VI. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS

Rapport sur la composition de Mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées, Collèges et Écoles normales en 1957 (1)

Les données sont deux *gerbes* de trois droites (Σ) et (Σ') « *supplémentaires* » de même sommet S [les *rayons* SA', SB', SC' sont respectivement perpendiculaires aux plans (SB, SC), (SC, SA), (SA, SB)]. Les précisions de l'énoncé nous apprennent que les rayons SA, SB, SC de (Σ) sont des droites distinctes ; qu'il en est de même pour les rayons SA', SB', SC' de (Σ'), et que dans (Σ) un seul couple de deux rayons *au plus* est formé de droites rectangulaires. La réciprocité des gerbes (Σ) et (Σ') est classique et elles jouent des rôles en tout analogues, ce qui sera constamment à retenir.

Le début de la partie I, pour guider les concurrents et assurer une vision de cette figure de l'espace, fait réaliser une figure plane a, b, c, a', b', c' formée dans un plan quelconque (Λ) [ne passant pas par S] par les traces respectives des rayons SA, SB, SC, SA', SB', SC'. Cette considération exclut le cas où (Λ) serait parallèle à un rayon de (Σ) ou (Σ').

Cette vision de la figure est constructive, en imaginant le triangle *abc* comme donné dans (Λ) et S comme défini par sa projection H sur (Λ) et sa cote égale à HS. Soient p, q, r les projections de H sur les droites respectives bc, ca, ab ; la perpendiculaire SA' au plan BSC est distincte de SH [sinon (Λ) serait parallèle à SB' et SC'] ; le plan de SA' et de SH est perpendiculaire à la droite bc en p, donc a' est situé sur la droite Hp. De plus, Sa' et Sp sont deux côtés d'un triangle pSa' rectangle en S, dont SH est la hauteur : la relation nécessaire $\overline{Hp}.\overline{Ha'} = -HS^2$ suffit à fixer la position de a' sur la droite Hp ; Ha' doit être non nul. Ainsi H *n'est pas situé sur un côté du triangle abc et les sommets a', b', c' du triangle a'b'c' sont respectivement les inverses des points p, q, r dans l'inversion de pôle* H *et de puissance* $-HS^2$.

Ici les propriétés de l'inversion corroborent les résultats évidents d'après la dualité classique des trièdres (plus exactement des gerbes) « *supplémentaires* » (Σ) et (Σ') : car, par exemple, la droite bc est l'inverse du cercle Hqr et a est diamétralement opposé à H sur ce cercle. Il s'ensuit que l'inverse de a est le pied p' de la perpendiculaire Hp' menée de H sur $b'c'$, etc... ; les sommets a, b, c du triangle abc sont les inverses des projections respectives p', q', r' de H sur les côtés $b'c', c'a', a'b'$ du triangle $a'b'c'$. La figure plane, étudiée dans (Λ), comme il était prévu, est bien *dualistique*.

L'énoncé du problème dénomme plans *équitransverses* (P) par rapport à (Σ) et (Σ') ceux qui, passant par S, ont les propriétés suivantes : Sα, Sβ, Sγ, Sα', Sβ', Sγ' désignant les droites indéfinies d'intersection d'un tel plan P avec les plans respectifs BSC, CSA, ASB, B'SC', C'SA', A'SB', les couples de droites (Sα, Sα'), (Sβ, Sβ'), (Sγ, Sγ') ont tous *trois* les mêmes bissectrices.

---

(1) Le Jury était composé de MM. ROBERT, inspecteur général, *président* ; CHATEAU, professeur (Centrale) au Lycée Charlemagne ; EUVRARD, professeur (Spéciales) au Lycée Hoche ; GUAYDIER, professeur (Centrale) à l'annexe Stanislas du Lycée Saint-Louis ; MARTIN, professeur (Mathématiques Supérieures) au Lycée Janson-de-Sailly ; Mme OKAL, professeur (N.S.E.) au Lycée Fénelon.

Voir l'énoncé du problème, *Bulletin* 186, page 462.

