III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

LE DANGER DU FORMALISME ET DU VERBALISME DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE (1)

I. *FORMALISME ET VERBALISME DANS LA PENSEE MATHEMATIQUE DE L'ELEVE.*

L'un des buts principaux de l'enseignement des Mathématiques est d'éveiller et de développer chez l'élève une attitude active qui se manifeste surtout dans une certaine disposition à s'attaquer aux problèmes de manière efficace. L'attitude active à l'égard des problèmes scientifiques et de ceux de la vie pratique, l'habitude de poser correctement un problème, de rechercher la solution la plus juste, le choix de la meilleure voie possible, la capacité de prévoir et d'apprécier d'une manière critique les résultats : voilà les bases essentielles d'une véritable formation scientifique. Un enseignement des Mathématiques qui soit en accord avec les progrès de la science et de la psychologie, nous donne la possibilité de réaliser ces buts. Au contraire, les erreurs commises par les professeurs dans leur enseignement peuvent déformer la pensée de l'élève d'une manière encore plus nuisible dans le domaine des Mathématiques que dans celui des autres disciplines.

Je voudrais étudier dans cet article deux déformations possibles de la pensée de l'élève, que l'on appelle le « formalisme » et le « verbalisme ». L'attitude active de l'élève ne me semble possible que dans le cas d'une assimilation profonde des idées, d'une juste et consciente interprétation des symboles et d'une compréhension du sens des opérations exécutées. De plus, une certaine habileté dans le domaine des opérations élémentaires est indispensable et permettra à l'élève de se concentrer sur le nœud du problème. L'automatisation des opérations élémentaires, ainsi que l'attitude active vis-à-vis des problèmes, se complètent mutuellement, assurant l'habileté dans l'usage de l'appareil mathématique.

En utilisant le terme « formalisme » (2), dans son sens négatif, j'ai en vue le développement exagéré de l'un des facteurs précités qui déséquilibre le raisonnement au profit d'une automatisation excessive. Dans ce cas, les élèves qui ont assimilé le matériel didactique et comprennent en principe les notions et les théorèmes, adoptent avant tout les formules. Ils résolvent facilement les problèmes-types, mais sont désorientés lorsque des situations nouvelles leur sont proposées, car ils n'ont pas de notions suffisamment actives de l'espace et des quantités. La formule remplace le bon sens.

Quant au « verbalisme », il consiste en une simple exécution des opérations et des constructions sans que l'on ait le souci de leur signification. L'élève se borne à citer des définitions et des propositions sans être capable de les interpréter dans chaque cas concret.

L'analyse du processus du raisonnement de l'élève et celui des causes et des conditions de ses déformations sont de la plus grande importance pour le professeur. En particulier, l'examen des erreurs commises par les enfants nous offre l'un des

---

(1) Nous remercions nos amis de *Mathematica et Paedagogia*, qui nous ont autorisé à reproduire cette étude dont l'auteur est une Collègue qui exerce à Cracovie (Pologne).

(2) B. Iwaszkiewicz : « Formalisme dans l'enseignement des Mathématiques ». *Matematyka*, Nr. 1, 1948, Warszawa, P.Z.W.S.

aspects de ce problème. Car une erreur essentielle qui se répète constamment et ne peut être due à une défaillance de la mémoire est le signal alarmant extérieur de ce qui se passe dans le cerveau de l'élève, et ne peut être négligée.

Mon article sera consacré à l'analyse des fautes les plus frappantes et les plus fréquentes commises par des élèves plutôt faibles, dans le domaine des transformations algébriques et à leur confrontation avec des erreurs commises par les professeurs dans leur enseignement. Je citerai tout d'abord quelques réponses typiques choisies parmi le grand nombre de celles que j'ai étudiées.

II. *LES REPONSES DES ELEVES ET LEUR ANALYSE.*

A. 1) « $-a(x+1) < b$, donc $x+1 > -\frac{b}{a}$; en divisant les deux membres de l'inégalité par un nombre négatif, je change le sens de l'inégalité. »

2) L'hypothèse « a est un nombre négatif » : l'élève note « $-a$ ».

3) $\sqrt{-\cos^2 x}$ n'a pas de sens, car sous le signe du radical il y a un nombre négatif.

B. 1) L'élève écrit « xy » pour représenter un nombre composé de deux chiffres (x le nombre des dizaines, y celui des unités).

2) L'élève substitue dans l'expression xy les valeurs $x = -3$, $y = -2$ et obtient $-3-2 = -5$.

