STRUCTURES MATHÉMATIQUES ET STRUCTURES MENTALES

par CALEB GATTEGNO

Introduction.

Dans ce chapitre nous nous proposons plutôt d'explorer une direction de recherche que d'arriver à des conclusions finales. Ce que nous soumettons ici à l'attention des lecteurs demandera de nombreuses investigations avant d'atteindre un degré de certitude suffisant pour servir de base à une action rationnelle sur le plan de l'éducation. Néanmoins, il nous semble qu'il est possible, à l'aide de la méthode que nous étudions ici, d'atteindre des résultats plus satisfaisants et d'éclairer une route où la tradition et les tâtonnements nous ont guidés jusqu'ici.

Remarquons, pour commencer, que l'attitude par rapport aux Mathématiques a varié considérablement depuis les origines. Nombres et figures avaient un caractère d'absolu qui en faisait des êtres de contemplation avant tout. A l'époque où la prin-

cipale préoccupation des hommes était leur rapport avec un ou plusieurs êtres surnaturels, les Mathématiques étaient inventions divines, mystères qu'il s'agissait de comprendre. Les idées pures y trouvaient leurs exemples par excellence.

A l'époque où l'attention des hommes se tournait vers la nature et leur rapport avec elle, la Mathématique devenait la voie d'expression du contenu de la nature sous la forme de ses lois. La Mathématique se constituait comme le langage adéquat à l'exploration de la nature terrestre et cosmique, physique et astronomie pour commencer, autres sciences de la nature ensuite. La Mathématique était tributaire des sciences naturelles, bien qu'elle se développât à côté et pour les aider à résoudre leurs difficultés et à exprimer leurs résultats. Si la géométrie restait, pour DESCARTES, le modèle des sciences auquel toutes les autres devaient tenter de ressembler, la mécanique a été en vérité la source des progrès décisifs des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. Le calcul différentiel et intégral, NEWTON et LEIBNIZ ont donné le ton : la Mathématique exprime le contenu de l'univers, est un langage universel.

Lorsque l'attention des hommes a été concentrée sur leurs rapports réciproques : politiques, sociaux, économiques, la Mathématique a abandonné l'absolu euclidien pour fonder des géométries diverses ; le point de vue global pour adopter la conception riemannienne du local ; l'idée du définitif pour celle du probable, de l'approximatif ; transformant de la sorte l'idée de la nature en un ensemble de relations posées par les chercheurs et que leur habileté technique permet de conduire à un certain degré d'achèvement. L'atomisme physique exige ses méthodes propres : l'intuition et la rigueur délimitent leurs champs.

Mais lorsque l'homme se découvre lui-même au centre de son univers construit par lui, la crise des fondements apparaît dans le domaine que nous examinons, les Mathématiques. Les travaux de CANTOR sur l'infini et les ensembles, les attaques par les logisticiens, la formalisation des Mathématiques, les espaces abstraits, etc... amènent de plus en plus la conviction que les Mathématiques sont une activité mentale réglementée par ses propres lois et que beaucoup de faux problèmes ont été posés à cause de préjugés inconscients ou d'incompréhension flagrante.

Ce tableau rapide nous conduit à l'orée de notre problème. Si la Mathématique n'est plus la contemplation d'un aspect de l'absolu, du divin, si elle n'est pas le langage de la physique, si elle n'est pas la voie de communication entre les hommes (en tant qu'êtres sociaux à un certain degré de civilisation) lorsqu'ils traitent de leurs perceptions, de leurs inventions, de leurs organisations mécaniques, électriques, industrielles, etc..., si elle est au contraire une activité mentale d'hommes que cela intéresse et occupe, le psychologue a quelque chose à dire qui est, peut-être, utile.

Nous allons donc considérer successivement : les conséquences de cette prise de conscience ; sa signification dans les rapports des Mathématiques aux autres activités humaines ; le sens dans lequel une pédagogie, avertie de ces données, peut servir la cause d'une meilleure compréhension de la tendance présente.