On constate l'existence de tels plans, à vrai dire très particuliers :

Considérons, par exemple, B'SC' : pour ce plan Sβ' et Sγ' ne sont autres que SC' et SB' ; Sβ et Sγ sont les perpendiculaires menées par S à SB' et SC' respectivement. Une bissectrice SX (ou SY) du couple (Sβ, Sβ') est axe de symétrie pour le couple des perpendiculaires à Sβ et Sβ' dans ce plan, qui sont SB' et Sγ, et forment le couple (Sγ', Sγ). SX et SY sont *les bissectrices des bissectrices* de S B' et SC'.

Sα', intersection de B'SC' avec lui-même, est indéterminée ; précisons sa position par la convention qu'elle soit symétrique de Sα (intersection de SBC et SB'C') par rapport à SX, ou ce qui revient au même, à SY. Cette convention permet de regarder le plan B'SC', ou, en généralisant, *tout plan de face d'un des trièdres* SABC *ou* SA'B'C', *comme équitransverse par rapport à* (Σ) *et* (Σ').

Cherchons encore un plan équitransverse passant par une droite de (Σ) ou (Σ'), pour fixer les idées, par SA, et supposons-le autre que BSA et CSA : Sγ et Sβ sont nécessairement confondues avec SA, l'angle (Sγ, Sβ) = o (mod. π). Il est nécessaire que (Sγ', Sβ') = o (mod. π), soit que Sγ' et Sβ' soient confondues ; les plans B'SA' et C'SA' n'ont en commun que SA' ; Sγ' et Sβ' doivent coïncider avec SA' et le plan cherché ne peut être que le plan (bien déterminé) ASA'.

On vérifie que ASA' est bien équitransverse, en remarquant que, pour ce plan, Sα et Sα' sont respectivement perpendiculaires à Sγ' et Sγ, qui sont les mêmes droites que Sβ et Sβ'. *Les plans* ASA', BSB', CSB' *sont donc des plans équitransverses,* ce qui porte à *neuf* les plans (P) connus *a priori.*

Comme ce sont les seuls pouvant contenir une droite de (Σ) ou de (Σ'), on pourra ultérieurement ne rechercher que des plans (P) ne contenant aucune de ces six droites. On remarque que par toute droite de (Σ) ou (Σ') passent *trois* plans équitransverses et *trois* seulement.

La partie 3° de I suppose l'existence d'un plan (P) tel que les couples de droites (Sα, Sα') et (Sβ, Sβ') aient les mêmes bissectrices. Cette hypothèse équivaut à l'égalité angulaire.

$$(S\alpha, S\beta) = -(S\alpha', S\beta') \text{ (mod. } \pi) \text{ dans le plan (P) orienté.}$$

Soit (Π) un plan parallèle à (P), au sens strict ; on peut le considérer comme le plan (Λ) du début de 1°, et il est visible que *bc, ca, b'c', c'a'* sont respectivement parallèles à Sα, Sβ, Sα', Sβ'. L'hypothèse équivaut ainsi à

$$(bc, ca) = -(b'c', c'a') \text{ (mod. } \pi) \text{ dans le plan (Π) orienté.}$$

Or, *b'c'* et *c'a'* sont respectivement perpendiculaires à H*a* et H*b* ; l'hypothèse devient $(bc, ca) = (Hb, Ha)$ (mod. π). Ainsi, H est sur le cercle *abc* et le plan (Π) *est un plan* (Λ) *tel que le point* H *soit sur le cercle circonscrit au triangle abc.*

Cet énoncé n'était pas dans le texte, car on désirait le faire découvrir : cette disposition du problème est à l'origine de son insuccès très général. Cela souligne la *timidité de nos élèves de la classe de Mathématiques à interpréter et à qualifier les résultats auxquels ils sont conduits lorsqu'on ne les délivre pas systématiquement d'un tel effort.*

Ajoutons que le signe — de l'égalité d'angles de droites

$$(bc, ca) = -(Ha, Hb) \text{ (mod. } \pi)$$

a été négligé ou interprété à tort dans un très grand nombre de copies où on a cru reconnaître en H l'orthocentre du triangle *abc,* parce que souvent il est désigné par cette lettre dans les problèmes, sans nul doute. Là, comme ailleurs, il est fâcheux de croire que « l'habit fait le moine ».

