III. ESSAIS

SUR LA NOTION DE COURBE

I. Définition et calcul de la longueur d'un arc de courbe différentiable

1. Arc simple. — Nous appellerons *arc simple* un arc de courbe (C) continu et sans point double : par définition, il existe trois fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ définies et continues sur un certain segment $[a, b]$ tel que (C) soit le lieu des points $M(t)$ de coordonnées $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ par rapport à un système d'axes préalablement choisi. Dire que (C) est sans point double, c'est dire, par définition, que si t est différent de t', alors les points $M(t)$ et $M(t')$ sont distincts. (Voir II pour plus de détails).

Etant donnés trois points $M(t)$, $M(t')$, $M(t'')$, on dira que $M(t')$ est *entre* $M(t)$ et $M(t'')$ si t' est entre t et t''. Cette notion — de même que celle d'arc simple — ne dépend du paramétrage qu'en apparence ; étant donnés trois points distincts de (C), il en existe toujours un qui soit entre les deux autres.

On appelle polygone inscrit dans (C) un polygone dont les sommets *successifs* $M_0, M_1, \ldots, M_n$ sont tous des points de (C), M_0 et M_n étant les extrémités de (C) (*i.e.* les points de paramètre a et b), et M_i étant *entre* M_{i-1} et M_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Un nombre fini de points de (C) définit un polygone inscrit et un seul.

Notons enfin que si (C) est un arc simple, et si l'on se borne à faire varier t sur un segment $[c, d]$ contenu dans $[a, b]$, on obtient un sous-arc de (C), qui est lui-même un arc simple.

2. Définition. — On appelle longueur L(C) de l'arc de courbe simple (C) la borne supérieure des longueurs de tous les polygones inscrits dans (C).

L(C) est donc un nombre positif, éventuellement infini ; si L(C) est fini, on dit que la courbe est *rectifiable*. De même que la notion de polygone inscrit, la longueur d'un arc simple (C) ne dépend du paramétrage qu'en apparence.

Théorème I. — La longueur d'un arc de courbe simple est une fonctionnelle additive.

Cela signifie que si l'on décompose (C) en deux sous-arcs (C') et (C'') en marquant sur (C) un point de division R compris entre les extrémités, alors

$$L(C') + L(C'') = L(C).$$

En effet, comme la réunion d'un polygone inscrit dans (C') et d'un polygone inscrit dans (C'') est un polygone inscrit dans (C) (ayant R comme sommet), on a $L(C') + L(C'') \leqslant L(C)$. L'inégalité en sens contraire provient de ce qu'il y a toujours un polygone inscrit dans (C) et ayant R pour sommet dont la longueur est supérieure à celle d'un polygone inscrit (P) arbitrairement donné : il suffit de considérer *le* polygone inscrit dont les sommets sont ceux de (P), plus R.

Remarque. — En général, une courbe Γ donnée par une représentation paramétrique quelconque continue n'est pas un arc simple (représentations impropres, points doubles). Mais le plus fréquemment, à l'aide d'un nombre fini de points de division, on pourra décomposer Γ en un nombre *fini* d'ensembles dont chacun est un arc simple (C_i) (cf. II). Par définition, la longueur de Γ sera la somme des longueurs des (C_i) : grâce au théorème I, on voit que cette longueur est indépendante du choix de la décomposition. La longueur de ces arcs plus généraux est évidemment encore une fonctionnelle additive.

3. Arcs continûment différentiables. — On appelle ainsi un arc admettant une représentation paramétrique $M(t)$ qui soit une fonction (vectorielle) admettant une dérivée continue. Le théorème que nous avions essentiellement en vue ici est le suivant :

Théorème II. — Tout arc simple, continûment différentiable, est rectifiable ; si $t \to M(t)$ est une représentation paramétrique d'un tel arc (C), sa longueur est donnée par $L(C) = \int_a^b |\overrightarrow{M'(t)}|\, dt,\ a \leqslant t \leqslant b$.

Démonstration. — Quitte à changer les notations, nous pouvons toujours supposer que les paramètres $t_0 = a, \ldots, t_i, \ldots, t_n = b$ correspondant aux sommets d'un polygone inscrit $M_0 \ldots M_n$ sont rangés dans l'ordre croissant (puisque par définition, ils sont rangés, soit dans l'ordre croissant, soit dans l'ordre décroissant). Or, $|\overrightarrow{V}|$ désignant la longueur du vecteur $\overrightarrow{V}$:

$$|\overrightarrow{M_i M_{i+1}}| = \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overrightarrow{M'}(t)\, dt\right| \leqslant \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\overrightarrow{M'}(t)|\, dt \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Ajoutons membre à membre ces n inégalités :

(Longueur du polygone inscrit $M_0 \ldots M_n$) $\leqslant \int_a^b |M'(t)|\, dt$, ce qui montre que la borne supérieure L(C) est finie, et inférieure ou égale à l'intégrale du second membre.