C. 1) L'élève lit l'expression $x^2 + y^2$ comme le carré de la somme $x + y$.

2) « $\frac{\log x}{\log y} = \log x - \log y$, car le logarithme du rapport égale la différence des logarithmes. »

3) « $a^5 + 1 = a^2 . a^2 . a + 1$ » ; j'ai décomposé le polynôme en facteurs.

D. 1) Un élève résout une équation : « $x(2a + b + c) = a^2$; je dois d'abord ouvrir la parenthèse : $2ax + bx + cx = a^2$; il me *faut* placer les x d'un côté, ah ! elles sont du même côté ; il faut réduire les expressions semblables ; impossible ! donc je mets x en évidence : $x(2a + b + c) = a^2$. »

2) Un élève transforme un radical du second degré : « $\sqrt{a^3 . a^5} = \sqrt{a^3} . \sqrt{a^5}$; pour obtenir le radical du produit, il *faut* extraire séparément le radical de chaque facteur ; $\ldots a\sqrt{a} . a^2\sqrt{a} = a^3\sqrt{a^2} = a^4$; je transmets tout ce qui est possible avant le signe du radical, etc... »

3) En Septième, je procède à l'essai suivant : j'écris au tableau le produit $0{,}12 \times 0{,}3$ et je demande aux élèves d'effectuer mentalement ce calcul. J'aperçois qu'elles « écrivent » mentalement le produit 12×3 et « séparent » en imagination dans leur résultat trois places décimales. J'écris ensuite au tableau $\frac{12}{100} \times \frac{3}{10}$ et je demande de calculer le produit mentalement. Les élèves calculent « le produit du numérateur par le numérateur, etc... » comme si elles avaient obtenu un nouveau problème sans lien avec le précédent.

E. 1) en Neuvième, nous discutons la solution $x = \pm\sqrt{-b/a}$ de l'équation $ax^2 + b = 0$ et en particulier le cas trivial $x^2 = 0$. Puis nous demandons aux élèves s'il n'est pas possible de réduire la résolution de l'équation $x^2 + 6x + 9 = 0$ à celle de l'un des cas précédemment débattus. L'un des élèves écrit :

$$x^2 = -6x - 9 \; ; \; x = \pm\sqrt{-6x - 9}$$

et il est certain d'avoir résolu l'équation.

2) J'ai rencontré des élèves qui résolvaient l'inégalité $x^2 + 4 > 0$ de la sorte :

« $x^2 > -4$, $x > 2i$ ou $x < -2i$ » ; d'autres qui raisonnaient ainsi : « $x^2 > -4$; cette inégalité est insoluble, car les nombres négatifs n'ont pas de racines carrées. »

3) En résolvant une équation dont les coefficients sont fractionnaires, un élève constate : « On *peut* multiplier les deux membres de l'équation par le même nombre non nul. » Je lui demande ce que signifie ici « on peut ». Il répond : « L'équation n'en sera pas changée. » J'exprime un doute : « Comment cela ne changera-t-il pas ? Si tu procèdes à la multiplication, c'est pour que cela change ! Tu as ici deux équations : l'une a des coefficients fractionnaires, l'autre n'en a pas. » L'élève, abasourdi, se tait, il ne peut pas prendre conscience de ce qui « ne changera pas ». Pour mettre fin à cette discussion désagréable, il calcule rapidement et correctement, puis, avec un sentiment de libération, il écrit enfin la racine de l'équation.

F. 1) Un élève de Huitième calcule :

$$« -\frac{13}{3} - (-\frac{7}{3})^2 = -\frac{13}{3} + \frac{7^2}{3}$$

parce que moins et moins donnent plus ; si le signe moins précède la parenthèse, il *faut* supprimer la parenthèse et changer les signes à l'intérieur des parenthèses. »

2) Un élève de Dixième écrit : $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$ et aussi

$$\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \sin 2\alpha$$

(« on doit simplifier la fraction »).

3) Un autre élève de la même classe écrit : $\sqrt[3]{\sin^3 x + \cos^3 x} = \sin x + \cos x$, car « on *peut* diviser par 3 les exposants du radical et de la puissance ». Après un moment de réflexion, il soupçonne avoir commis une faute et il dit : « On ne *doit* pas simplifier la somme de cette façon. » Nous lui demandons pourquoi « on ne doit pas le faire », mais il ne sait que répondre. Il se rappelle la définition du radical, mais ne sait pas l'utiliser.

4) En Septième, une élève calcule :

« $4(x + y) + 5(x - 2y) = 4x + 4y + 5x - 10y = 9x - 6y = 3xy$. »

Et elle explique : « Mon théorème énonce qu'il *faut* réduire la somme à la forme la plus simple. L'expression $9x - 6y$ n'est pas encore la plus simple puisqu'elle se compose de deux termes. » Après un instant de discussion, l'élève est d'avis qu'elle s'est trompée, car « il est défendu de réduire des termes dissemblables ». D'après son opinion spontanée, elle a mal agi, car « cela était faux », mais non pas parce que la proposition était inexacte.

