II. ESSAIS

DÉFINITION AXIOMATIQUE DES DÉPLACEMENTS ET LE PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DANS LE PLAN

par ROBERT NEUMEISTER (*Lycée Fustel-de-Coulanges*, Strasbourg)

1. Introduction

Cette étude se base sur la connaissance de huit axiomes (1) :

(I) les quatre axiomes de la demi-droite ;
(II) les trois axiomes des espaces linéaires ;
(III) l'axiome de Dedekind.

En plus, nous nous servons de notre définition de l'orientation des espaces linéaires.

Pour saisir le phénomène global des déplacements, nous introduisons le groupe des déplacements (positifs et négatifs) dans le plan. Ce groupe est défini par nos deux premiers axiomes des déplacements (IV, 1 et 2). Un troisième axiome (IV, 3) donne l'autonomie aux déplacements d'une droite sur une autre droite, ce qui permettra de définir les déplacements dans les espaces linéaires à plus de deux dimensions, sans avoir recours à d'autres axiomes.

Notre façon de voir se rapproche partiellement du point de vue exposé par R. BRISAC (2), qui introduit le groupe des déplacements positifs dans l'espace à trois dimensions. Mais BRISAC étudie l'orientation en se servant des déplacements, tandis que nous avons déjà résolu le problème de l'orientation indépendamment de la notion de déplacement.

Au début, nous définissons les éléments de position, comparables à nos éléments d'orientation. Ensuite, nous rappelons des généralités sur les groupes de transformations ponctuelles. Les transformations linéaires biunivoques font intervenir la notion de demi-droite qui reste fondamentale dans tout notre système d'axiomes. Les déplacements s'introduisent comme cas particuliers de ces transformations linéaires.

Après avoir donné une définition axiomatique du groupe des déplacements positifs et négatifs dans le plan, nous étudions des cas particuliers de déplacements où le rôle important des symétries se met en évidence. L'existence du milieu d'un segment de droite et de la bissectrice d'un angle est démontrée à l'aide de l'axiome de Dedekind. Finalement, nous arrivons au problème fondamental de la géométrie métrique : l'étude du déplacement le plus général dans le plan.

Le système des onze axiomes (à savoir les huit axiomes dont nous avons parlé au début et les trois axiomes des déplacements), est polyvalent. Suivant le choix d'un douzième et dernier axiome sur les parallèles nous avons un système d'axiomes complet de la géométrie euclidienne ou de la géométrie de Lobatchevsky et Bolyaï.

---

(1) Cf. *Bulletin* de l'A.P.M. n° 177 de mai 1956, notre étude : « Définition axiomatique des espaces linéaires et leur orientation », et n° 184 de mars 1957, notre étude : « L'axiome de Dedekind et son application à l'étude des parallèles ».

(2) Cf. Robert BRISAC : *Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

2. Définition d'un élément de position

Désignons par A_i un point. Nous allons *définir de proche en proche un élément de position* P^n *à n dimensions,* où n est un entier $\geqslant 0$. Pour :

$n = 0$ P^0 *est un point* A_0 $\qquad P^0 = A_0$

$n = 1$ P^1 *est une demi-droite* $\qquad P^1 = \overset{\bullet}{A_0}\overline{A_1}$

$n = 2$ P^2 *est l'ensemble d'un* P^1 *et d'un demi-plan limité par le support de ce* P^1 ; ce demi-plan est alors déterminé par la donnée d'un point A_2. Notons : $P^2 = \overset{\times}{A_0}\overline{A_1 A_2}$.

Cas général : P^n *est l'ensemble d'un* P^{n-1} *et d'un demi-*E^n *limité par l'espace-support de ce* P^{n-1} Notons :

$$P^n = \overset{\times}{P^{n-1}}\overline{A_n} = \overset{\times}{A_0}\overline{A_1 A_2 \ldots\ldots A_n}$$

Nous appelons les éléments de positions $P^0, P^1, P^2, \ldots, P^{n-1}$, qui interviennent successivement dans la définition de P^n, les *éléments de positions partiels* de P^n.

Nous indiquons encore la notation :

$$\overset{\bullet}{A_0}\overline{A_1} = -\overset{\bullet}{A_0}\overline{A_1}$$

et d'une façon analogue nous écrivons par exemple :

$$\overset{\times}{A_0}\overline{A_1 A_2} \qquad \overset{\times}{A_0}\overline{A_1}\,\overline{A_2} \qquad \overset{\times}{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,\overline{E}\,\overline{F}$$

en convenant chaque fois qu'une lettre (à l'exception de la première) est surmontée du signe — de remplacer le demi-espace défini par le point correspondant par le demi-espace opposé.

A chaque élément de position P^n *correspond l'élément d'orientation* O^n qui s'obtient en remplaçant dans P^n son élément de position partiel P^1 (demi-droite) par la droite orientée définie par ce P^1.

Si deux éléments de position ont la même orientation, nous disons encore que leur *orientation relative* est *positive*, dans le cas contraire leur *orientation relative* est *négative.*

Règle de signe. — Deux éléments de positions, qui sont définis par les mêmes lettres placées dans le même ordre, sont respectivement d'orientation relative positive ou négative si la différence de leurs nombres de signe — est paire ou impaire.

3. Groupe de transformations ponctuelles

Définition : *Un groupe de transformations ponctuelles* G est un ensemble de telles transformations satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Le produit de deux transformations* T_1 *et* T_2 *du groupe est une transformation* T_3 *appartenant aussi au groupe.*

Ou encore : Si $T_1 \in G$ et $T_2 \in G$ on a aussi $T_1 . T_2 \in G$ (nous notons le produit de gauche à droite).

2° *Le produit de plusieurs transformations du groupe est associatif*

$$(T_1 . T_2) . T_3 = T_1 . (T_2 . T_3).$$

3° *La transformation identique* I *fait partie du groupe.* Ou : $I \in G$.