Réciproquement, si H est sur le cercle *abc,* les couples (Sα, Sα') et (Sβ, Sβ') sont isogonaux ; mais comme les trois côtés du triangle *abc* jouent mêmes rôles, il en est de même pour le couple (Sγ, Sγ'), et il *suffit* donc, pour qu'un plan passant par S soit équitransverse, que deux des trois couples (Sα, Sα'), (Sβ, Sβ'), (Sγ, Sγ') aient mêmes bissectrices. Cet énoncé était indiqué par le texte.

La figure constituée par H, *a, b, c, a', b', c'* dans le plan (Π) est intéressante et

devait être réalisée. A signaler que H est distinct de a, b, c, d'après les restrictions opérées [si H était en a, le plan (Π) serait perpendiculaire à Sa et (P) ne serait autre que $b'Sc'$, ce qui est exclu dorénavant].

Les points p, q, r sont en ligne droite (droite de Simson de H par rapport au triangle abc) ; d'ailleurs la dualité entre (Σ) et (Σ') entraîne l'équivalence

H sur cercle $abc \rightleftarrows$ plan P équitransverse $\rightleftarrows$ H sur cercle $a'b'c'$.

Le fait que H est sur le cercle $a'b'c'$, en opérant l'inversion qui échange a' et p, b' et q, c' et r apprend que p, q, r sont alignés.

Les points p', q', r' sont aussi alignés et la droite de Simson de H, par rapport au triangle $a'b'c'$, est l'inverse du cercle abc dans l'inversion considérée.

L'égalité $(bc, ca) = -(Ha, Hb)$ (mod. π) a sa correspondante

$(b'c', c'a') = -(Ha', Hb')$ (mod. π), ce qui s'inventorie comme suit :

$(bc, ca) = -(b'c', c'a')$ (mod. π)		$(Ha, Hb) = -(Ha', Hb')$ (mod. π)	
$(ca, ab) = -(c'a', a'b')$	»	$(Hb, Hc) = -(Hb', Hc')$	»
$(ab. bc) = -(a'b', b'c')$	»	$(Hc\ Ha) = -(Hc', Ha')$	»

On pressent ainsi que la figure formée par les droites bc, ca, ab, Ha, Hb, Hc est est *semblable* (*indirectement*) à la figure formée par les *droites* correspondantes respectives $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$, Ha', Hb', Hc'. L'énoncé guidait à cet endroit les élèves pour qu'ils ne se bornent pas à leur intuition et précisent une opération ponctuelle (Ω) transformant la première figure en la seconde.

On peut considérer, avec l'énoncé, l'homothétie positive de centre H et de rapport $\frac{Ha'}{Ha}$, et la symétrie [dans le plan (Π)] par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{aHa'}$. Soit (Ω) le produit de ces opérations, d'ailleurs permutables ; (Ω) transforme dans (Π) toute droite en une droite et, à cause de la symétrie, (Ω) change le sens, sinon la grandeur, des angles de droites.

(Ω) transforme l'angle (Ha, Hb) en un angle de mesure opposée (mod. π) et comme Ha est transformé en Ha', Hb est transformé en Hb'. De même (Ω) transforme la droite Hc en la droite Hc'.

Puisque (Ω) change le *point* a en le point a', la droite ab orthogonale à Hc est changée en la droite $a'b'$ orthogonale à Hc' ; comme le point b est l'intersection des droites ab et Hb, son transformé par (Ω) est le point b' d'intersection des droites $a'b'$ et Hb'. En résumé (Ω) transforme a en a', b en b', c en c' et a H comme point double : c'est une *similitude indirecte* du plan (Π).

Insistons sur le fait que ces raisonnements ne mettent en jeu que les relations signalées plus haut, et *valables à π près*, d'angles de droites. Il n'eût pas été aussi simple de vouloir considérer d'emblée des angles d'axes, car une congruence exacte (mod. π) ne l'est pas forcément (mod. 2π). C'est finalement l'existence de l'opération (Ω) de similitude indirecte qui assure à 2π près les égalités indiquées plus haut et que nous ne récrirons pas.