Une analyse plus détaillée des réponses précitées (et d'autres que j'ai étudiées) nous conduit à des conclusions nombreuses et intéressantes. Le cadre de cet article ne me permet pas de les exposer toutes. Je me limiterai à quelques points importants du point de vue des résultats de l'enseignement et du développement de la pensée mathématique de l'élève.

Les malentendus dans la compréhension du symbole.

La base commune des fautes précitées semble consister dans le fait que les élèves plutôt faibles ne comprennent pas le symbole algébrique, qu'ils ne savent pas lire la notation symbolique et ne savent pas transcrire ce qu'ils expriment oralement.

Schémas sans contenu. — L'analyse des réponses des élèves suscite de graves incertitudes quant à la valeur éducative de l'enseignement de l'algèbre tel qu'il est donné à des élèves moyens. Leur savoir se borne à certains schémas de calcul assimilés d'une façon incorrecte. Dans aucun des cas cités, les élèves n'ont essayé de faire précéder le calcul de l'analyse qualitative de la situation. Ils ont entrepris un

calcul écrit sans réflexion préalable et ont procédé plus ou moins vite, soit correctement, soit d'une façon erronée, à des opérations mécaniques ; celles-ci leur sont dictées par l'algorithme qui est souvent choisi à l'aveuglette.

Par exemple, l'élève D1 transforme l'équation, puis elle revient à la forme primitive à l'aide d'une transformation inverse, sans s'apercevoir de l'absurdité de sa démarche ; elle applique un schéma de résolution stéréotypé.

L'élève D2, au lieu de procéder directement aux opérations dans leur suite annotée, complique les transformations en appliquant automatiquement des théorèmes sur les radicaux. L'exemple D3 nous permet d'observer le formalisme dans son inaptitude frappante. Le double calcul nous prouve le manque de liaison des signes et des notions.

Les élèves E1, 2, 3, appliquent sans réflexion des schémas de calcul dont ils se souviennent, mais n'ont plus conscience de leur signification. Ils ne saisissent pas le contenu réel de la situation présentée par une équation ou une inégalité. Les élèves F2, 3, 4, ne se rendent pas compte que les phrases énoncées doivent exprimer la vérité. Ils réduisent des groupes de signes, à « tout prix », à leur « forme la plus simple ». Le signe d'égalité placé entre des expressions écrites les unes à la suite des autres ne les gêne nullement.

Le développement erroné des réflexes aux stimulants visuels. — Tous les exemples cités, et F en particulier, illustrent le danger suscité par une réaction automatique et défectueuse à certains stimulants visuels. Voici quelques réactions typiques non contrôlées : la présence des parenthèses et du signe « moins » qui les précède, engage l'élève à les éliminer et à changer les signes des termes situés à l'intérieur d'elles — indépendamment de la fonction remplie par ces parenthèses dans l'ensemble de l'expression. La barre de fraction et la présence d'un numérateur et d'un dénominateur présentant des similitudes, engagent l'élève à supprimer la barre de fraction, indépendamment de la forme du numérateur et du dénominateur. Le même nombre figurant dans les exposants du radical et de la puissance placée sous le signe du radical engage l'élève à le supprimer sans analyser la structure de l'expression. Il est facile de citer beaucoup d'autres exemples semblables. Dans tout ceci, un élève plutôt faible ne saisit pas l'ensemble de l'expression. Un fragment de l'ensemble des signes qui le frappe de prime abord produit un réflexe rapide et se traduit par une simplification, l'omission de parenthèses et le changement des signes. L'élève ne se demande pas si ces démarches le conduiront à un résultat correct ou non ; aussi, dans bien des cas, le résultat correct n'est-il que l'effet du hasard.

En nous rendant tous les jours à notre travail, nous traversons la chaussée, par réflexe, toujours au même endroit, et nous tournons la tête, par réflexe, du côté d'où pourraient arriver des voitures. Ces deux réflexes associés conditionnent notre traversée et la rendent sans danger. Les démarches des élèves nous rappellent plutôt celles d'une personne qui ne disposerait que d'un seul réflexe, celui de l'engagement automatique sur la chaussée. Cette personne serait perpétuellement menacée d'être renversée par une voiture. De même, l'élève dont le réflexe unique se borne aux facteurs visuels est menacé d'erreurs.