4° *Si* T *est une transformation du groupe, sa transformation inverse* T^{-1} *existe d'une façon unique et fait aussi partie du groupe :* $T^{-1} . T = T . T^{-1} = I$.

Remarques : La condition 2° est vérifiée automatiquement dans le cas des transformations ponctuelles.

Les conditions 1° et 4° entraînent la condition 3°.

Si le produit de deux transformations du groupe est en plus commutatif, on dit que le *groupe* est *commutatif* ou que c'est un *groupe abélien.*

4. Le groupe de transformations linéaires biunivoques

DÉFINITION : *Une transformation linéaire biunivoque* est une transformation ponctuelle biunivoque *conservant les demi-droites.*

La transformation identique satisfait en particulier à cette définition. L'existence d'autres transformations linéaires biunivoques dans un espace linéaire est liée à la nature globale de cet espace. Sans poser de prime abord la question de cette existence, nous allons tirer des conséquences de la définition précédente.

1) La transformation étant biunivoque, *deux points distincts* A *et* B *se transforment toujours en deux points distincts* A' et B'.

2) *Le segment* $AB = \overset{\bullet}{\overline{AB}} \cap \overset{\bullet}{\overline{BA}}$ *se transforme dans le segment*

$$A'B' = \overset{\bullet}{\overline{A'B'}} \cap \overset{\bullet}{\overline{B'A'}}.$$

3) *La droite* $AB = \overset{\bullet}{\overline{AB}} \cup \overset{\bullet}{\overline{BA}}$ *se transforme dans la droite* $A'B' = \overset{\bullet}{\overline{A'B'}} \cup \overset{\bullet}{\overline{B'A'}}$.

4) *Trois points non alignés se transforment en trois points non alignés.* (Si non, la transformation ne peut pas être biunivoque).

Nous en concluons :

5) *L'inverse d'une transformation linéaire biunivoque existe et est aussi une telle transformation.*

6) *Dans un espace linéaire, l'ensemble des transformations linéaires biunivoques est un groupe.*

De la conservation des demi-droites et des axiomes de la demi-droite, il résulte :

7) *La transformation conserve l'ordre des points d'une droite.*

8) *Un angle saillant se transforme en un angle saillant.*

En effet, l'angle saillant $\widehat{AOB}$ est défini par l'ensemble des demi-droites $\overset{\bullet}{\overline{OM}}$ où M $\in$ segment AB. Ces éléments génériques de l'angle donné se transforment dans les éléments génériques de l'angle transformé.

9) *Un angle plat se transforme en un angle plat.*

En effet, il suffit de considérer l'angle plat comme la somme de deux angles saillants supplémentaires.

10) *Un demi-plan se transforme dans un demi-plan.*

11) *Un élément de position* P^2 *se transforme dans un élément de position* P'^2 de *même dimension.*

On généralise de même pour les demi-espaces E^n et les éléments de position P^n.

12) *Une transformation linéaire biunivoque conserve l'orientation relative de deux éléments de position.*

13) *Les deux classes d'éléments de position définissant les deux orientations possibles d'un espace se transforment en deux classes analogues de l'espace transformé.*

14) Dans le cas particulier où nous *transformons linéairement un espace en lui-même,* il y a deux possibilités :

a) *il y a conservation de l'orientation,* la *transformation* est alors dite *positive ;*

b) *il y a changement de l'orientation,* la *transformation* est *négative.*

Alors *les transformations linéaires biunivoques positives* forment *un sous-groupe du groupe des transformations linéaires biunivoques.*

5. Les trois axiomes des déplacements

DÉFINITION : Nous appelons *déplacement dans le plan, ou d'un plan dans un autre plan, toute transformation linéaire biunivoque satisfaisant aux trois axiomes des déplacements* (IV).

Axiome IV, 1 : *Il existe des déplacements dans le plan, ou d'un plan dans un autre plan, un tel déplacement étant entièrement défini par la correspondance de deux éléments de position à deux dimensions.*

NOTATION : Le déplacement faisant correspondre les éléments de position P^2 et P'^2, ainsi que Q^2 et Q'^2 se note :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P'^2) = \text{Dépl}\,(Q^2, Q'^2).$$

DÉFINITION : Le *déplacement* dans le plan est *positif* ou *négatif* selon l'orientation relative de P^2 et P'^2.

Axiome IV, 2 : *Le produit de deux déplacements est un déplacement.*

Ces deux premiers axiomes des déplacements nous permettent d'écrire :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P'^2).\text{Dépl}\,(P'^2, P''^2) = \text{Dépl}\,(P^2, P''^2).$$

DÉFINITION : *La transformation par déplacement d'une droite en elle-même, ou d'une droite en une autre droite est par définition une restriction d'un déplacement d'un plan.*

Axiome IV, 3 : *La transformation d'une droite en une droite par déplacement est entièrement déterminée par la correspondance de deux éléments de position à une dimension.*

Autrement dit : *le déplacement de droite en droite est indépendant des plans passant par ces droites, servant à définir la transformation comme restriction de déplacement de plan en plan.*

En géométrie plane, ce dernier axiome est inutile, il nous servira dans la géométrie des espaces à n dimensions pour $n \geqslant 3$.