La courbe (C), et *a fortiori* tout sous-arc de (C), est donc rectifiable : soit $s(t)$ la longueur du sous-arc d'extrémités $M(a)$ et $M(t)$. Il s'agit de calculer $s(b)$: nous allons le faire en montrant que la fonction $s(t)$ est continûment différentiable sur le segment $[a, b]$, et en calculant sa dérivée.

Supposons d'abord $h > 0$; d'après le théorème I, la longueur de l'arc d'extrémités $M(t)$, $M(t+h)$ est $s(t+h) - s(t)$; compte tenu du fait qu'une corde est un polygone inscrit particulier, et de la majoration que nous venons d'obtenir pour la longueur d'un arc différentiable, on a, puisque h est positif :

$$(1)\qquad \left|\frac{|M(t+h) - M(t)|}{h}\right| \leqslant \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |\overrightarrow{M'}(t)|\, dt.$$

Si h était négatif, on aurait les inégalités :

$$\frac{|M(t+h) - M(t)|}{h} \geqslant \frac{s(t) - s(t+h)}{h} \geqslant \frac{1}{h}\int_{t+h}^{t} |\overrightarrow{M'}(t)|\, dt.$$

Par suite (1) est valable quel que soit le signe de h. La fonction (scalaire) $|\overrightarrow{M'}(t)|$ étant continue, elle est la dérivée de sa primitive : on voit ainsi que si $h \to 0$, $\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$ tend vers $|\overrightarrow{M'}(t)|$, et le théorème II est entièrement démontré.

Remarque. — Le théorème II s'étend de toute évidence aux arcs continûment différentiables non simples qui sont décomposables en un nombre fini d'arcs simples (cf. Remarque du n° 2) ; il s'étend aussi aux arcs continûment différentiables sauf en un nombre fini de points pourvu que $|\overrightarrow{M'}(t)|$ soit intégrable sur chacun des sous-intervalles (ouverts) de $[a, b]$ qui restent lorsque l'on a supprimé les points où la courbe n'était pas continûment différentiable. Cette remarque suffirait, à notre avis, à justifier l'intérêt de toute théorie de la rectification permettant d'établir le théorème I *avant* l'exposition d'un mode de calcul explicite : il faut tout de même être capable, au bout de la théorie, de retrouver la longueur d'une ligne brisée, qui n'est malheureusement pas une courbe continûment différentiable.

II. La notion de courbe

1) Arc de courbe.

Définition. — Nous appellerons *arc simple continu* (ou plus brièvement *arc de courbe*) un ensemble de points (C) de l'espace tel qu'il existe une application *continue* et *biunivoque* d'un segment de droite I *sur* (C). En d'autres termes, à tout point M de (C) est associé un nombre réel t ($a \leqslant t \leqslant b$) et un seul, tel que la fonction (à valeurs vectorielles) f qui à t fait correspondre ce point M soit continue. On écrira $M = f(t)$: une courbe est donc définie par une représentation paramétrique ; comme celle-ci n'est évidemment pas unique, il faudra distinguer les notions attachées à la représentation paramétrique de celles attachées à la courbe ; on devra toujours dégager le caractère intrinsèque de ces dernières en montrant qu'elles sont indépendantes du choix de la représentation paramétrique. C'est ce qui est omis trop souvent dans les cours.

Nous commencerons par étudier comment on passe d'une représentation paramétrique f d'une courbe (C) à une autre représentation paramétrique g.

Théorème I. — Soient $M = f(t)$ et $M = g(u)$ ($a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant u \leqslant d$) deux représentations paramétriques d'un même arc simple continu (C). Alors u est une fonction continue et strictement monotone du paramètre t.

En effet, l'équation $f(t) = g(u)$ a une solution et une seule en u, quel que soit t, $a \leqslant t \leqslant b$, puisque g est biunivoque. Elle définit donc une fonction $u = \varphi(t)$; cette fonction est biunivoque comme f. Elle est continue : soit en effet t_n une suite de points tendant vers t_0 ($a \leqslant t_0 \leqslant b$) ; pour tout point d'accumulation w de la suite $u_n = \varphi(t_n)$ on a $c \leqslant w \leqslant d$ et par suite $g(w) = f(t_0)$, d'où $w = \varphi(t_0)$, en vertu de la continuité de f et de g et de la biunivocité de g.

Il ne reste plus qu'à montrer que φ est strictement monotone ; cela va résulter d'un lemme classique, dont malheureusement seule la réciproque est au programme des classes de Spéciales.

Lemme. — Toute fonction h à valeurs réelles, définie, continue et biunivoque sur un segment $[a, b]$, est strictement monotone sur ce segment.

Démontrons ce lemme. Prouvons d'abord l'énoncé suivant : (A). Considérons trois valeurs, x, x', x'', telles que $a \leqslant x' < x < x'' \leqslant b$. Alors, si $h(x') < h(x)$ on a $h(x'') > h(x)$ et si $h(x') > h(x)$ on a $h(x'') < h(x)$.