Le code algébrique d'ordonnance et de défense. — En général, les élèves justifient les transformations algébriques auxquelles ils ont procédé en citant les prescriptions d'une espèce de « code algébrique » : « cela est défendu » ; « il faut procéder ainsi et non autrement ». Il serait vain d'espérer une explication de ces interdictions. Proviennent-elles d'un code ? Sont-elles le résultat de la fantaisie d'un mathématicien créateur de l'algèbre ? Nous voudrions entendre une seule réponse : « Il ne faut pas écrire ainsi, car cela ne serait pas vrai », ou « on ne peut pas transformer ainsi notre équation, car nous en obtiendrions une autre qui aurait des racines différentes de celle que l'on nous a donné à résoudre ». Hélas ! il est rare d'entendre ces réponses énoncées par des élèves. Un code formel de défenses et d'ordonnances a effacé dans leur esprit le sens de leurs actes. Il ne leur reste que « la lettre de la loi ».

III. *CERTAINES SOURCES DES ERREURS COMMISES PAR LES ELEVES EN ALGEBRE.*

Difficultés conceptuelles, techniques et psychologiques, liées à la symbolique algébrique.

L'histoire des sciences nous apprend que l'introduction du calcul symbolique en Mathématiques a modifié profondément leur développement. La voie qui y conduisit fut complexe. La représentation du nombre et de la variable au moyen de lettres de l'alphabet résulta de nombreuses expériences et d'essais d'amélioration des moyens qui exprimaient et fixaient les pensées mathématiques. Au cours des siècles précédents, des mathématiciens géniaux ne disposaient pas des instruments élémentaires de la pensée abstraite que l'on offre aujourd'hui aux élèves des écoles primaires et secondaires. Il est bon de s'en souvenir si l'on veut se rendre compte que la compréhension de la symbolique algébrique n'est guère facile pour l'élève et demande une élaboration méthodique, perspicace et très soignée.

1. Le passage du concret au symbole, des mots aux signes, constitue pour l'élève une difficulté fondamentale. De plus, nous devons tenir compte, en introduisant le calcul symbolique, des difficultés propres à ce nouveau langage. Nous les discuterons en détail :

1. En algèbre scolaire, nous utilisons souvent le même signe dans des significations différentes. Ainsi, le signe « — » est le symbole de la soustraction (par exemple la notation $8 - 2$ est lue « huit moins deux »), ou bien il est signe d'un nombre relatif (par exemple -2, « moins deux »), ou bien il est signe d'une opération que l'on pourrait appeler « création du nombre opposé au nombre donné » (par exemple $-(-2)$ que nous entendons comme « le nombre opposé au nombre -2 »).

Les propositions algébriques, et en particulier la relation entre l'addition et la soustraction des nombres relatifs et les conventions qui simplifient l'écriture de la somme algébrique, permettent fréquemment d'interpréter de deux façons le même ensemble de signes. Ainsi, le symbole « -2 » peut être interprété en tant que symbole d'un nombre négatif ou en tant que symbole d'un nombre opposé au nombre 2 ; l'expression $a - b$ détermine la somme du nombre « a » et du nombre « opposé à b», soit le résultat de la soustraction des nombres « a » et « b ». Pour les élèves débutants, la double ou triple signification des signes « — » et « + » peut être sujette à malentendu. Les fautes du type A 1, 2, 3, en sont la preuve.

Une autre source d'erreur provient du manque conventionnel de signe entre les symboles. Par exemple le symbole 2 1/2 exprime la somme $2 + 1/2$ et la notation analogue $2a$ exprime le produit de 2 par a. Le signe 25 n'exprime pas le produit de 2 par 5, mais ab signifie le produit de a par b. Ces faits constituent une difficulté pour nos élèves. Les fautes du type B 1, 2, en sont la preuve ; elles sont le résultat d'un profond malentendu qui résulte de la confrontation formelle du symbolisme algébrique avec le système décimal de position.

2. La notation algébrique est reliée aux conventions qui ont trait à l'ordre de l'exécution des opérations. Ces conventions définissent la structure de l'expression algébrique qu'il faut avoir comprise pour pouvoir la lire et la nommer convenablement. Les fautes du type C 1, 2, 3, nous disent que les élèves ne coordonnent pas ces conventions et qu'ils lisent l'expression sans en avoir analysé la structure.

3. La représentation d'une variable par un symbole littéral est un problème difficile du point de vue scientifique et méthodologique. Que signifie pour un élève de Septième, par exemple, la lettre « a » dans le symbole $2a^4$? Désirons-nous qu'il la comprenne en tant que signe du nombre que nous n'aurions pas noté par un chiffre, ou bien cette lettre doit-elle toujours représenter pour l'élève une variable, un lieu vide, qu'on pourrait remplir par des « valeurs concrètes » ? Nous nous demandons si $2a$ doit être, pour le débutant, le symbole d'un nombre ou celui d'une fonction ?