6. Le groupe des déplacements dans le plan

Comme conséquence des axiomes IV, 1 et 2, nous avons :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P'^2).\text{Dépl}\,(P'^2, P'^2) = \text{Dépl}\,(P^2, P'^2) \quad \text{et}$$
$$\text{Dépl}\,(P^2, P^2).\text{Dépl}\,(P^2, P'^2) = \text{Dépl}\,(P^2, P'^2),$$

donc :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P^2) = \text{Dépl}\,(P'^2, P'^2) = I \ (= \text{transf. identique}), \text{ d'où :}$$

THÉORÈME I : *La transformation identique est un déplacement.* Considérons maintenant le produit :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P'^2).\text{Dépl}\,(P'^2, P^2) = \text{Dépl}\,(P^2, P^2) = I,$$

de même :

$$\text{Dépl}\,(P'^2, P^2).\text{Dépl}\,(P^2, P'^2) = \text{Dépl}\,(P'^2, P'^2) = I, \quad \text{d'où}$$

THÉORÈME II : *La transformation inverse d'un déplacement est toujours bien déterminée et elle est aussi un déplacement.*

D'après les axiomes IV, 1 et 2, et les théorèmes I et II, nous concluons :

THÉORÈME : *Les déplacements dans le plan forment un groupe. Les déplacements positifs dans le plan en forment un sous-groupe.*

SIGNE D'UN DÉPLACEMENT. — Dans le plan, il y a deux déplacements qui font correspondre à une demi-droite $\overset{\bullet}{O}\overline{A}$ une demi-droite $\overset{\bullet}{O'}\overline{A'}$, l'un *positif* et l'autre *négatif*. *Nous attribuons* à ces deux déplacements respectivement *les signes* + *et* —. *Si nous indiquons le signe du déplacement, la correspondance des éléments de posi-*

tion partiels à une dimension est suffisante pour caractériser ces déplacements qui se notent alors :

$$\text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}) \quad \text{ou} \quad \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}).$$

Nous appelons ces éléments de position partiels encore des *repères* dans le plan.

Règle de signe. — 1) *Le produit de deux déplacements de même signe est positif.*

2) *Le produit de deux déplacements de signes différents est négatif.*

Définition : Nous disons que ***deux figures planes sont égales si elles se correspondent dans un déplacement.*** **Dans le même plan nous** distinguons des figures *directement égales* et *inversement égales,* suivant que le déplacement qui les fait correspondre est positif ou négatif.

En particulier, deux figures peuvent être directement et inversement égales. Citons comme exemple deux demi-droites.

Du fait que les déplacements dans le plan forment un groupe, il résulte :

Théorème : *Les figures égales à une figure donnée forment une classe d'équivalence.*

Cette classe d'équivalence définit la *forme de la figure.*

En particulier la forme d'un segment de droite s'appelle la *longueur* de ce segment.

7. Symétrie par rapport à une droite

Soit le déplacement négatif dans le plan, faisant correspondre une demi-droite donnée à elle-même : $\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}})$. Nous avons la relation :

$$\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}}) . \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}}) = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}}) = I$$

Le déplacement considéré est donc une *transformation réciproque.* Etudions maintenant la restriction de cette transformation à la droite invariante OA.

Soit A un point de $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ et A′ son homologue (aussi sur $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$) dans ce déplacement réciproque. Les trois points O, A, A′ se transforment respectivement en O, A′ A. Les déplacements conservant l'ordre sur une droite, les points A et A′ sont nécessairement confondus. Le même raisonnement est valable pour la demi-droite $-\overset{\bullet}{\overline{OA}}$, donc pour toute la droite.

Conclusion : Dans ce déplacement la droite (D) = OA est *invariante point par point,* nous appelons (D) *l'axe de symétrie.*

Pour définir ce déplacement négatif, il suffit de prendre comme repère se correspondant à lui-même une demi-droite quelconque sur l'axe de symétrie (D).

Nous résumons :

Théorème : *Il existe dans le plan un déplacement négatif unique, dans lequel une droite donnée* (D) *est invariante point par point.*

Ce déplacement s'appelle la *symétrie par rapport à la droite* (*ou l'axe*) (D).

$\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ étant une demi-droite quelconque placée sur (D), nous notons la transformation dans le plan

$$\text{Sym}\,(D) = \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}}).$$

Deux points homologues dans cette symétrie sont dits *symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe* (D).

Conséquence de ce théorème : Dans le plan on a :

$$\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}) = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}) . \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{O'A'}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}).$$

Donc, les deux seuls déplacements dans le plan qui transforment $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ en $\overset{\bullet}{\overline{O'A'}}$ donnent la même restriction définissant le déplacement de la droite OA en la droite O'A'. *En géométrie plane l'axiome* IV, 3 *devient donc un théorème.* Il n'en est plus de même si l'on utilise des plans différents passant par les deux droites, ce qui devient absolument nécessaire pour des droites non coplanaires.

Sur une seule droite, ou de droite en droite, nous notons ce déplacement :

$$\text{Dépl}\,(\overset{\bullet}{\overline{OA}},\ \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}).$$

8. Groupe des déplacements sur la droite

Sur une même droite un déplacement peut aussi se définir par la correspondance de deux points (éléments de position partiels à zéro dimensions) et le signe de ce déplacement. Nous notons les deux déplacements transformant O en O' :

$$\text{Dépl}_{(+)}\,(O,\ O') \qquad \text{et} \qquad \text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O').$$

L'ensemble des déplacements positifs et négatifs sur la droite forment un groupe, les déplacements positifs en forment un sous-groupe. Nous reviendrons plus loin au groupe des déplacements positifs appelé encore *le groupe des translations* sur la droite.

Cas particulier où le déplacement sur la droite admet un *point double* O.

1° Le déplacement est positif, alors :

$$\text{Dépl}_{(+)}\,(O,\ O) = I \qquad \text{Donc :}$$

Une translation sur une droite n'a pas de point double, ou elle se réduit à la transformation identique.

2° Le déplacement est négatif, soit $\text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O)$. On a :

$$\text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O).\text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O) = \text{Dépl}_{(+)}\,(O,\ O) = I.$$

Ce déplacement négatif est donc une *transformation réciproque,* elle échange les deux demi-droites d'origine O. Donc O est le seul point double de cette transformation qui s'appelle encore *la symétrie sur la droite par rapport au point* O, notée :

$$\text{Sym}\,(O) = \text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O),$$

O s'appelle le *centre de symétrie.*

Nous allons démontrer que tout déplacement négatif sur la droite est une symétrie par rapport à l'un de ces points.