Des faits de ce genre se rencontrent souvent, aussi bien d'ailleurs pour des similitudes directes. Nous estimons que l'importance des angles de droites dans ces matières a été reconnue en premier lieu par Mlle Félix, dans un article excellent de l'*Enseignement Scientifique*, tome I, page 184.

Droites équinormales. — On appelle ainsi les perpendiculaires issues de S aux plans équitransverses [sous-entendu : pour (Σ) et (Σ')].

Il semble que les concurrents aient vu sans peine les cas particuliers de ces droites qui résultent eux-mêmes des cas particuliers de plans équitransverses : ce sont les droites Sa, Sb, Sc, Sa', Sb', Sc' et aussi les droites perpendiculaires aux plans, tels que aSa' ; mais on peut observer à ce sujet que la droite perpendiculaire à aSa' est l'intersection des plans de face bSc, $b'Sc'$.

Mais il n'a guère été compris que les propriétés des équinormales n'exigeaient guère de recherche nouvelle et se lisaient, si l'on voulait, sur la figure d'étude de la

configuration (H, *a*, *b*, *c*, *a'*, *b'*, *c'*). La droite SH est une droite équinormale et inversement toute droite S*n* équinormale peut être identifiée avec une SH, les systèmes (Σ) et (Σ') étant coupés par un plan (Π) perpendiculaire à S*n*.

Les trois couples de plans (A'SH, ASH), (B'SH, BSH), (C'SH, CSH) apparaissent comme ayant leurs plans bissecteurs communs. Les tracés de ces plans sur (Π) sont les bissectrices intérieures ou extérieures des angles $\widehat{a'Ha}$, $\widehat{b'Hb}$, $\widehat{c'Hc}$, dont on a vu que les bissectrices intérieures sont confondues.

Mais ceux qui pouvaient se libérer des figures et réaliser qu'à toute propriété d'un système de plans et de droites passant par S correspond, *mutatis mutandis*, une propriété d'un système correspondant de droites et de plans *perpendiculaires* devaient prévoir la propriété précédente :

En effet, dans cette *corrélation par éléments perpendiculaires*, au plan (P) passant par S correspond sa normale S*n* en S ; aux intersections Sα, Sα' de (P) avec les plans BSC, B'SC' correspondent, en tant que plans normaux, les plans S*n*A', S*n*A ; et si les symétries par rapport à SX ou SY (bissectrices de Sα, Sα') font se correspondre Sβ, Sβ', Sγ, Sγ' les symétries par rapport aux plans S*n*Y, S*n*X font se correspondre les plans S*n*B', S*n*B et S*n*C', S*n*C, de même que S*n*A', S*n*A.

Il y a même équivalence entre la propriété des droites (Sα, Sα') (Sβ, Sβ') (Sγ, Sγ') et la propriété des plans (S*n*A', S*n*A), (S*n*B', S*n*B), (S*n*C', S*n*C).

Il faut avouer que cette méthode de transformation des propriétés de figures n'est pas encore familière aux élèves de la classe de Mathématiques et que le passage de la « Géométrie figurative » à la Géométrie *non figurative* pose un problème pédagogique délicat.

Examinons donc, de préférence, la configuration SH*abca'b'c'* : le cercle ABC passe par H, appelons G le point diamétralement opposé à H sur ce cercle. La droite G*a* est orthogonale à H*a*, et aussi à SH, donc au plan SH*a* ou SHA. Si l'on fait tourner d'un dièdre droit autour de SA le plan ASH, on obtient donc le plan SG*a*, qui est aussi le plan SGA. De ceci résulte la propriété nécessaire de toute droite équinormale S*n* : si l'on fait tourner d'un dièdre droit chacun des trois plans AS*n*, BS*n*, CS*n* autour des droites *respectives* SA, SB, SC, on obtient trois nouveaux plans ayant en commun une même droite Sn_1 [si la droite SH est baptisée S*n*, la droite Sn_1 désigne la droite SG].

Réciproquement, si une droite S*n* possède la propriété énoncée, en coupant (Σ) et (Σ') par un plan (Π) ne passant pas par S et perpendiculaire à S*n*, on reconnaît aisément par interprétation de l'hypothèse que les traces sur (Π) des droites SA, SB, SC, SA', SB', SC', S*n* et Sn_1 sont des points *a*, *b*, *c*, *a'*, *b'*, *c'*, H et G situés sur le cercle de diamètre HG. La propriété signalée est donc *caractéristique* des droites équinormales.

