INTRODUCTION A LA THÉORIE DES NOMBRES COMPLEXES

DÉFINITION. — Un nombre complexe est un couple rangé de deux nombres réels a et b qui sont ses *composantes ;* il est noté (a, b). L'égalité, confondue avec l'identité, est réflexive, réciproque et transitive.

On va définir, sur les nombres complexes, des opérations destinées à conférer à leur ensemble C une structure de corps commutatif.

ADDITION. — L'addition de deux nombres complexes est une opération interne définie par l'égalité :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Elle est commutative, associative, et possède un élément neutre (0, 0) ; tout nombre complexe (a, b) a un opposé et un seul $(-a, -b)$.

MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE RÉEL. — Le produit du nombre complexe (a, b) par le nombre réel k est le nombre complexe (ka, kb) ; on le note $k(a, b)$ ou $(a, b)\,k$. On vérifie que $\lambda[\mu(a, b)] = \mu[\lambda(a, b)] = \lambda\mu(a, b)$, que $1(a, b) = (a, b)$; de plus, cette opération est distributive par rapport à l'addition des nombres réels ou complexes.

NOUVELLE NOTATION POUR UN NOMBRE COMPLEXE. — D'après ce qui précède, le nombre complexe (a, b) peut s'écrire $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, ou, en posant :

$$(1, 0) = e, (0, 1) = i \qquad (a, b) = ae + bi.$$

[On peut noter — mais c'est inutile pour la suite — que les deux opérations qui viennent d'être définies confèrent à ensemble C une structure d'espace vectoriel de dimension 2 dont une base est (e, i)].

MULTIPLICATION. — La multiplication doit être une opération interne commutative. Elle doit posséder un élément neutre dont on prévoit qu'il sera e (qu'on sera amené à assimiler au nombre réel 1). La table de multiplication des éléments de base e et i est donc nécessairement la suivante :

T

	e	i
e	e	i
i	i	ω

$\omega = \alpha e + \beta i$ est un élément de l'ensemble C, choisi une fois pour toutes, et, pour le moment, arbitraire.

La multiplication doit être associative et distributive par rapport à l'addition. Le produit $(ae + bi) \times (a'e + b'i)$ s'effectuera donc comme un produit de polynômes en e et i, qu'on mettra sous la forme $Ae + Bi$ en tenant compte de la table T, soit : $(ae + bi)(a'e + b'i) = (aa' + bb'\alpha)e + (ab' + ba' + bb'\beta)i$.

Enfin, tout élément non nul $ae + bi$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ doit admettre un inverse $a'e + b'i$ tel que :

$$(ae + bi)(a'e + b'i) = e ;$$

autrement dit, le système linéaire en a' et b',

(S) $aa' + b\alpha b' = 1$; $ba' + (a + b\beta)b' = 0$ doit admettre une et une seule solution quels que soient a et b non simultanément nuls. Or, le déterminant de (S) :

$$\delta = a^2 + \beta ab - \alpha b^2,$$

est une forme quadratique en a et b. Cette forme doit être définie positive, ce qui exige :

(1) $$\beta^2 + 4\alpha < 0 \text{ et, en particulier, } \alpha < 0.$$

Dans le but de simplifier au maximum les règles opératoires, nous prendrons $\beta = 0$, $\alpha = -1$.

Il reste à vérifier maintenant que la multiplication possède bien toutes les propriétés requises par la structure de corps commutatif. C'est très facile. En particulier, on verra que le système (S) admet effectivement une solution et une seule, qui est $\frac{ae - bi}{a^2 + b^2}$ pour $a^2 + b^2 \neq 0$.

On constate qu'il y a isomorphisme entre le corps des réels et l'ensemble C_0 des nombres complexes à seconde composante nulle, ce qui nous amène à poser $ae = a$.

Observons enfin, que tous les corps obtenus en donnant à α et β toutes les valeurs réelles satisfaisant à (1) sont isomorphes. Parmi eux, nous avons choisi celui qui conduit au maximum de simplicité dans les calculs.

La théorie précédente a été exposée cette année, avec succès, dans ma classe de Mathématiques Supérieures. Elle a l'avantage d'être à peu près dénuée de dogmatisme, de donner très rapidement la notation définitive (à la lettre e près), ainsi que les règles opératoires essentielles.

J. Commeau (*Lycée Kléber, Strasbourg*).