9. Milieu d'un segment de droite

Soit un segment de droite AB. Orientons son support par la relation d'ordre : $A < B$.

Considérons le déplacement négatif sur la droite transformant A en B ; soient M un point quelconque de la droite et M' son homologue. Nous écrivons la relation :

$$\text{Dépl}_{(-)}\,(A,\ B) = \text{Dépl}_{(-)}\,(M,\ M').$$

Ce déplacement nous permet de *définir une coupure* sur la droite :

Si $M \leqslant M'$, le point M appartient à la classe (I).
Si $M' \leqslant M$, le point M appartient à la classe (II).

Ainsi :

1° Tout point de la droite appartient au moins à l'une des deux classes. Il y a au plus un point commun aux deux classes. En effet, s'il existe un point double O du déplacement, on a :

$$\text{Dépl}_{(-)}\,(A,\ B) = \text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O) = \text{Sym}\,(O).$$

Mais alors O est le seul point double de la transformation, donc le seul point commun aux deux classes.

2° Le point A appartient à la classe (I) et le point B à la classe (II). Donc il y a au moins un point dans chaque classe.

3° Démontrons que si un point $N \leqslant M$ de la classe (I), alors N appartient aussi à la classe (I).

Soit N' l'homologue de N. La transformation étant négative, $N' \leqslant M$ entraîne : $M' \leqslant N'$, mais : $M \leqslant M'$ donc d'après la transitivité de la relation d'ordre on a aussi : $N \leqslant N'$. Donc le point N appartient bien à la classe (1).

D'après l'axiome de Dedekind, il existe un point O commun aux deux classes. C'est le seul point double du déplacement.

THÉORÈME : *Etant donné un segment de droite* AB, *il existe sur ce segment un point unique* O, *tel que* OA = OB.

La symétrie par rapport au point O échange ces deux segments ainsi que les points A et B. On a :

$$\text{Sym (O)} = \text{Dépl}_{(-)}\,(A, B) = \text{Dépl.}_{(-)}\,(B, A).$$

Pour un segment on peut écrire : AB = BA. Avec deux segments égaux AB et CD on a : AB = CD et aussi : AB = DC.

DÉFINITION : Le point unique qui partage un segment en deux segments égaux, ses *moitiés,* s'appelle le *milieu du segment,* c'est aussi *le centre de symétrie* du segment.

Nous pouvons nous répéter sous la forme suivante :

THÉORÈME : *Tout segment de droite admet un milieu.*

10. Bissectrice d'un angle

Soit un angle $\widehat{AOB}$ de côtés $\overset{\bullet}{O}\overline{A}$ et $\overset{\bullet}{O}\overline{B}$. Le déplacement négatif dans le plan qui transforme $\overset{\bullet}{O}\overline{A}$ en $\overset{\bullet}{O}\overline{B}$ transforme un élément générique $\overset{\bullet}{O}\overline{M}$ de l'angle en $\overset{\bullet}{O}\overline{M'}$. Nous notons :

$$\text{Dépl}_{(-)}\,(\overset{\bullet}{O}\overline{A}, \overset{\bullet}{O}\overline{B}) = \text{Dépl}_{(-)}\,(\overset{\bullet}{O}\overline{M}, \overset{\bullet}{O}\overline{M'}).$$

Nous pouvons définir sur l'ensemble des éléments génériques de l'angle une coupure, comme nous l'avons fait pour mettre en évidence l'existence du milieu d'un segment de droite AB. Cette coupure nous démontre l'existence d'un élément générique unique $\overset{\bullet}{O}\overline{C}$ de l'angle se transformant en lui-même dans le déplacement qui peut s'écrire :

$$\text{Sym (OC)} = \text{Dépl}_{(-)}\,(\overset{\bullet}{O}\overline{A}, \overset{\bullet}{O}\overline{B}) = \text{Dépl}_{(-)}\,(\overset{\bullet}{O}\overline{B}, \overset{\bullet}{O}\overline{A}).$$

DÉFINITION : La demi-droite $\overset{\bullet}{O}\overline{C}$ qui partage l'angle $\widehat{AOB}$ en deux angles égaux, ses *moitiés,* s'appelle la *bissectrice* de cet angle.

THÉORÈME : *Tout angle admet une bissectrice.*

Le support de cette bissectrice est *l'axe de symétrie de l'angle.*

DÉFINITION : Nous appelons un *angle nu* l'ensemble de deux demi-droites de même origine.

Un angle nu détermine en général un angle saillant et un angle rentrant. Il y a exception pour l'angle nu plat qui détermine deux angles plats. *Les deux angles définis par un angle nu ont le même axe de symétrie, support de leurs bissectrices qui sont des demi-droites opposées.*

THÉORÈME : *Si deux segments, ou deux angles, sont égaux, leurs moitiés sont aussi égaux.*

En effet, le milieu d'un segment (respectivement la bissectrice d'un angle) étant unique, le déplacement qui transforme un segment (ou un angle) dans son égal, transforme aussi le milieu (ou la bissectrice) dans le milieu (ou dans la bissectrice). D'où la correspondance des moitiés par déplacement.

11. Angle droit et droites perpendiculaires

DÉFINITION : La moitié d'un angle plat s'appelle un *angle droit.*

Deux angles plats étant égaux, leurs moitiés sont égaux, c'est-à-dire *deux angles droits sont égaux.*

Soit un angle plat $\widehat{AOA'}$ et sa bissectrice $\overset{\bullet}{\overline{OB}}$. Le prolongement $\overset{\bullet}{\overline{OB'}} = -\overset{\bullet}{\overline{OB}}$ de cette bissectrice est la bissectrice du deuxième angle plat ayant les mêmes côtés.