1. Mathématiques et psychologie.

Les psychologues en général ne sont pas mathématiciens, bien que nombreux soient les psychologues qui apprennent une certaine Mathématique et l'appliquent à leurs recherches. Il en résulte que rarement le psychologue se permette de regarder la Mathématique comme une activité. Elle est un outil, qui le dépasse le plus souvent, et qu'il craint de juger.

Depuis la crise des fondements, les mathématiciens ont fait eux-mêmes l'introspection qu'aucun psychologue ne pouvait faire. Cette introspection est exprimée en langage ésotérique dans des milliers de travaux publiés dans tout le monde depuis plus de soixante ans.

Cette longue crise des Mathématiques n'a pas empêché les moins scrupuleux (ou les plus scrupuleux dans leurs moments d'accalmie) de poursuivre leurs travaux

créateurs. En vérité, nul parmi les mathématiciens, ne croyait vraiment que les Mathématiques étaient un édifice véreux. La question était plutôt de se dégager d'idées préconçues et cela leur était aussi pénible que dans tout autre domaine de la vie. La crise était une espèce de névrose collective avec une idée fixe : voir clair dans cet immense domaine aux branches si diversifiées. En particulier les répercussions des antinomies, des nouvelles idées de la physique forçaient à une révision du contenu des Mathématiques qui s'appuyaient sur l'expérience, ou sur lequel l'expérience courante s'appuyait.

Nous pouvons résumer la crise (que d'aucuns croient loin d'être terminée), en disant qu'elle est le choc de la découverte, en termes qui vont de plus en plus en se précisant, que la Mathématique est une activité créatrice de l'esprit humain.

Pour le mathématicien non-psychologue et tout entier pris par son activité, le sentiment qu'il y a une crise des fondements de son activité doit être particulièrement troublant. Seuls les mathématiciens capables de philosopher ont pris part à l'étude de la solution de la crise. Le récit en est trop long pour être adéquatement résumé. Qu'il nous suffise de dire que la vigueur de l'arbre rendait fort improbable le danger que les racines soient pourries ; les deux principales tendances ont été, l'une de rechercher une base plus certaine pour tout l'édifice dans une de ses branches qu'il faudrait alors examiner minutieusement (et ce fut, après analyse, la suite des nombres entiers qui fut choisie), et l'autre de demander assistance à des disciplines plus vastes que la Mathématique. La logique fut essayée, mais lentement elle a été absorbée par la Mathématique en changeant de nom : on l'appelle logistique, logique combinatoire, théorie des fondements, etc...

La psychologie aussi fut sollicitée. Mais comme on ne sait pas encore aujourd'hui ce qu'il faut entendre par le mot psychologie : science de laboratoire, science non normée, science biologique, science de l'inconscient, des émotions, etc..., l'aide à en attendre, variait avec le psychologue sollicité.

Ici nous allons faire œuvre de pionnier et faire usage d'une attitude personnelle envers le problème des activités humaines. Ailleurs nous avons développé notre conception de la psychologie comme science du temps. Nous n'y reviendrons pas ici. Le propre de l'activité mentale est qu'elle est temporelle et qu'elle demande du temps pour s'objectiver : le temps en certaines circonstances et par certaines transformations peut se ramener au temps public. La pensée est activité temporelle et il en est ainsi de la pensée mathématique en particulier. Le sentiment que la pensée se structure en vérité, lorsque le sujet est actif intellectuellement, ne peut être éludé et c'est sur cette certitude de ma pensée structurée et structurante que la certitude du bien-fondé des Mathématiques repose.

Il faut se rendre compte de la nouveauté de cette attitude. Malgré le Cogito de DESCARTES, le mathématicien accède à la certitude, par sa participation à la Mathématique constituée, à laquelle il accorde la solidité et la vigueur acquises dans l'acte social d'apprentissage sans qu'il soit question (ou même possible de douter) de la solidité des fondements. Aujourd'hui des mathématiciens nombreux, ayant essayé toutes les voies « horizontales » d'issue, ont atteint la certitude, en reconnaissant pour seuls fondements de leur activité, l'activité même de leur pensée mathématique définie pour eux en ses propres termes.

