la symétrie par rapport à une droite, le produit de deux symétries du type précédent. On peut y ajouter une initiation « physique » aux déplacements grâce à l'observateur embroché, admettre que la symétrie par rapport à un plan change les sens des trièdres et examiner, d'après le nombre de symétries planes qui entrent dans leur composition, la nature des autres isométries étudiées.

4) Primitives en Sciences Expérimentales.

Il me semblerait intéressant de dissocier l'idée d'intégrale définie de celle de surface, de même qu'on considère en Première la pente de la tangente comme une image géométrique de la dérivée, mais non comme sa définition. Le cours de Mathématiques de Sciences Expérimentales est tourné vers la Physique ; celle-ci utilise les intégrales de façon plus ou moins occulte dans le calcul du travail de la pesanteur, des forces de la vapeur, du courant électrique, etc... Ramener tout à des surfaces au lieu de montrer comment on est obligé de calculer une intégrale définie à la place d'un simple produit chaque fois qu'un des facteurs du produit est fluctuant, me paraît passer à côté d'une belle occasion de culture mathématique. Il me semble d'ailleurs qu'une étude des fonctions en escalier avec application à des statistiques et calculs de moyenne serait la meilleure introduction possible au calcul intégral en Sciences Expérimentales. C'est cette méthode qui permet à Arnaud Denjoy de donner un exposé intuitif lumineux d'une question bien difficile, celle de l'intégrale de Lebesgue (cf. *L'Encyclopédie française*, 1, 70, 13). L'aspect valeur moyenne, c'est-à-dire $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, est le plus intéressant à mon avis à introduire en premier lieu. Mais il faut parier que les surfaces auront la vie dure.

J'espère que ces remarques intéresseront quelques Collègues, notamment débutants et que je bénéficierai en retour de suggestions sur l'enseignement dans les classes du deuxième cycle, suggestions qui me paraissent plutôt rares dans ce *Bulletin*, alors que le fond de notre enseignement a sérieusement besoin d'un renouvellement auquel les manuels actuels n'apportent pas encore de solutions, les objectifs commerciaux des éditeurs s'y opposant d'ailleurs fatalement. Il est regrettable que beaucoup de Collègues conservent pour leur usage personnel le fruit de leurs recherches, par négligence ou excessive modestie.

Jacques Weil (*Ecole Normale, Carcassonne*).