Les deux droites AA' et BB' concourantes en O forment donc quatre angles droits. Il faut et il suffit que l'un des quatre angles formés par deux droites concourantes soit droit pour que les trois autres le soient aussi.

DÉFINITION : *Deux droites* qui se coupent en formant un angle droit sont dites *perpendiculaires* l'une à l'autre.

PROBLÈME FONDAMENTAL : *Mener par un point donné une droite perpendiculaire à une droite donnée.*

Ce problème vient d'être résolu dans le cas où le point se trouve sur la droite. La bissectrice d'un angle étant unique, il n'y a qu'une solution.

Considérons maintenant le point donné M non situé sur la droite donnée AB. Soit M' le symétrique de M par rapport à la droite AB. Le segment MM' ayant ses extrémités de part et d'autre de la droite AB coupe cette droite en un point O. Les deux angles plats $\widehat{MOM'}$ admettent chacun la droite AB pour axe de symétrie, donc MM' est perpendiculaire à AB. Soit I un point de la droite AB, on a toujours pour raison de symétrie $\widehat{MIA} = \widehat{M'IA}$; ces moitiés de l'angle $\widehat{MIM'}$ sont droits uniquement dans le cas où l'angle MIM' est plat, c'est-à-dire dans le cas où I se trouve en O. Donc la solution est encore unique. D'où :

THÉORÈME : *Par un point il passe une perpendiculaire, et une seule, à une droite donnée.*

D'où, par l'absurde :

THÉORÈME : *Deux perpendiculaires à une même droite n'ont pas de point commun.*

DÉFINITION : La perpendiculaire élevée au milieu d'un segment s'appelle la *médiatrice* de ce segment.

12. Angles opposés par le sommet. Symétrie par rapport à un point

DÉFINITION : *Deux angles* sont dit *opposés par le sommet,* si les éléments génériques (en particulier les côtés) de l'un de ces angles sont les prolongements des éléments génériques de l'autre angle.

L'axe de symétrie des côtés d'un angle est aussi l'axe de symétrie des prolongements des côtés de cet angle. D'où :

THÉORÈME : *Deux angles opposés par le sommet admettent le même axe de symétrie.* D'où : *Les bissectrices de ces deux angles sont en prolongement l'une de l'autre.*

Considérons maintenant deux droites concourantes AA' et BB', se coupant au point O. Précisons : $\overset{\bullet}{\overline{OA}} = -\overset{\bullet}{\overline{OA'}}$ et $\overset{\bullet}{\overline{OB}} = -\overset{\bullet}{\overline{OB'}}$.

Il y a deux couples d'angles opposés par le sommet :

1) $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ avec XX' comme axe de symétrie pour chacun des deux angles.

2) $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$ avec YY' comme axe de symétrie pour chacun de ces deux angles.

XX' et YY' sont les axes de symétrie pour l'ensemble des deux droites AA' et BB'.

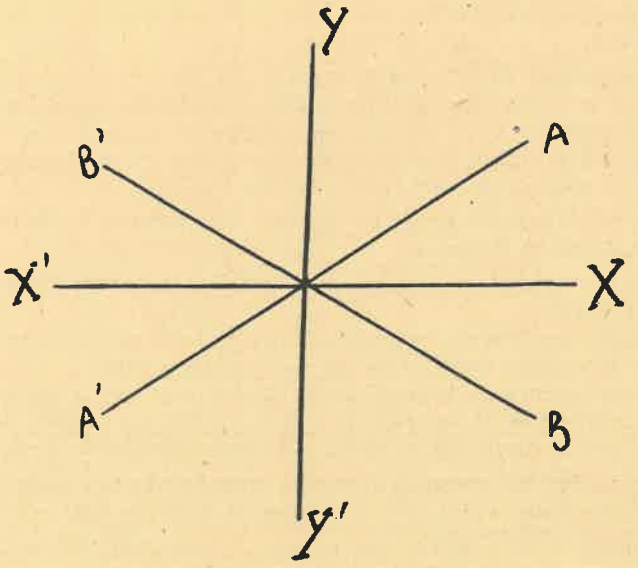


FIG. 1

La symétrie par rapport à YY' échange d'une part $\overset{\bullet}{OA}$ et $\overset{\bullet}{OB'}$ et d'autre part $\overset{\bullet}{OB}$ et $\overset{\bullet}{OA'}$, donc cette symétrie échange les deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{B'OA'}$. D'où :

THÉORÈME : *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

Cette symétrie par rapport à la droite YY' échange aussi les bissectrices de ces deux angles opposés par le sommet. D'où : $\widehat{XOY} = \widehat{X'OY}$, ce sont les deux moitiés de l'angle plat $\widehat{XOX'}$. On en conclut :

THÉORÈME : *Les deux axes de symétrie de l'ensemble de deux droites concourantes sont perpendiculaires.*

Considérons le produit des symétries par rapport à ces deux axes :

$$\text{Sym}\,(XX').\text{Sym}\,(YY') =$$

$$\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OX}, \overset{\bullet}{OX}).\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OY}, \overset{\bullet}{OY}) =$$

$$\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OB}).\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OB}, \overset{\bullet}{OA'}) = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA'}).$$

Si l'on remarque que nous pouvons constituer la figure étudiée, en partant des droites perpendiculaires XX' et YY' se coupant au point O, et que nous pouvons choisir la demi-droite $\overset{\bullet}{OA}$ arbitrairement, nous pouvons conclure :

THÉORÈME : *Il existe un déplacement qui admet un point* O *comme point double et qui transforme chaque demi-droite d'origine* O *dans la demi-droite opposée.*

Ce déplacement positif dans le plan s'appelle la symétrie par rapport au point O, le point O est le *centre de symétrie.*

NOTATION dans le plan :

$$\text{Sym}\,(O) = \text{Dépl}_{(+)}\,(\overset{\bullet}{O}\overrightarrow{A}, -\overset{\bullet}{O}\overrightarrow{A}).$$

Autre conclusion *dans le plan :*

THÉORÈME : *Le produit de deux symétries par rapport à deux axes perpendiculaires est égal à la symétrie par rapport au point d'intersection de ces deux axes.*

13. Translation sur la droite

DÉFINITION d'un *vecteur.* Un vecteur est un segment orienté, ses deux extrémités s'appellent d'une façon distinctive : *origine* et *extrémité ;* l'origine précède l'extrémité.