LEIBNIZ déjà avait amorcé la substitution des relations aux objets, dans la contemplation métaphysique, mais ce fut l'œuvre de la Mathématique du XIX^{e} siècle de familiariser l'esprit avec la considération de nouveaux êtres abstraits qui n'étaient que relations et pour lesquels on créait des algèbres. Les relations, plus facilement que les objets, apparaissent comme des créations de l'esprit. Les travaux de DEDEKIND, FREGE, HILBERT, etc..., au tournant du siècle, avancèrent davantage dans la direction de l'être abstrait et des relations *a priori*, source de compréhension des *structures* des chapitres étudiés. Ce grand pas en avant ne peut être trop souligné.

C'est le pas qui devait permettre la prise de conscience de l'objet réel des Mathématiques et ramener la crise des fondements à une question de psychologie.

S'il existe des chapitres parallèles des Mathématiques, qui ne restent séparés que parce que le mathématicien décide de nommer l'être abstrait d'une certaine façon ici, d'une autre façon là, la nature même de l'activité mathématique veut qu'on fonde ces chapitres et qu'on étudie les structures abstraites qu'ils impliquent. Ce n'est pas principe d'économie seulement, mais nécessité humaine qui ne descend du général au particulier que forcée ; la communication humaine serait impossible sans la substitution du général au particulier, si le particulier seul devait être utilisé.

Dès que l'attention est portée sur les structures, on voit bien que l'activité mathématique n'a jamais été autre chose que l'étude de relations définies entre des êtres définis et que ces définitions se justifient intérieurement aux yeux du mathématicien, c'est-à-dire par les soins de l'activité elle-même. C'était la vision préconçue des savants, leur manque d'intérêt pour l'examen de ce genre de question, qui leur a fait prendre pour autre chose ce qu'ils étaient en train de faire. La Mathématique étudie les structures qu'elle crée suivant des lois qu'elle s'impose. C'est-à-dire que le mathématicien appelle Mathématique une activité où entrent en jeu certaines structures mentales définies par lui, en rapport avec d'autres structures mentales qu'il emprunte à d'autres mathématiciens.

Dire que les Mathématiques sont une activité portant sur des structures mentales particulières c'est dire deux choses. D'une part, c'est utiliser la langue psychologique et par suite introduire une préoccupation nouvelle, et, d'autre part, c'est poser le problème des Mathématiques en termes humains exclusivement. Nous n'avons d'autre justification pour le faire que la fécondité de ce point de vue nouveau.

Quand le mathématicien est remonté jusqu'au point où il peut poser ses axiomes de structures, il s'arrête presque. Il va bien essayer d'ordonner les structures, mais sa fonction principale est de créer du nouveau, d'objectiver des structures inconnues, de tirer au net leurs propriétés.

Mais le psychologue trouve sa tâche bien simplifiée par la contribution de cette prise de conscience du mathématicien. En effet, il voit qu'il peut décrire toute la réalité humaine en termes de structures mentales et les Mathématiques deviennent une activité particulière intégrée et mise à sa place. Il voit que la créativité humaine ne peut lui échapper, non plus que rester en dehors de sa description scientifique. Il voit que le problème des diverses sciences et de l'univers naturel et humain n'est pas un nouveau problème et qu'il ne court pas le danger d'être exclusivement psychologique dans son analyse.

La notion de structure en mathématique a permis une clarification intérieure des Mathématiques elles-mêmes, une purification d'où les pseudo-problèmes étaient éliminés. Elle a servi également à fonder les Mathématiques sur elles-mêmes en en faisant une activité mentale autonome et organisée suivant ses propres lois à tous les échelons. Elle a servi à donner un outil à la psychologie qui, du fait de son origine, sait qu'il s'applique adéquatement à la Mathématique (existante et qui est en train de se faire), et peut être utilisé dans l'étude d'autres problèmes. Elle a donc servi la double fonction de comprendre une activité intellectuelle fondamentale de l'humanité, et de féconder la science qui doit expliquer *toutes* les activités humaines.