Et comment nous devons interpréter, au début de l'enseignement de l'algèbre, les concepts de « monôme », de « polynôme » et de « fraction algébrique » ? Dans les classes inférieures, il est difficile de poser ces questions d'une façon tout à fait nette et de les présenter sous une forme logiquement irréprochable. De ce fait, les définitions de certaines notions fondamentales de l'algèbre scolaire ne sont pas, en général, des définitions rigoureusement mathématiques, mais le plus souvent, des descriptions plus ou moins intuitives dont peuvent découler certains malentendus. En particulier, on voit naître des difficultés quand apparaissent les paramètres dans les expressions algébriques. L'élève rencontre alors deux espèces de variables : en effet, le paramètre est une variable qui cesse de l'être au cours d'une partie du raisonnement. Il n'est pas facile, dans ce cas, de procéder méthodiquement du point de vue de la compréhension de l'élève et en même temps assez strictement du point de vue de la rigueur scientifique. Un des moyens formels qu'utilisent les manuels pour faciliter à l'élève cette distinction consiste à désigner les grandeurs variables par les lettres finales de l'alphabet et les grandeurs constantes par les lettres initiales. Ceci donne de mauvais résultats quand l'élève rencontre des équations et des fonctions en géométrie et en physique, parce que les inconnues y sont désignées par d'autres lettres, telles que h, v, d et c. L'élève ne reconnaît pas le trinôme du deuxième degré dans l'expression $s = Vt + 1/2\, gt^2$, car les lettres x et y n'y apparaissent pas.

4. Il est difficile de concilier l'automatisation et la prise de conscience. Si nous exigions de l'élève qu'à chaque transformation de son calcul algébrique il se rende compte totalement de la signification des symboles utilisés, nous ne pourrions pas lui apprendre à manier rapidement des algorithmes. Au cours d'une discussion sur le formalisme, un de nos mathématiciens éminents constata que le calcul automatique permet au mathématicien de reposer son esprit, qui est alors en mesure de s'attaquer d'une façon créatrice à de véritables problèmes. D'autre part, nous constatons souvent dans notre enseignement, qu'en raison même de cette exclusion momentanée de la conscience, l'élève commet des fautes flagrantes. Il ne se préoccupe pas des notions, mais de signes dépourvus de sens. Il jongle avec des symboles suivant des règles comprises formellement et poursuit des analogies extérieures ; des non-sens en résultent, telles les fautes E 1, 2 et F 1, 2, 3, etc... Le caractère formel du calcul algébrique facilite l'usage du calcul verbal dépourvu de réflexion. La mécanisation des activités a lieu, chez certains élèves, plus vite que leur compréhension. D'autres élèves procèdent tout d'abord d'une façon consciente, puis, en raison de l'automatisme établi, oublient ce qu'ils avaient compris, au point qu'il leur est très difficile de se rendre compte clairement du sens des symboles en jeu. Le danger consiste en ce qu'un élève peut très bien, au début de l'algèbre, transformer correctement les expressions tout en n'y comprenant rien ; dans la suite, sa connaissance purement mnémotechnique des règles de calcul craque sous le poids croissant des notions, des symboles et des théorèmes. C'est alors qu'apparaît au professeur le vide du cerveau de l'élève. Il en est frappé et il est porté à croire que l'élève a changé. En réalité, le maître ne s'est pas aperçu à temps du vide que dissimulaient des jongleries qui semblaient correctes.

Songeons aussi qu'il est psychologiquement difficile pour un élève de s'opposer à l'appel pressant et suggestif des signes opératoires que lui présente chaque expression algébrique. Dans bien des cas, l'élève considère qu'une expression est « dépourvue d'équilibre » tant qu'elle n'a pas acquis cette « bonne forme » appelée en algèbre scolaire « forme la plus simple », c'est-à-dire aussi longtemps qu'il s'y trouve un signe opératoire. Que d'efforts (exemple F 2, 3, 4) pour lutter avec les tendances à simplifier et à réduire, à tout prix, sans rapport avec le sens des opérations. Ainsi l'élève F 4 est inquiète de voir la somme $2x + 7y$, car il y a ici une addition « qu'il faut effectuer » ; par contre, le résultat $9xy$ ne l'inquiète guère, car l'appel à l'action ne s'y trouve pas (la multiplication ne possédant pas de signe). Les erreurs que nous avons observées ont leur logique, elles sont possibles du point de vue psychologique. La tendance à transformer les expressions algébriques de « l'équilibre instable » à

