La Mathématique considérée comme Langue Vivante

On peut présenter la Mathématique de la façon suivante : « Une *langue vivante* chargée d'exprimer les *faits scientifiques*. » Il s'agit d'une simple présentation et non d'une définition, car il y a bien d'autres façons de présenter la Mathématique.

Nous disposons de trois modes d'expression :

1° *Notre langue maternelle ;* une étude soignée de celle-ci conditionne toutes les acquisitions ultérieures ; on ne peut espérer devenir « bon en Mathématique » si l'on n'est au préalable « bon en français ».

2° *Le langage technique ;* la découverte et l'invention d'objets nouveaux nécessite l'emploi de mots nouveaux. Le créateur emprunte souvent son vocabulaire technique à une langue étrangère, mais il le soumet ensuite aux lois grammaticales de sa propre langue : il en résulte que le langage technique, s'il donne une belle impression de vitalité, se révèle malheureusement souvent confus et peu harmonieux.

3° *La langue mathématique.* C'est une véritable langue vivante, et il faut l'apprendre comme telle. Elle emprunte son vocabulaire aux langues anciennes et modernes ainsi qu'au langage technique, mais elle opère sélectivement, ne retenant qu'un nombre raisonnable de termes. D'autre part, elle a sa grammaire propre, chaque terme de la langue étant ainsi doté d'un « *usage codifié* ». On obtient ainsi, au prix d'une étude minutieuse, une harmonie raisonnable entre les mots et leur grammaire.

Le point de vue pédagogique. — Il convient donc d'apprendre aux élèves une langue. A cet effet, il faut les doter d'un vocabulaire, complété par un ensemble de symboles graphiques, puis leur apprendre les règles fixant le maniement des mots et des symboles.

L'acquisition du vocabulaire peut se faire à partir d'expériences concrètes réalisées par les élèves (dessin graphique, travail du bois ou du fer, exercices de laboratoire en physique ou en sciences naturelles) ou évoquées par le professeur (aviation, voyages géographiques, astronomie stellaire, sciences humaines ou économiques). A l'occasion de ces expériences on présente un certain nombre de termes mathématiques en les munissant immédiatement de leur mode d'emploi dûment codifié. En voici un exemple :

Présentation des mots « point » et « vecteur »

Théâtre I : Un enfant, un boulier.

Scène 1 : L'enfant contemple le boulier.
Scène 2 : L'enfant bouleverse le boulier.
Scène 3 : L'enfant contemple le boulier.

Théâtre II : Un poste de repérage, une météorite.

Scène 1 : Repérage de la situation de la météorite.
Scène 2 : La météorite effectue un certain trajet.
Scène 3 : Repérage de la situation de la météorite.

Théâtre III : Une entreprise industrielle.

Scène 1 : Inventaire.
Scène 2 : Evolution de l'entreprise.
Scène 3 : Inventaire.

Traduction en langue mathématique

{L'enfant contemple le boulier / Repérage de situation / Inventaire.} ——•——→ un *point.*

{L'enfant bouleverse le boulier / La météorite effectue un trajet / Evolution de l'entreprise} ——•——→ un *vecteur.*

Le concept mathématique apparaît alors comme le *compte rendu lapidaire d'une collection d'expériences.* Cependant les expériences envisagées ne sont pas indépendantes, c'est ainsi que dans chacun des exemples précédents la connaissance des scènes 1 et 3 assure la connaissance de la scène 2. On dit que ces trois exemples ont *une structure commune* et l'on traduit celle-ci en langue mathématique par le verbe « déterminer ». D'où la rédaction en langue mathématique : *Deux points* DÉTERMINENT *un vecteur.*

Cette proposition, entièrement construite avec des mots de la langue mathématique, résume en une demi-ligne tout ce qu'il y a de commun aux ensembles expérimentaux précédents. Une telle proposition suggérée par l'expérience ou posée *a priori* est appelée *axiome.* Les objets mathématiques se présentent sous forme d'*ensembles* dont ils sont les *éléments,* ces ensembles sont régis par des *lois,* les différents articles de ces lois étant justement les axiomes. Une *théorie mathématique* est l'étude d'un ou plusieurs ensembles appelés *référentiels* de la théorie. De la connaissance des axiomes on déduit celle de nouvelles propriétés appelées *théorèmes.* L'ensemble des axiomes et des théorèmes que l'on peut en déduire constitue un *système hypothético-déductif.* (L'Arithmétique et les diverses Géométries, affine, euclidienne, projective, sont des exemples de tels systèmes).