En psychologie, une notion primitive est celle de structure mentale.

2. Evolution mentale dans l'apprentissage des sciences mathématiques et autres.

Maintenant que notre attitude est de considérer l'homme en son activité, plutôt que dans sa dépendance à un être surnaturel (théologie), ou dans la nature, objet naturel (physique, chimie, biologie), ou dans ses rapports avec l'état (politique), ou ses confrères (sociologie, anthropologie), il nous faut expliquer, d'une part, la

floraison de ses activités, et, d'autre part, ce qui arrive à chaque individu dans son évolution mentale qui emprunte les sciences existantes.

Dans la section précédente nous avons vu la notion de structure mathématique comme structure mentale. Y a-t-il dans les autres activités humaines quelque équivalent pour les structures mentales ? Il semblerait qu'il soit plus facile de réduire les Mathématiques que la physique à une activité mentale.

Notons d'abord que le problème de réduction se pose de deux manières. S'agit-il de réduire la science à une activité mentale ou le réel tout entier ? La première question est plus facile et ne semblerait pas soulever les mêmes objections que la seconde, puisque science veut dire connaissance et qu'on ne peut concevoir celle-ci sans une activité humaine qui l'atteigne, l'entretienne, la communique. Pourtant, nul ne peut nier que le réel, en tant que tout donné d'avance, est une idée bien difficile à accepter. Il semblerait plutôt que le réel se dévoile à nous à la suite de la connaissance, de l'activité qui lui substitue des structures mentales qui entrent mentalement en jeu. Mais n'y insistons pas.

Le vrai problème, nous semble-t-il, est de savoir si nous pouvons utiliser la notion de structures mentales pour expliquer l'apparition des structures spécialisées dont s'occupent les diverses sciences. Si cela était possible, l'autre question recevrait une réponse en même temps, nous semble-t-il.

Dans notre article, *Remarques sur les Structures mentales* (« *Enfance* », n° 3, 1951, Paris, Presses Universitaires), nous avons parlé de structures mentales somatiques, indiquant par là que nous considérions toute organisation de nos organes à la disposition d'une activité quelconque, comme une structure mentale, même si l'élément somatique prédominait. Depuis que cet article a été écrit, nous avons trouvé expérimentalement que les structures mentales les plus évoluées ont un soutien somatique qui est le même sur tout le corps des sujets et est invariant d'un sujet à l'autre, compte tenu d'altérations dues à la personnalité (1). Pour notre but présent, il suffira de demander au lecteur d'accepter que les structures mentales commencent par être somatiques ou encore que le soma, dans son évolution embryologique, procure toutes les organisations fonctionnelles que nous appellerons les structures mentales somatiques et sur lesquelles se grefferont, ou desquelles jailliront, les autres structures mentales.

Dans la constitution de son expérience, l'homme crée les structures mentales qui remplaceront l'expérience passée et permettront l'expérience future de plus en plus éloignée du support somatique. Cet étagement organique, intégré dans le moi, est l'expérience mentale que le psychologue a à décrire.

La vie embryonnaire, aussi bien que la toute petite enfance, et que le reste de la vie, doit être prise en considération. Dans un autre mémoire : *Psychologie de la pensée ou psychologie de l'intelligence*, nous développerons le détail de ce point. Ici, acceptons que l'expérience humaine suive une direction déterminée du point de vue mental (PIAGET l'a démontré de son point de vue et pour l'intelligence), partant des structures initiales somatiques et se compliquant en structures mentales englobant des structures primitives rendues plus mobiles et plus compréhensives. Ce seront alors les caractères des structures mentales qui formeront les catégories du réel. Les structures les plus anciennes étant support commun pour les structures différenciées. Ce serait par l'intermédiaire des premières que l'expérience individuelle semble une malgré les développements relatifs différents des plus récentes. Les structures somatiques appartiennent à toutes les suivantes, mais les structures plus évoluées (en tant que fonctions du temps) peuvent ne former qu'un type qui se développe sur lui-même, par exemple les structures mathématiques. Ainsi, dans le dessin enfantin on peut déceler une complication *sui generis* indiquant la façon dont l'image se déve-