NOTATION : $\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur d'origine A et d'extrémité B.

DÉFINITION : Si deux vecteurs AB et CD sont directement égaux sur la droite, nous disons encore que ces vecteurs sont *équipollents* (sur la droite) et nous écrivons : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont inversement égaux sur la droite, nous disons qu'ils sont *opposés* (sur la droite), ce que nous notons : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$.

Remarquons encore que l'ensemble des vecteurs équipollents à un vecteur donné, sur une droite, forme une classe d'équivalence, cette classe définit un *vecteur glissant.*

Considérons *sur la droite la translation* T (c'est-à-dire un déplacement positif) transformant deux points A et B respectivement en A' et B'. Par *définition :*

$$T = \text{Dépl}_{(+)}\,(A, A') = \text{Dépl}_{(+)}\,(B, B'),$$

$\overrightarrow{AB}$ se transforme par T en $\overrightarrow{A'B'}$, d'où

THÉORÈME : *Une translation sur la droite transforme tout vecteur en un vecteur équipollent.*

De l'équipollence $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, on déduit : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{B'A'}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{B'A'}$ sont inversement égaux, donc ces deux derniers vecteurs sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point O, milieu de chacun des segments AB' et BA'. Cette symétrie échange les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{B'B}$, donc $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{B'B}$, d'où : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Nous énonçons :

THÉORÈME : *Sur une droite deux vecteurs ayant des origines quelconques et respectivement pour extrémités les transformés par translation de leurs origines, sont équipollents.*

Réciproquement on démontre de la même façon que si $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ on a aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Donc *la translation* T *peut aussi être définie par le vecteur glissant* $\vec{T} = \overrightarrow{AA'}$, A et A' étant deux points correspondants dans la translation. Nous écrivons encore :

$$T = \text{Transl}\,(\vec{T}) = \text{Transl}\,(\overrightarrow{AA'}).$$

Soit M le milieu du segment $\overrightarrow{AA'}$. On a la relation :

$$\text{Dépl}_{(+)}\,(A, A') = \text{Dépl}_{(-)}\,(A, A).\text{Dépl}_{(-)}\,(A, A')$$

ou avec d'autres notations :

$$\text{Transl}\,(\overrightarrow{AA'}) = \text{Sym}\,(A).\text{Sym}\,(M).$$

Ce qui s'énonce :

THÉORÈME : *Une translation sur la droite peut toujours être interprétée comme le produit de deux symétries par rapport à des points ; l'un des centres de symétrie peut être choisi arbitrairement sur la droite.*

14. Translation dans le plan

DÉFINITION : *Une translation dans un plan est un déplacement positif dont la restriction à une droite, appelée glissière, est une translation sur cette droite.*

Considérons deux points A et B de la glissière et leurs transformés A′ et B′ par la translation T. Nous notons :

1) sur la glissière : $T = \text{Dépl}_{(+)}(A, A') = \text{Dépl}_{(+)}(B, B')$;

2) dans le plan : $T = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{\overline{AB}}, \overset{\bullet}{\overline{A'B'}}) = \text{Dépl}_{(+)}\overset{\bullet}{\overline{AA'}}, -\overset{\bullet}{\overline{A'A}})$. Dans les deux cas nous écrivons encore : $T = \text{Transl}(\vec{T})$, où le *vecteur translation* $\vec{T}$ est un vecteur glissant défini par l'équipollence : $\vec{T} = \overrightarrow{AA'}$.

REMARQUE : Dans la définition intervient une seule droite appelée glissière, c'est seulement en géométrie euclidienne que la glissière n'est pas unique.

Considérons toujours la même translation T ; soit M le milieu du segment AA′ et désignons par A*a* et M*m* les perpendiculaires élevées en A et M à la glissière.

Dans le plan comme sur la droite on a : $T = \text{Sym}(A).\text{Sym}(M)$.

En effet, ce produit est positif et sa restriction à la droite AA′ est la translation T.

Dans le plan nous avons encore : $T = \text{Sym}(Aa).\text{Sym}(Mm)$.

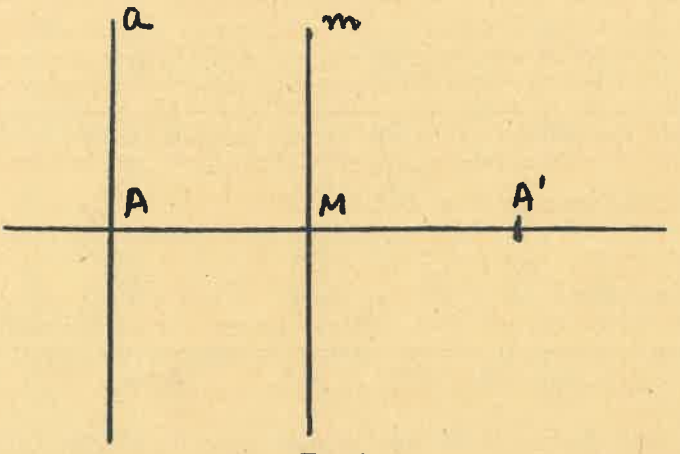


FIG. 2

Il suffit encore de vérifier le signe du déplacement et sa restriction à la droite AA′. D'où :

THÉORÈME : *Une translation dans le plan peut toujours s'interpréter :*

1) *comme produit de deux symétries par rapport à deux points de la glissière, l'un des points pouvant être choisi arbitrairement ;*

2) *comme produit de deux symétries par rapport à deux droites perpendiculaires à la glissière.*

15. Rotation dans le plan

L'angle nu orienté de côté origine $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ et de côté extrémité $\overset{\bullet}{\overline{OB}}$, s'écrit dans ce paragraphe : $(\widehat{OA, OB})$.