En effet, puisque $x'' > x$, on ne peut avoir, vu la biunivocité de h, $h(x'') = h(x)$. Si, par exemple, $h(x') < h(x)$ on ne peut avoir non plus $h(x'') < h(x)$ car h prendrait dans chacun des intervalles $]x', x[$ et $]x, x''[$ toute valeur k à la fois supérieure à $h(x')$ et $h(x'')$ et inférieure à $h(x)$.

Montrons alors que si, par exemple, $h(b) > h(a)$, h est strictement croissante sur le segment $[a, b]$: en effet, cette hypothèse et (A) prouvent que les inégalités $a < x < y < b$ entraînent

$$h(a) < h(x) < h(y) < h(b).$$

Le théorème I est entièrement démontré.

2) Arc de courbe orienté.

Il résulte du théorème I que l'ensemble des représentations paramétriques d'un arc de courbe (C) est constitué de deux classes sans élément commun : deux représentations paramétriques sont dans la même classe si l'on passe de l'une à l'autre en effectuant sur le paramètre de la première une transformation continue et biunivoque croissante et dans deux classes différentes si cette transformation est décroissante. Orienter l'arc de courbe, c'est faire choix de l'une des deux classes, en se bornant à considérer les représentations paramétriques appartenant à cette classe.

Définition. — Un arc de courbe orienté est défini par la donnée simultanée d'un arc simple continu et de l'une des deux classes de représentations paramétriques de cet arc simple. Une représentation paramétrique d'un arc de courbe orienté est l'une quelconque des applications de la classe choisie. Une représentation paramétrique $M = f(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ d'un arc de courbe simple définit un arc orienté et un seul : on dit que c'est l'arc orienté dans le sens des t croissants.

Etant donné un arc orienté (Γ), la classe de représentations paramétriques non choisie définit ce que l'on appelle l'orientation opposée de (Γ). Si $f : t \to M(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ définit un arc de courbe orienté, alors $g : t' \to M\,(b + a - t')$ $(a \leqslant t' \leqslant b)$ définit l'arc de courbe muni de l'orientation opposée. Si $f : t \to M(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ définit un arc de courbe orienté, $M(a)$ s'appelle l'origine et $M(b)$ l'extrémité de l'arc orienté. Plus généralement, si $t < \tau$, on dit que $M(t)$ est situé avant $M(\tau)$ sur l'arc orienté : cette relation est une relation d'ordre.

Les notions d'origine, d'extrémité, d'arc orienté, de point situé avant un autre sur un arc orienté, sont intrinsèques : elles ne changent pas si l'on remplace la représentation paramétrique f par une représentation de sa classe : par contre, l'origine et l'extrémité se permutent si l'on remplace l'orientation choisie par l'orientation opposée : si M est situé avant M' sur un arc orienté (Γ), M' est situé avant M sur l'arc ayant l'orientation opposée.

3) Polygone inscrit dans un arc orienté.

On appelle ainsi une ligne brisée $M_0M_1 \ldots M_n$ dont les sommets successifs M_i sont des points de l'arc tels que M_0 soit l'origine de l'arc, M_n l'extrémité et que, quel que soit i, M_i soit situé avant M_{i+1} sur l'arc orienté.

Si $M_0M_1 \ldots M_n$ est un polygone inscrit dans un arc de courbe orienté, le polygone $M_0M_1 \ldots M_n$ est inscrit dans l'arc ayant l'orientation opposée.

4) Notion de courbe.

La notion d'arc de courbe est insuffisante dans la pratique : un cercle, de même que toute courbe fermée ou ayant des points doubles, n'est pas un arc simple continu. On est donc conduit à poser une définition du type suivant :

Définition. — On appelle *courbe orientée* la donnée, dans un ordre déterminé, d'un nombre fini d'arcs de courbe orientés $C_1, \ldots, C_n$ tels que l'extrémité de C_i coïncide avec l'origine de C_{i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$.

En changeant les orientations de tous les C_i et en les énumérant dans l'ordre inverse on obtient la courbe orientée dans le sens opposé.

Il est manifeste qu'une courbe orientée est susceptible d'une représentation paramétrique $M = f(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, $f(t)$ étant encore une fonction continue mais plus nécessairement biunivoque : il peut arriver que pour $t' \neq t''$ on ait

$$f(t') = f(t'') = M :$$

le point M est alors appelé un point double de la courbe orientée.

Contrairement à celle d'arc simple non orienté, la notion de courbe non orientée ne semble pas intéressante en raison de la présence possible d'une infinité de points doubles.

Une courbe simple orientée sans point double est un arc simple orienté et réciproquement. Une courbe fermée est une courbe telle que l'origine de C_1 coïncide avec l'extrémité de C_n : une courbe fermée simple ou courbe de Jordan est une courbe fermée n'admettant pas d'autre point double que l'origine de C_1.

Pour une courbe fermée on a toujours $n \geqslant 2$, et pour une courbe fermée simple on peut toujours prendre $n = 2$.

J. Frenkel (*Faculté des Sciences de Paris*),
et A. Fuchs (*Faculté des Sciences de Strasbourg*).