(1) Voir « Un nouveau phénomène psycho-somatique », C. GATTEGNO, A. GAY, Delachaux et Niestlé, 1952, Neuchâtel.

loppe ; dans les jeux des enfants on trouve une structuration active d'abord qui tend à devenir plus abstraite pour englober plus tard des structures mentales du type mathématique (mots croisés, jeu d'échec, bridge...) ou du type de la physique ou de la chimie (mécano, bateau, expériences avec les couleurs...) ou du type des sciences biologiques (collections diverses, classifications...). Il appert donc que la spécialisation des structures mentales est attachée à un intérêt de l'individu qui trouve dans son milieu, à cause des âges différents des membres du groupe, une expérience objectivée sous forme de structures accessibles. La multitude des combinaisons possibles des spécialisations accessibles rend compte de la multitude des comportements mentaux individuels. Chaque individu peut développer telle ou telle structure mentale au-delà de sa représentation dans le groupe et ajouter aux structures accessibles. L'accessibilité, en fait, résulte de ce que ce sont des structures mentales qui sont objectivées à partir d'autres structures accessibles.

Ce double mouvement d'objectivation de l'individu et d'accessibilité dans le groupe fait que la vie mentale est simultanément une activité individuelle et collective. Du point de vue individuel l'activité est créatrice, même s'il s'agit de structures existant dans l'expérience d'autres membres du groupe. Du point de vue collectif, il y a des structures codifiées et des structures à codifier. Les premières forment la connaissance existante, l'autre la science en train de se faire. Evidemment, c'est par abstraction que nous pouvons les appeler structures collectives. Elles sont présentes dans l'esprit d'un certain nombre de membres du groupe et nous considérons cela comme équivalent à être dans le groupe.

Les enfants actuels trouvent dans le groupe des structures mentales accessibles qu'ils intègrent, ou, mieux, dont ils objectivent les équivalents. L'utilisation des structures somatiques, pour objectiver certaines structures mentales conformes, se fait dans les jeux qui appartiennent au groupe, dans l'apprentissage du langage, dans l'adoption des rites et usages, dans l'adaptation aux conditions géographiques particulières. Mais à côté des structures conformes, il y a la possibilité de combiner les comportements et de produire les nouvelles constellations en variance avec le milieu. C'est cette variation qui introduit l'élément personnel, temporel. Sa poussée est créatrice dans le groupe — par contraste à la créativité individuelle permanente, — mais elle peut laisser sa place à une statification conformiste totale.

Les catégories se forment dans la constitution de structures s'appuyant les unes sur les autres. Si l'individu qui introduit la variation obtient des imitateurs, la variation entre dans les structures conformes dont les variations ultérieures qui en procéderont constituent des branches structurées. Ainsi de la musique. Chaque instrument a son champ, chaque thème ses variantes, chaque combinaison ses exigences et ses possibilités. Ainsi de la physique. Chaque sens a ses qualifications, chaque combinaison de sens ses limitations et ses contributions sous forme d'appareils, chaque conquête instrumentale un champ relatif.

C'est en parvenant à l'exhaustion des capacités d'extension des structures en question et de leur combinaison, que l'esprit saisit le mécanisme de l'objectivation en pleine activité. Tant que l'objectivation est aisée, elle tend à être inconsciente. Dans l'apprentissage de l'enfant, il y a chevauchement entre diverses objectivations nouvelles et l'utilisation automatique de structures antérieures. D'où coexistence, dans tous les esprits, de catégories de toutes sortes, non nécessairement du même niveau, ni même coordonnées.