Pour exprimer l'égalité directe et l'égalité inverse nous utilisons des notations correspondant aux vecteurs.

DÉFINITION : Une *rotation dans le plan* est un déplacement positif, admettant un point double, appelé *centre de rotation.*

Considérons la rotation R de centre O, transformant les demi-droites $\overset{\bullet}{OA}$ et $\overset{\bullet}{OB}$ respectivement en $\overset{\bullet}{OA'}$ et $\overset{\bullet}{OB'}$. Alors :

$$R = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA'}) = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{OB}, \overset{\bullet}{OB'}).$$

Donc nous avons l'égalité directe $(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{OA', OB'})$ et par suite aussi la relation : $(\widehat{OA, OB}) = -(\widehat{OB', OA'})$ exprimant une égalité inverse, réalisée dans la symétrie par rapport à l'axe de symétrie de l'angle $\widehat{AOB'}$. Par cette symétrie il y a échange entre $\overset{\bullet}{OA}$ et $\overset{\bullet}{OB'}$ et aussi entre $\overset{\bullet}{OB}$ et $\overset{\bullet}{OA'}$; d'où :

$$(\widehat{OA, OA'}) = -(\widehat{OB', OB}),$$

et par suite : $(\widehat{OA, OA'}) = (\widehat{OB, OB'})$.

La classe des angles, directement égaux à l'un de ces angles, s'appelle l'*angle de rotation* α,

$$\alpha = (\widehat{OA, OA'}) = (\widehat{OB, OB'}).$$

THÉORÈME : *Les angles orientés, ayant pour côté origine une demi-droite quelconque issue du centre de rotation et pour côté extrémité son homologue dans la rotation* R, *sont deux à deux égaux.*

Nous notons la rotation de centre O et d'angle de rotation α : $R = \text{Rot}(O, \alpha)$.

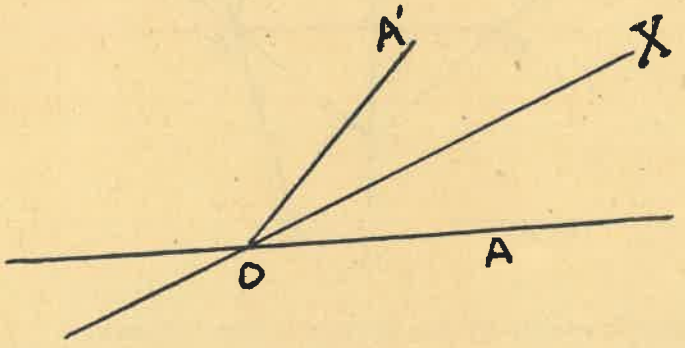


FIG. 3

Nous mettons encore en évidence une propriété analogue à une propriété des translations sur une droite :

$$\text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA'}) = \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA}) \cdot \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA'}),$$

ce qui s'écrit avec d'autres notations :

$$R = \text{Sym}(OA) \cdot \text{Sym}(OX)$$

où OX est l'axe de symétrie de l'angle $\widehat{AOA'}$. Nous énonçons :

THÉORÈME : *Une rotation dans un plan peut toujours s'interpréter comme le produit de deux symétries par rapport à deux axes passant par le centre de rotation, l'un de ces axes pouvant être choisi arbitrairement.*

REMARQUE : Dans le plan, une symétrie par rapport à un point est un cas particulier d'une rotation, l'angle de rotation étant un angle plat.

16. Le problème fondamental de la géométrie métrique dans le plan

Il s'agit d'étudier le déplacement le plus général dans le plan, en distinguant deux cas, suivant le signe de ce déplacement.

I. Le déplacement positif le plus général

Ce déplacement transforme une demi-droite $\overset{\bullet}{OA}$ dans une demi-droite quelconque $\overset{\bullet}{O'A'}$ du plan, il s'écrit : Dépl $_{(+)}$ $(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{O'A'})$.

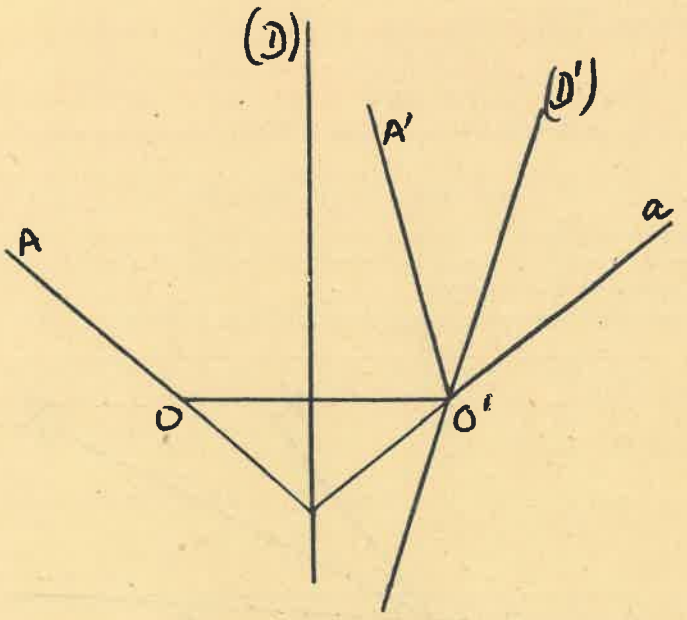


Fig. 4

Considérons le produit des deux symétries axiales suivantes :

1° La symétrie par rapport à la médiatrice (D) du segment OO' ; elle transforme $\overset{\bullet}{OA}$ en $\overset{\bullet}{O'a}$.