Sn_1 est donc, dès lors, aussi une équinormale, puisque S*n* et Sn_1 jouent des rôles symétriques dans la propriété.

On avait espéré que la fin de la partie I aurait été aperçue avec facilité par les concurrents et que le travail formel de démonstration de certaines réciproques aurait pu contribuer à les départager. Tout cela n'était qu'illusion, hélas ! Glissons donc sur les propriétés qui n'ont été aperçues par presque personne :

Les *équinormales*, telles que SH, ont la propriété d'avoir *leurs projections orthogonales* sur les plans des faces de (Σ) [ou aussi bien de (Σ')] *coplanaires* : en effet les droites S*p*, S*q*, S*r* sont les projections de SH sur les plans respectifs SBC, SCA, SAB, et elles sont dans le plan (U) défini par S et la droite de Simson *pqr* du point H par rapport au triangle ABC.

La réciproque de cette propriété est vraie et s'établit en invoquant le théorème classique de Simson ; pour que les projections d'un point sur les côtés d'un triangle soient alignées, il est nécessaire que le point soit sur le cercle circonscrit au triangle.

A toute équinormale S*n* correspondent deux plans (U) et (U') contenant respectivement ses projections sur les plans des faces de (Σ) et de (Σ').

La perpendiculaire en S au plan (U), d'après des considérations utilisées au début de (I) coupe le plan (II) en un certain point, lequel est inverse dans l'inversion de pôle H et de puissance $-SH^2$, du pied J de la perpendiculaire menée de S (ou de H) sur *pqr*.

Or cette inversion transforme la droite *pqr* en le cercle H*a'b'c'* et transforme J dans le point G' diamétralement opposé à H sur ce cercle. On voit que le *plan* (U) *est perpendiculaire à* SG' ; et de même le plan (U') est perpendiculaire à SG.

Comme on a vu plus haut que SG et SG' sont des équinormales particulières, alors appelées Sn_1 et Sn'_1, les *plans* (U) *et* (U') *sont eux-mêmes des plans équitransverses.*

Ajoutons que, en dehors d'un cas particulier, qui se rattache à la fin du problème, les points n_1 et n'_1 sont distincts et les cercles H*abc*, H*a'b'c'*, distincts, se coupent en H et un autre point L : on voit aisément que (L*a*, L*a'*) ou (L*b*, L*b'*), ou (L*c*, L*c'*) ont les mêmes bissectrices qui sont LH et la droite $n_1n'_1$, laquelle passe par L et est orthogonale à LH. Il s'ensuit que le plan SHL est bissecteur pour les couples de plans (SLA, SLA'), (SLB, SLB'), (SLC, SLC'). *Ceci prouve que la droite* SL *est une équinormale.*

Ainsi, sur le cône de sommet S ayant pour base le cercle de diamètre HG, nous inventorions *six droites* qui sont des équinormales, savoir S*a*, S*b*, S*c*, SH, SG et SL ; une remarque analogue s'applique au cône ayant pour base le cercle de diamètre HG'.

On pressent déjà que si ces deux cônes se confondaient, SL serait une génératrice *indéterminée* d'un tel cône et que par suite le lieu des droites équinormales contiendrait ce cône, c'est-à-dire le résultat remarquable qui fera l'objet de la partie III.

Partie II. — Les résultats intéressants qui précèdent ne sont toutefois établis que *sous réserve de l'existence* d'un plan P équitransverse (et non exceptionnel). Dans cette nouvelle partie du problème, on recherche méthodiquement de tels plans et on établira cette existence.