une « bonne forme » explique la fréquence de certaines fautes (qui ont d'ailleurs d'autres et nombreuses raisons). L'élève faible n'écrira jamais $\sqrt{a^2+b^2}=\frac{a}{b}$, mais il écrira souvent $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$; il n'écrira pas $3x+5y=3x-5y$, mais souvent $3x+5y=8xy$. J'ai observé des élèves qui déposaient leurs plumes dans l'attitude d'un devoir bien accompli lorsqu'à la suite de plusieurs erreurs commises pendant les transformations, tout « se réduisait à zéro ». « L'équilibre » de leur expression algébrique était complet ; « la forme la plus simple » obtenue ! Ces élèves ne se souciaient nullement du contenu du problème.

L'ENSEIGNEMENT « FACILITÉ FORMELLEMENT ». — On peut trouver la cause de certains erreurs de calcul algébrique dans l'attitude du maître dont l'enseignement est « facilité formellement ». Cet enseignement se caractérise par : 1° la non-évaluation de certaines difficultés éprouvées par les élèves ; 2° l'attitude des maîtres qui aperçoivent ces difficultés, mais les écartent au lieu de les combattre ; 3° leur désir de faciliter momentanément l'enseignement aux élèves, facilité superficielle qui permet de glisser à la surface sans atteindre au fond des choses ; 4° le désir d'atteindre rapidement des résultats spectaculaires, un manque de souci éducatif.

Le but de l'enseignement consiste à alléger la peine des élèves. Pourtant, si l'on veut réellement leur faciliter la compréhension de la vérité, il faut, dans bien des cas, leur rendre l'étude plus difficile. L'élève apprend plus rapidement qu'il ne comprend, devine plus vite qu'il ne raisonne. Il ne se rend pas compte réellement de ce que signifie « comprendre » et identifie la compréhension à la mémoire. Le maître doit faire apparaître le problème aux élèves qui ne le voient pas encore et compliquer apparemment ce qui semble très simple et ne l'est pas en réalité. Sa tâche consiste à rendre inquiet le cerveau de l'enfant, à le faire douter si c'est nécessaire. S'il ne le fait pas, il se borne à une assimilation toute extérieure et ouvre la voie au verbalisme dans la pensée.

Le cadre de cet article ne me permet pas de rendre compte en détail des erreurs méthodologiques commises au cours des leçons auxquelles j'ai assisté. Ces leçons étaient « facilitées formellement » ; on y observait sur le vif la genèse des fautes futures — le verbalisme et le formalisme *in statu nascendi*. En voici quelques exemples frappants :

1. *Contrôle inexact du processus psychique de l'élève ;* une trop brève analyse du degré d'assimilation du matériel, le manque de distinction entre la rétention dans la mémoire et la compréhension.

2. *Asservissement prématuré aux règles, qui diminue l'activité de la pensée créatrice de l'élève.*

Les théorèmes de l'algèbre sont souvent exprimés sous forme de règles génétiques de laboratoire ; pour augmenter leur « opérativité », on leur donne la forme d'ordonnances, de défenses et de permissions. « L'opérativité » ne s'obtient souvent qu'au prix fort dangereux du formalisme. L'énoncé : « Si les deux membres de l'équation sont multipliés par le même facteur différent de zéro, on obtient une équation qui a les mêmes racines que l'équation donnée », est moins opératif que celui-ci : « Il est permis de multiplier les deux membres de l'équation par le même facteur différent de zéro. » Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, l'emploi de règles telles que cette dernière supprime dans l'esprit de l'élève la compréhension du terme « il est permis ». La tendance à « l'opérativité » à tout prix conduit à enseigner des règles incorrectes dont voici des exemples : « Pour multiplier une somme par un nombre, *il faut* multiplier chacun de ses termes par ce nombre et additionner les produits obtenus » ; « pour extraire la racine d'un produit, *il est nécessaire* d'extraire séparément la racine de chacun des facteurs » ; « le logarithme d'un produit s'obtient en additionnant les logarithmes de chacun des facteurs ». Ces règles