2° La symétrie par rapport à l'axe de symétrie (D') de l'angle $\widehat{aO'A'}$; elle transforme $\overset{\bullet}{O'a}$ en $\overset{\bullet}{O'A'}$.

Ce produit est positif et transforme $\overset{\bullet}{OA}$ en $\overset{\bullet}{O'A'}$.

Théorème : *Le déplacement positif le plus général dans le plan peut toujours s'interpréter comme le produit de deux symétries par rapport à des droites.*

Si ces deux droites se coupent, le déplacement est une rotation.

Si ces deux droites admettent une perpendiculaire commune, le déplacement est une translation.

Il se pose encore le problème de savoir si, dans le plan, il peut y avoir deux droites qui ne se coupent pas et qui n'ont pas de perpendiculaire commune. Ce problème peut être résolu seulement après l'introduction d'un axiome sur les parallèles. Suivant

le choix de ce nouvel axiome nous serons amenés à distinguer la géométrie euclidienne et la géométrie de Lobatchevsky et Bolyaï.

Bien entendu, tout ce que nous avons étudié jusqu'ici, basé sur notre système de onze axiomes, est commun aux deux géométries.

II. Le déplacement négatif le plus général

Soit le déplacement : Dépl $_{(-)}$ $(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}})$.

Considérons le produit d'une symétrie par rapport à un point et d'une symétrie par rapport à une droite.

1° La symétrie par rapport au milieu M du segment de droite OO′ transforme $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ en $\overset{\bullet}{\overline{O'a'}}$.

2° La symétrie par rapport à l'axe de symétrie (D) de l'angle $\widehat{a'O'A'}$ transforme $\overset{\bullet}{\overline{O'a'}}$ en $\overset{\bullet}{\overline{O'A'}}$.

Finalement, nous constatons que ce produit est négatif et transforme $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ en $\overset{\bullet}{\overline{O'A'}}$.

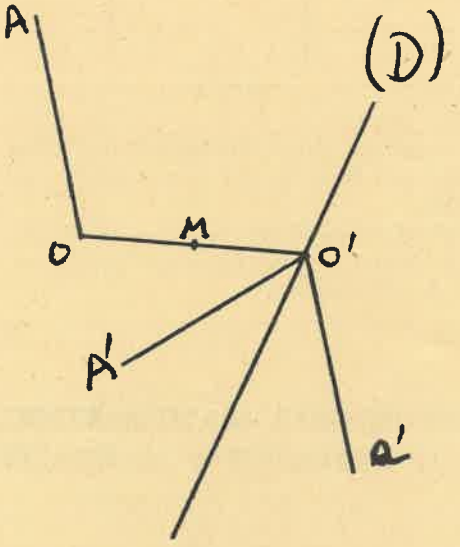


Fig. 5

Théorème : *Le déplacement négatif le plus général dans le plan peut toujours s'interpréter comme le produit d'une symétrie par rapport à un point et d'une symétrie par rapport à une droite.*

Donnons encore une autre interprétation à ce déplacement que nous pouvons écrire maintenant avec d'autres notations :

$$\text{Sym}\,(O)\,.\,\text{Sym}\,(D),$$

où O désigne un point et (D) une droite.

Désignons par (Δ) la perpendiculaire passant par O à (D), et par (D′) la perpendiculaire par O à (Δ). On a :

$\mathrm{Sym}(O) = \mathrm{Sym}(\Delta).\mathrm{Sym}(D')$, d'où :

$\mathrm{Sym}(O).\mathrm{Sym}(D) = \mathrm{Sym}(\Delta).\mathrm{Sym}(D').\mathrm{Sym}(D)$ (produit associatif),

$= \mathrm{Sym}(\Delta).\mathrm{Transl}(\overrightarrow{OO'})$,

où O′ est le symétrique du point O par rapport à (D).

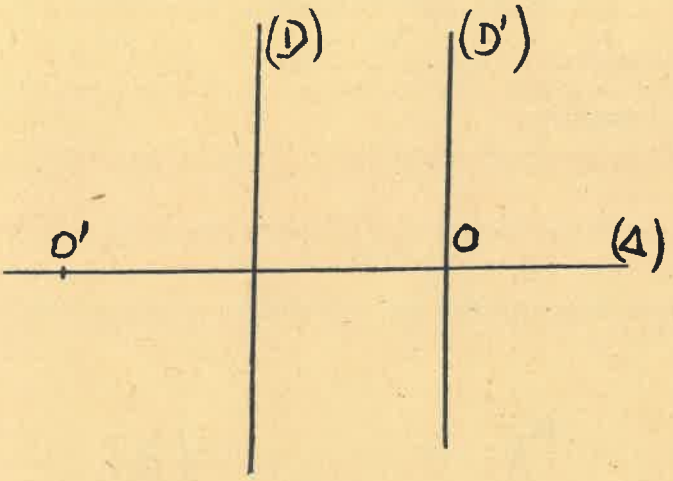


FIG. 6

Ce produit est commutatif, car le changement de l'ordre des deux transformations ne change pas le signe du produit ni sa restriction à la droite (Δ), droite double de la transformation.

THÉORÈME : *Le déplacement négatif dans le plan, le plus général, peut toujours s'interpréter comme le produit commutatif d'une translation et d'une symétrie par rapport à la glissière de cette translation.*

R. N.