La seule figure à faire concerne la section de (Σ) et (Σ') par un nouveau plan (R), ne passant pas par S et perpendiculaire à une des six droites SA, SB, SC, SA', SB', SC', *pour fixer les idées, à* SA. On emploie les mêmes notations que pour (II), puisque (R) peut être regardé comme une position *limite* de (II) : *a* est le pied de SA sur (R), *a'* trace de SA', est à distance finie (puisque SA et SA' ne sont pas supposées orthogonales). Mais *b'* et *c'* sont rejetés à l'infini.

bc, trace du plan SBC sur (R) est perpendiculaire à *aa'* [qui est projection orthogonale de SA sur (R)]. En général, *b* et *c* sont à distance finie. On pouvait prendre le plan (R) comme plan horizontal de projection et le plan de SA et SA' qui lui est perpendiculaire comme plan frontal de projection. Le plan SBC est alors de bout, *bc* est une droite de bout ; désignons par ω son intersection avec *aa'*, ω est à distance finie, et comme SB et SC ont des directions distinctes, un seul des points *b* ou *c* au plus peut être à l'infini. Pour fixer les idées on suppose *c* à distance finie.

Imaginons un plan (P) passant par S, coupant la droite *ac* en β et la droite *a'c'* en β', les droites Sβ et Sβ' sont les intersections avec (P) des plans SAC et SA'C'. L'intersection Sα de (P) avec BSC a pour trace sur (R) un point, que nous appelons de même α et qui est commun à *bc* et à la trace ββ' de (P) sur (R) : toutefois α pourra être rejeté à l'infini sur *bc*. Le point α', trace sur (R), de la droite Sα' d'intersection de (P) avec B'SC' est forcément à l'infini sur ββ'.

Pour que (P) soit équitransverse, d'après (I, 3°), il est nécessaire et suffisant que les droites (Sα, Sα') et (Sβ, Sβ') aient les mêmes bissectrices, ou soient *isogonales*. Dans le plan (P), ceci équivaut à dire que Sα et ββ' soient isogonales par rapport à Sβ et Sβ', c'est-à-dire que Sα soit la tangente en S au cercle circonscrit au triangle Sββ'. Cette condition équivaut, sous forme métrique, à la relation

$$\alpha S^2 = \overline{\alpha\beta}.\overline{\alpha\beta'}$$

quand, bien entendu, α est à distance finie.

En d'autres termes, les points β et β′ doivent être *inverses* par rapport à la sphère de centre α et de rayon αS.

Cette sphère coupe le plan S*aa′* (plan frontal de projection) suivant un cercle d'axe *bc*, de centre ω, et qui passe par S. Appelons (Γ) ce cercle fixe, et *f*, *f′* les points où il coupe le plan R : ces points sont sur la droite ω*aa′*.

Si β et β′ sont inverses par rapport à la sphère précédente, elle est le lieu des points dont le rapport des distances aux deux points β et β′ a une certaine valeur ; comme *f* et *f′* sont sur la sphère, il est nécessaire que

$$\frac{f\beta}{f\beta'} = \frac{f'\beta}{f'\beta'}$$

Inversement, si cette relation a lieu et que ββ′ coupe *bc* à distance finie (en α) on s'assure aisément qu'elle entraîne

$$\alpha S^2 = \overline{\alpha\beta}.\overline{\alpha\beta'}.$$

La condition nécessaire et suffisante visée prend une nouvelle forme par interversion des moyens et extrêmes de la proportion, soit

$$\frac{\beta f}{\beta f'} = \frac{\beta' f}{\beta' f'}$$

Considérons le lieu des points *m* du plan (R) tels que $\frac{mf}{mf'} = C^{te}$; un tel lieu est un *cercle du faisceau* (Φ) *de points limites f, f′*. [Ce cercle forme avec (Γ) un anneau orthogonal]. Pour que (P) soit équitransverse, on trouve qu'il faut prendre β et β′ sur les droites fixes respectives *ac* et *a′c′*, de manière que ces points appartiennent à un même cercle du faisceau (Φ).

On a laissé de côté le cas où ββ′ est parallèle à *bc* (α à l'infini). Pour ce cas Sα et Sα′ sont confondues suivant une parallèle à ω*c*, la condition d'isogonalité avec Sβ et Sβ′ exige visiblement que β et β′ soient symétriques par rapport au plan SAA′. Ce cas peut se présenter et β se détermine par l'intersection de *ac* avec la symétrique de *a′c′* par rapport à *aa′* ; on voit, ce qui nous importe surtout, qu'il passe bien par β et β′ un cercle du faisceau (Φ).