ne sont pas correctes. Pour multiplier la somme $(2+3)$ par le nombre 7, on peut multiplier chaque terme par le nombre 7 et calculer $7.2+7.3$, mais ce n'est pas nécessaire, car on peut opérer autrement : $7.5=35$. Pour calculer $\sqrt{a^5.a^8}$, on peut extraire le radical de chaque facteur, mais cela n'est pas nécessaire, car on peut calculer plus simplement : $\sqrt{a^8}=a^4$. L'emploi des tables (selon la règle citée) pour calculer $\log(0{,}2\times 5)$ serait ici preuve d'inaptitude. En suggérant une voie unique, les préceptes opératifs, mis sous forme d'ordonnances rigoureuses, excluent le choix conscient et réfléchi d'une méthode de résolution. Je crois que dans les cas où la règle opérative fixe une façon d'agir parmi d'autres également correctes, il est nécessaire de le signaler par une phrase. A l'aide d'une directive générale, nous pourrons aider les élèves à comprendre l'expression « on peut » en reliant « les lois formelles » aux conventions qui se rapportent à la succession des opérations. Par exemple : « Les propositions algébriques permettent parfois d'abandonner ces conventions, car certains théorèmes nous garantissent le même résultat malgré le changement d'ordre des opérations. Veux-tu changer la succession des opérations indiquée dans la notation ; attention ! réfléchis, en as-tu le droit, et est-ce que cela en vaut la peine ? »

3. *Manque de liaison convenable des théorèmes algébriques avec les propriétés arithmétiques déjà connues.*

L'algèbre scolaire n'est pas une théorie polyvalente. Ses symboles ont pour l'élève une interprétation unique. Ils représentent les nombres, les variables, soit aussi des fonctions numériques définies dans l'ensemble des nombres. « Les lois des transformations » sont des théorèmes concernant les nombres et les fonctions numériques. La compréhension de ces théorèmes est conditionnée par une exposition « correcte des lois formelles » lors de l'enseignement de l'arithmétique.

Ainsi, pour un enfant auquel on a enseigné l'arithmétique méthodiquement, la proposition $ab=ba$ possède un sens concret. Les deux facteurs ont pour lui une signification différente et la notion de produit se relie à une action concrète. Disposer des livres par dizaines sur six rayons n'est pas la même chose que disposer des livres par six sur dix rayons. L'égalité $6.10=10.6$ exprime donc pour l'enfant un fait réel. Pour calculer $2.3=3+3$, l'enfant agit différemment que pour calculer $3.2=2+2+2$, et l'égalité $2.3=3.2$ rend possible la diversité du choix. Le produit $\frac{4}{7}.\frac{2}{3}$ exprime $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{3}$ et le produit $\frac{2}{3}.\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{7}$. L'égalité $\frac{4}{7}.\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.\frac{4}{7}$ n'est une proposition ni banale, ni évidente. Elle introduit une propriété inattendue, celle des fractions-opérateurs. La loi $ab=ba$, ainsi que les autres « lois formelles » ne doivent pas être pour l'enfant uniquement formelles. L'enseignement « formellement facilité » néglige cet aspect et engendre le futur verbalisme en algèbre.

4. *Usage inconsidéré de l'analogie par le professeur.*

L'analogie est une source de découvertes, d'idées nouvelles et de généralisations. Le sens de l'analogie rend possibles la synthèse de divers domaines scientifiques et le transfert de méthodes connues, d'une discipline à une autre.

L'analogie peut et doit jouer un rôle important dans l'enseignement des Mathématiques. Le sens de l'analogie stimule la pensée. Cependant une argumentation basée sur l'analogie ne peut conduire qu'à l'énoncé d'hypothèses qui doivent être ensuite vérifiées par un raisonnement rigoureux. La nécessité de cette vérification ne paraît guère évidente à l'élève débutant, dont l'esprit n'est pas encore critique. Il est porté à généraliser trop hâtivement. Par exemple, étant donné que le produit d'une somme par un nombre égale la somme des produits et que la mesure de la somme de plusieurs segments égale la somme de leurs mesures, l'élève est enclin à conclure que « le logarithme de la somme égale la somme des logarithmes ». De même, étant donné que plusieurs propriétés des radicaux ressemblent formellement aux propriétés des puissances, l'élève est enclin à penser que toutes les transformations des radi-

caux peuvent être effectuées comme celles des puissances. Souvent aussi, l'élève écrit $\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a} = \sqrt{a}$, bien qu'il ait étudié le théorème sur le produit des radicaux. Dans ce cas, l'analogie agit plus fortement sur l'imagination de l'élève que le théorème démontré précédemment. L'utilisation du principe d'analogie dans l'enseignement de l'algèbre exige donc une extrême prudence.