En résumé, le fait que les mêmes structures initiales donnent naissance à des catégories différentes, n'a rien de contradictoire si on accepte le point de vue de l'objectivation créatrice, de la variation sur les structures collectives. Les catégories des structures, par leur différence, forment les branches du savoir, mais par leur coordination intérieure dans l'individu, soit dans son évolution mentale spontanée, soit dans sa capacité d'objectivation particulière, elles font l'unité de la vie mentale

personnelle et forment le lien entre les branches. Point n'est besoin de faire appel à un Réel, un et permanent, pour cela.

Comme il peut produire la Mathématique, l'esprit humain produit toutes les autres catégories de structures et leur lien en lui est suffisant pour rendre compte de l'applicabilité des Mathématiques au monde physique, biologique ou social. Ce ne serait pas à cause d'une raison transcendante que la Mathématique est adéquate pour la description du réel, mais parce que notre appréhension du réel est atteinte par l'intermédiaire de structures mentales de même essence que les structures mathématiques. La psychologie, ici, enlève à la métaphysique un autre problème et lui donne une réponse immédiate et raisonnable. Il suffit de regarder de quelle façon l'apprentissage de la vie mentale a lieu effectivement dans le temps, pour l'individu et pour la collectivité, pour saisir que la spécialisation des structures mentales est un des procédés par lequel elles se constituent et s'épanouissent.

Dans la prochaine section, nous allons examiner de quelle façon, chez nos élèves, certaines structures mentales se transforment en structures mathématiques. La même étude pour les autres catégories, enrichirait notre compréhension de la pédagogie en action.

3. L'expérimentation en cours.

Le problème que nous nous sommes posé peut s'exprimer ainsi. Les élèves, dans toutes nos écoles, disposent déjà de structures mentales nombreuses : ils peuvent utiliser leur corps, leurs organes des sens, pour se constituer des structures fonctionnelles et des images ; ils sont parvenus à parler et ils jouent plusieurs jeux. Plus tard, ils auront une expérience sociale plus ou moins poussée, sauront évoquer des situations et les suivre en imagination, s'assurant de la vraisemblance de certaines affirmations par un jugement impliquant leur expérience. C'est à partir de ces données que nous devons commencer notre travail de spécialisation.

Il nous semble évident que la base de tout enseignement, mathématique ou autre, doit être formée par les structures existantes. Commençant avec des élèves de l'Enseignement Secondaire, nous avons supposé que le seul acquis présent était la capacité de regarder et d'agir et nous avons établi une suite de situations qui devenaient de plus en plus abstraites, mais qui étaient en rapport avec les premières. Les maîtres n'avaient qu'une tâche : s'assurer que les élèves déplaçaient leur intérêt d'une situation à l'autre après avoir maîtrisé le contenu de la première.

Nous allons ici résumer seulement une de nos recherches pédagogiques se référant à la géométrie. Cela suffira à donner une idée de la méthode. Il nous faut dire aussi que la méthode est beaucoup plus souple que notre exemple et que nous l'avons étendue à l'ensemble du programme scolaire et à une partie de l'enseignement universitaire mathématique.

Une autre remarque préliminaire importante concerne notre croyance que l'enseignement de la géométrie aux élèves ne doit aucunement suivre un ordre logique semblable à celui d'EUCLIDE ou de LEGENDRE. De toute façon les résultats de l'enseignement traditionnel de la géométrie sont hybrides : nous avons deux tendances contraires en action, nous désirons transmettre un sens de la rigueur et nous enseignons que les propositions, vraies localement, sont également vraies dans tout l'espace. ce qui ne peut résulter que d'un traitement très différent de la matière du programme (2).

Nos élèves ont un compas et peuvent dessiner un cercle qui délimite un espace à l'intérieur duquel ils peuvent produire des figures et découvrir leurs propriétés par simple inspection. L'exploration du cercle a lieu d'abord spontanément à l'aide

(2) Notre étude sur cette question paraîtra ailleurs.

du seul compas, les figures obtenues sont colorées et sont d'une variété tout à fait remarquable. L'usage du compas seul permet d'établir une familiarité avec les figures circulaires en particulier : les symétries par rapport au centre ; les cercles concentriques ; les fuseaux ; un certain nombre de divisions du cercle en parties égales superposables par rotation, etc... Un fait remarquable et qui est un tournant dans l'étude spontanée est la sortie à l'extérieur du cercle initial qui a servi d'espace antérieurement. Cela nous annonce que l'élève est prêt à examiner le voisinage et nous en profitons.