Il devient clair qu'on sait construire maintenant des droites ββ′ répondant à la condition trouvée et par suite des plans (P) équitransverses. *Ces droites ββ′ sont des sécantes communes aux cercles du faisceau* (Φ) *et à l'ensemble des droites fixes ac, a′c′.*

Si l'on choisit β, il lui correspond deux points β′ à condition que β soit convenablement pris sur *ac*. Sans entrer dans une discussion algébrique précise qui n'était pas demandée, il est certain que les cercles du faisceau (Φ) qui sont de rayon suffisamment grand coupent réellement les deux droites fixes *ac, a′c′*, simultanément.

Par β peuvent passer zéro ou deux droites ββ′ ; en d'autres termes, par une droite Sβ prise dans le plan ASC [ou plus généralement par une droite donnée située dans un plan de faces de (Σ) ou (Σ′)], passent *un* ou *trois* plans (P) équitransverses ; car il ne faut pas oublier que ce plan de face est lui-même équitransverse.

Remarque. — La courbe enveloppe de ββ′ dans le plan (R) est la cayleyenne du réseau ponctuel de coniques contenant le faisceau de cercles (Φ) et la conique dégénérée, système de droites (*ac*, *a′c′*). Cette enveloppe est de classe trois.

Le lecteur nous excusera sans doute de laisser de côté l'analyse de la partie III du problème, bien que ses préliminaires, plutôt faciles, aient été abordés dans certaines copies. Ils visaient à établir l'existence d'un cas particulier de gerbes (Σ) et (Σ′) symétriques l'une de l'autre par rapport à un axe et aussi par rapport à un plan. Mais personne n'a montré que dans ce cas particulier, où il y a décomposition de la famille des plans (P) en deux sous-familles, ces sous-familles avaient en commun deux plans jouant un rôle particulier. Cet insuccès partiel provient du manque de temps et de la longueur du problème ; il était prévu.

Par contre, si nous le réduisons aux parties I et II, comme il a fallu s'y résoudre pour l'appréciation chiffrée des copies, nous estimions que ce problème ne présentait pas, avec l'aide donnée par le texte, plus de difficultés que ceux qui sont donnés, les autres années, à ce Concours Général.

L'examen des copies, qui n'ont pas été d'ailleurs plus nombreuses qu'à l'ordinaire, n'a pas confirmé ces vues optimistes. Donc, insuccès général du problème, et surprise complète du Jury.

Après coup, ce phénomène semble provenir du caractère amalgamé du sujet, dont la partie I nous était connue depuis de longues années, contemporaines de la naissance des concurrents de 1957. De ce fait, elle n'a pas eu à subir ces tâtonnements d'adaptation de textes qui accompagnent à l'ordinaire l'élaboration d'un sujet nouveau : on avait peut-être oublié des *difficultés de prise de contact avec le problème*.

En les voyant revivre dans les efforts des élèves, il nous a semblé qu'elles sont plus encore psychologiques que techniques : on ne se passionne guère pour les trièdres, ces locataires vagabonds des programmes (n'était-il pas question, au début d'octobre 1956, de les exclure de la classe de Mathématiques) ?

Au fond, les difficultés de la théorie des trièdres ne se retrouvaient pas au même degré dans le problème où il n'était question que de *droites indéfinies* partout, mais l'impression première défavorable était difficile à dissiper.

Le soir même de l'épreuve, nous avons questionné, sur cette impression, un des candidats qui répondit : Oh ! c'était très difficile, j'ai perdu un temps fou à faire la figure et à dessiner, pour me les représenter, un système de dix-neuf droites émanant du point S : SA, SB, SC, SA', SB', SC', Sα, Sα', Sβ, Sβ', Sγ, Sγ', Sp, Sq, Sr, Sp', Sq', Sr', SH !

Le Jury n'avait pas pensé un seul instant à cette difficulté, *imputable à la tournure d'esprit des élèves :* il suffisait de figurer les seules traces de ces droites sur le plan (II), et les traces de Sα, Sα', Sβ, Sβ', Sγ, Sγ' étant alors à l'infini, le décompte, de 19, tombe à 13.