Propositions simples ou relations binaires. — On forme une telle relation en joignant par un *verbe* (ou une expression verbale) un *sujet* et une *image* (le mot image remplace le mot complément qui a un autre sens en Mathématique),

$$a \quad \mathcal{R} \quad b$$
sujet verbe image

la lettre R étant remplacée par le symbole spécial de la relation étudiée.

Exemples :

• *Egalité* $a = b$

l'élément *a est égal à* l'élément *b* (les symboles *a* et *b* désignent le même élément).

• *Appartenance* $a \in A$

l'élément *a appartient à* l'ensemble A (*a* est l'un des éléments de A).

• *Implication* $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$

l'hypothèse $\mathcal{A}$ *implique* la conséquence $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ est vraie, donc $\mathcal{B}$ est vraie).

• *Implication réciproque* $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ *implique* $\mathcal{B}$ et réciproquement $\mathcal{B}$ *implique* $\mathcal{A}$

LOI DE COMPOSITION (ou opération).

Une *loi de composition* (ou *opération*) est une prescription permettant de déduire de deux éléments *a* et *b* (*termes ou facteurs*) un nouvel élément *r* (*résultat*). Lorsque *a, b, r,* appartiennent à un même ensemble E, la loi de composition est dite *interne* dans l'ensemble E. Si *r* existe, quel que soit le choix des éléments *a* et *b* dans E, on

dit que l'opération est *partout définie* dans E. D'une façon générale, une opération se note :

$$a * b = r.$$

Le symbole * pouvant être remplacé par le signe spécial de chaque opération étudiée (+, —, ×, :, ∩, ∪ ∧,...).

ALGÈBRE.

Lorsqu'un ensemble E est muni d'une ou plusieurs lois de compositions, on dit que celles-ci confèrent à E une *structure algébrique*. D'une façon générale, on appelle *algèbre* la science des lois de composition.

*
**

Les diverses sciences étant en rapide évolution, la langue mathématique doit elle-même se modifier très vite ; mieux, quand un physicien (ou un astronome, ou un économiste) fait une nouvelle découverte, il aime trouver dans le matériel mathématique une théorie toute prête capable de l'exprimer ; c'est ainsi que, lorsque les astrophysiciens ont découvert l'expansion de l'Univers, ils ont pu bénéficier immédiatement d'un chapitre de la théorie de la Relativité, où tous les calculs concernant leur recherche étaient faits à l'avance. La Mathématique doit donc, non seulement s'adapter à une expérience sans cesse renouvelée, mais aussi être en avance sur l'expérience elle-même, d'où la nécessité de créer des *structures libérales* chargées d'exprimer les expériences futures.

La Mathématique apparaît bien comme une langue « *vivante* » dans toute l'acception du terme. De nombreuses associations étudient cette langue, soit pour l'enseigner, soit pour la créer. Des publications très fréquentes en donnent des instantanés :

— Recherches du groupe d'études de Sèvres : coordination français-mathématiques, soit par l'étude du vocabulaire, soit par l'étude des formes de raisonnements.

— Rapport annuel sur les *définitions et notations*, « *axiomatique et redécouverte* » (passage des définitions savantes aux modèles pour enfants) au sein de l'A.P.M.

— Fichier de la Société Mathématique de France.

— L'Association Française de Normalisation (A.F.N.O.R.), grande régulatrice du langage technique. Bien des termes du langage technique étant appelés à devenir des mots de la langue mathématique, les sociétés de mathématiciens ont intérêt à suivre de près les travaux de l'A.F.N.O.R. Les définitions et notations normalisées sont, en principe, utilisées dans toutes les classes.

— *Le séminaire Bourbaki* définit la Mathématique comme la Science Générale des Structures, il publie collectivement chez Hermann (6, rue de la Sorbonne), sous le titre : « Eléments de Mathématique » une œuvre considérable qui ne compte pas moins de 22 gros volumes (actuellement parus). L'apport de ces ouvrages à la construction de la Langue Mathématique est extrêmement fécond, bien que l'étude en soit parfois difficile, même pour des mathématiciens exercés. Je cite la préface :

« La terminologie suivie dans ce traité a fait l'objet d'une attention particulière. Chaque fascicule sera pourvu d'un index. Chaque livre sera suivi d'un dictionnaire où seront employés et discutés, en plus des termes employés dans ce traité, les termes correspondants employés dans les langues principales. Ce dictionnaire permettra au lecteur d'aborder l'étude de mémoires originaux dans ces diverses langues, et aussi au mathématicien accoutumé à une autre terminologie de se familiariser avec celle du traité. »

Y. CROZES (*Henri-IV*).