Nous demandons alors aux élèves de tracer deux familles de cercles concentriques dont les centres ne sont pas trop éloignés sur une feuille. Si les rayons croissent, on en arrive, en prenant les couples de cercles égaux à voir que les points d'intersections sont alignés. Cette expérience est frappante et tous les enfants suivis (plusieurs centaines depuis cinq ans) sont parvenus à voir le fait, à tracer la droite et à dire des phrases plus ou moins correctes à son sujet. On parvient assez aisément à leur faire découvrir que tous les points de cette droite sont à égales distances des deux centres et que tout couple de nouveaux cercles de mêmes rayons dans la famille fournira des points d'intersection sur la droite.

La règle (ligne droite) est introduite en ce point. Elle est maintenant un instrument utile. On peut l'utiliser pour le lieu ci-dessus, mais aussi pour joindre les deux centres. L'examen de la figure ainsi complétée conduit à de nouvelles découvertes. Les cercles se coupent si leur rayon est supérieur à la moitié de la distance des centres. La ligne des centres est un axe de symétrie. Le lieu ci-dessus par construction divise en deux parties égales la ligne des centres ; la symétrie apprend que les angles sont égaux au point d'intersection, le pliage, si nécessaire, assurera de leur superposition ; les mots : angle droit et perpendiculaire sont acceptés.

De ce début on revient au cercle unique et à l'hexagone inscrit qui n'avait pu être tracé à l'aide du seul compas, mais dont les sommets avaient été trouvés précédemment. La nouvelle figure et ses diagonales fournissent une foule de propositions et l'apprentissage de polygones divers (triangles équilatéraux, losanges, trapèzes isocèles, triangles rectangles) et de leurs égalités respectives qui résultent du groupe des rotations autour du centre. L'abstraction de cet ensemble de chacune des figures crée les structures mentales correspondantes qui gagnent leurs degrés de libertés lorsque l'élève expérimente l'indépendance de ses conclusions des dimensions du cercle initial, de la position du premier sommet de l'hexagone sur la circonférence, de la rotation du cercle autour de son centre, de la translation du cercle sur la feuille, du déplacement de la feuille dans l'espace.

La phase suivante est dans l'utilisation d'un autre cercle centré sur un sommet de l'hexagone et de même rayon. Alors une des diagonales est la corde commune. Ce problème est rattaché au lieu ci-dessus et l'extension évidente est de fixer un des cercles et de diminuer ou augmenter le rayon de l'autre. On obtient les résultats sur les cordes et le diamètre (bissection, orthogonalité, longueur relative comme fonction croissante ou décroissante de la distance au centre, etc...). De plus, la construction d'un triangle et de ses symétriques par rapport aux côtés connaissant les trois côtés s'ensuit.

Pour le moment, le regard et l'action ont suffi à engendrer toute la connaissance mise en relief. Sa vérité résulte de l'évidence mentale que fournissent la perception et l'action. Laissant de côté toutes les extensions possibles de cette méthode à une foule d'autres faits géométriques, voici deux autres extensions des structures mentales existantes dans la direction d'une prise de conscience mathématique plus profonde même si sa rigueur peut paraître insuffisante à certains maîtres.