Mais l'habitude de ce que M. Hadamard, dans ses profondes *Leçons de Géométrie,* nomme les figures *réduites,* n'est pas encore très vulgarisée dans nos classes. Dans presque toutes les copies (il est d'honorables exceptions) on s'est livré, ne serait-ce que par acquit de conscience, à la représentation *en perspective* du système de droites, avec les plans (P) et (II) figurés par des parallélogrammes ; une sorte de gâteau d'anniversaire à dix-neuf bougies, qui n'ont rien éclairé, au contraire, car elles se cachaient mutuellement plus ou moins. Pourquoi s'infliger un tel pensum (que le regard du correcteur devait fuir et non examiner) et comment peut-on raisonner sur de pareilles figures !

De plus, dans beaucoup de copies, la disposition topologique des points a, b, c, a', b', c', H [dans un plan (II)] s'est avérée défectueuse : ne va-t-on pas jusqu'à affirmer que les trièdres (S, a, b, c), (Sa', b', c') sont supplémentaires, en substituant aux grandes lettres A, B, C, A', B', C' les petites lettres correspondantes ; les précautions oratoires du texte n'ont pas prévenu cette erreur. Le point H est souvent représenté intérieur aux triangles abc, $a'b'c'$; fâcheusement, il n'en est jamais ainsi dans un véritable plan (II). On a dû être très défrisé du fait que les triangles abc, $a'b'c'$ semblables soient de sens contraires, alors que les cours apprennent que deux trièdres orientés supplémentaires SABC, SA'B'C' sont de même sens !

Nous avons déjà relevé plus haut qu'une erreur dans l'interprétation du signe moins dans une égalité d'angles de droites a faussé la qualification correcte de H dans la majorité des copies.

Cette expérience est d'un vif intérêt pour le professeur de Mathématiques : faut-il cultiver un certain dédain des représentations spatiales ? Pour de très bons élèves maniant *sans faute* le raisonnement rigoureux arithmétisé de la Classe de Mathématiques, c'est admissible. Mais pour les autres ? Faut-il continuer à affirmer qu'il y a un don de « vision dans l'espace » ? C'est incompatible alors avec le désir

actuel de rendre les Mathématiques faciles à tous. Personnellement, nous avons les plus grandes appréhensions sur l'efficacité d'un enseignement *abstrait* de la géométrie où l'étude de l'espace précéderait celle du plan, bien qu'au point de vue usuel de la technique concrète cette réforme peut sembler s'imposer dans les petites classes.

Revenons à nos concurrents : il faut déplorer maintes erreurs : « On peut considérer une symétrie par rapport à une droite du plan (II) comme une rotation de deux droits », moyennant quoi, il n'est dans (II) que des similitudes directes, celles étudiées au programme ! La forme est très déficiente, l'orthographe aussi (les arrêtes du trièdre, l'hortocentre) ; les abréviations abondent, notamment pour symboliser l'antiparallélisme (signe de parallélisme barré).

Il y a eu cependant une très bonne composition ayant compris la partie (I), mais qui n'a pas été plus loin, celle du candidat qui a obtenu le dernier accessit.

Les copies retenues pour une seconde lecture abordaient, sauf cette exception, la partie II ou les préliminaires de III, avec plus de succès que pour I.

Aussi le Jury n'a pas estimé possible de décerner le premier prix. Il n'était que juste, en contre-partie, de récompenser de courageux efforts par un second et deux troisièmes prix.

Les notes, sur 20, ont été 13,5 et 12,5 pour les prix, 11,5, 11, 10,5 et 9,5 pour les quatre accessits.

Le second prix, major de l'épreuve, avait obtenu un des premiers prix *ex-æquo* en Première au Concours Général de 1956 ; un des deux troisièmes prix également. Le quatrième accessit de 1957 s'était classé, au Concours de Première, quatrième accessit également.

Nous voulons espérer que ce problème pourra intéresser quelque peu les candidats de l'avenir. Nous remercions le Jury de son concours dévoué à corriger judicieusement les compositions, pénibles à lire, dans un délai qui s'est touvé, cette année, particulièrement restreint. Meilleure chance à tous l'an prochain !

Le Président du Jury : P. Robert.