Les élèves reconnaissent facilement, même à 11 ou 12 ans, qu'on peut tracer une multitude de lignes au tableau ou sur une feuille de papier. Ils reconnaissent également qu'il existe des lignes fermées et d'autres non fermées. Une ligne de la première catégorie a la propriété évidente d'enfermer une partie du plan à son inté-

rieur. En s'assurant que les lignes utilisées ont été déformées par continuité pour être assez simples et ne pas avoir des propriétés gênantes, on peut facilement obtenir des élèves qu'étant donné une courbe simple fermée (C), les courbes non fermées illimitées qu'on peut tracer dans le plan forment trois catégories suivant qu'elles sont tout à l'extérieur de (C), ont des points à l'intérieur de (C) ou touchent (C). Cette classification est purement topologique et les élèves, une fois la surprise passée, arrivent très vite à l'énoncer et à la trouver évidente. Si on remplace la courbe fermée par un cercle et les lignes ouvertes par des droites, on spécialise et on peut dire davantage de choses sur la figure. En particulier les tangentes au cercle et leurs propriétés métriques en découlent.

La seconde extension est une variante de la précédente. Toutes nos illustrations utilisent le contenu intuitif ; maintenant nous allons utiliser intuitivement les sections de DEDEKIND. Etant donné un demi-cercle et une demi-droite, issue du centre, en prenant un point assez proche du centre et le joignant aux extrémités d'un diamètre, nous formons un angle obtus (presque plat) ; en choisissant un point très éloigné sur la demi-droite, l'angle correspondant obtenu est presque nul, il est aigu visiblement. Tous les points au-delà de celui-ci, ou en-deçà du premier, jouissent de leurs propriétés respectivement et nous formons deux classes de points sur la demi-droite, ceux qui fournissent un angle aigu et dont le sommet se trouve à l'extrémité du demi-cercle, ceux qui fournissent un angle obtus et sont à l'intérieur. Le point sur la circonférence n'est ni dehors, ni dedans, l'angle formé n'est ni aigu, ni obtus, il est droit.

Bien que convaincu que nous aurons contre nous beaucoup de professeurs de Mathématiques, il nous a semblé nécessaire d'accepter de prêter notre flanc à leurs critiques, espérant tout de même que certains de nos collègues de l'Enseignement Secondaire trouveront dans notre suggestion une solution à leurs difficultés sans tomber dans le ridicule des méthodes enfantines. En effet, il nous semble que le sacrifice de rigueur de notre part n'est rien si nous pensons que nos élèves, de toute façon, ne l'apprécient pas comme nous, et que dans notre propre pensée la perception, l'action, l'intuition, jouent un rôle constant et créateur. Dans notre traitement de ces points du programme nous avons conservé l'attitude du mathématicien qui, par inspection intellectuelle d'une situation, déduit ou abstrait ce qui lui paraît significatif et alors seulement y met de l'ordre, ce que nous appelons rigueur. Nos élèves formés par nos méthodes sont bien plus alertes que ceux qui étudient les cours traditionnels et moins enclins à croire que les Mathématiques sont une science empirique où tout s'établit par des mesures approchées.

Conclusion.

Nos trois sections sont très différentes apparemment, la dernière étant très élémentaire et les deux autres très générales. Le contraste est surtout dû au fait que le domaine qui nous a occupé est très vaste et que le vocabulaire utilisé est en train d'être établi. Il nous a semblé nécessaire de dire ce que le psychologue peut apprendre du mathématicien moderne, et celui-ci du psychologue moderne. La synthèse finale est sur le terrain pédagogique où l'évolution de la pensée est une condition du succès et où la Mathématique peut gagner tout son sens d'activité mentale pour le maître et l'élève. De plus, il y a là un nouveau terrain à explorer pour les maîtres qui n'ont pu parvenir à se consacrer à la créativité mathématique et qui savent que leur premier devoir est de faire que leurs élèves les dépassent et entrent dans l'avenir bien équipés et si possible, non seulement non-traumatisés, mais heureux.

Seuls, les maîtres dans leur travail quotidien peuvent faire la synthèse qui s'impose aujourd'hui. En examinant la texture de leur activité et celle de leurs élèves ils découvriront la vérité de la psychologie de la pensée.

Cette courte analyse devrait être considérée comme une contribution modeste à cette immense tâche pleine de promesses.

Caleb GATTEGNO.