5. *Contrôle non rigoureux des réactions provoquées par les stimulants visuels.*

6. *Importance excessive accordée au calcul écrit et sous-estimation du calcul mental et des spéculations qualitatives.*

De nombreux professeurs accordent au calcul écrit une trop grande valeur, en raison de sa fonction « d'exerciseur », et oublient que le calcul mental suscite des démarches intellectuelles autrement importantes que celles qui accompagnent le calcul écrit automatique. L'élève privé totalement ou partiellement de la possibilité d'écrire est dépourvu des associations liées directement aux stimulants visuels. Il est forcé de pénétrer plus profondément dans la question et de prendre conscience clairement des notions qu'il utilise. Cette nouvelle situation éveille son activité, mobilise les dispositions psychiques qui, autrement, demeuraient inactives. En obligeant l'élève à calculer mentalement la différence de deux nombres relatifs, de calculer sans table $10^{\log 5} + 10^{\log 3}$, de résoudre « sans calcul » le système de deux équations $x+y=5$ et $2x + 2y = 10$, ou l'inégalité $\sin x + \cos y > 2$, nous approfondissons et fixons les notions de différence, racine du système d'équations, racine de l'inégalité, logarithme, $\sin x$, $\cos x$ et parallèlement nous contrôlons si elles ont été assimilées correctement. Le calcul mental et les résolutions « qualitatives » de problèmes forment le contrepoids des réflexes conditionnés aux stimulants visuels qui sont le résultat d'un manque de vigilance du maître.

Dans le même ordre d'idées, il faudrait aussi réviser certaines recettes telles que « nous ajoutons des zéros », « nous simplifions », « nous supprimons les parenthèses », etc...

Le calcul écrit formel est une acquisition importante sans laquelle la Mathématique n'aurait pu atteindre son niveau actuel. Il faut donc la rendre assimilable par les élèves et la construire sur des notions fortement établies, et non dans le vide.

7. *Blocus des occasions d'erreur.*

Cette ruse didactique consiste dans le choix, par le professeur conscient des difficultés de l'élève, de voies de raisonnement où l'occasion de commettre des erreurs soit minime. Certains manuels nous en offrent des exemples. Les exercices sont groupés systématiquement suivant certains modèles ; les instructions sont tellement suggestives qu'il est bien difficile, même pour un élève très faible, de commettre une erreur. Un tel blocus d'erreurs ne donne qu'apparemment des résultats positifs. Ce qui était obscur dans le cerveau de l'enfant demeure obscur encore, bien que le signal-erreur n'ait pas eu lieu. Cette façon de procéder donne des illusions aux professeurs et aux élèves, et le premier pas sur la voie du verbalisme est franchi, l'omission des difficultés n'étant pas équivalente à la victoire remportée sur elles.

8. *Négligences concernant l'élaboration des méthodes d'autocontrôle des élèves.*

Il s'agit en particulier du fait que le professeur attribue trop peu d'importance aux différents procédés de contrôle des résultats, contrôle exact ou taxatif, contrôle au moyen d'une interprétation concrète, etc... N'oublions pas que la vérification au cours de laquelle on renverse certaines situations et on remplace certaines opérations par leurs inverses, possède une grande importance dans l'acquisition des notions. Par exemple, à la suite d'un calcul formel, l'élève vérifie une équation. Au cours du calcul, il n'a pas réfléchi à ce que sont l'équation et ses racines. En la vérifiant, il doit en prendre conscience ; de même, en vérifiant le résultat d'une soustraction, il pense à la définition de la différence et en vérifiant le résultat de la division, à celle du quo-

tient. La vérification peut être aussi un moyen de rendre l'élève conscient de la source de son erreur. Réfléchissons, par exemple, à la faute $\sqrt[3]{\sin^3 x+\cos^3 x}=\sin x+\cos x$. J'ai observé dans la pratique scolaire différentes façons de rectifier cette erreur : 1) le maître demande à un autre élève de la corriger ; 2) il exige que l'élève cite la loi qui justifie la transformation ; 3) il démontre à l'élève que l'égalité notée est fausse, par exemple, pour $x = \pi/4$; 4) il demande à l'élève de vérifier si

$$\sqrt[3]{\sin^3 x + \cos^3 x}$$

égale l'expression $\sin x + \cos x$ en se rapportant à la définition du radical. Ces démarches ne sont pas toutes de même valeur. Le premier cas est de moindre valeur pour l'élève qui a commis la faute. Dans le second cas, l'élève ne retrouvant pas la recette adéquate, se persuade qu'il a agi « illégalement », mais il n'apprend rien du tout sur sa faute. La troisième démarche est une vérification par contre-exemple. L'élève établit que l'égalité est fausse, mais ne voit pas pourquoi elle l'est. Par contre, dans le quatrième cas, le maître amène l'élève à constater sa faute et à en comprendre la cause précise ; l'élève approfondit et fixe les notions de radical et de puissance et de relation qui les lie. Il me semble qu'à l'occasion de chaque leçon d'algèbre, nous pouvons trouver l'occasion d'une vérification qui soit réellement éducative. Pour atteindre ce but, il faut évidemment sortir des cadres de l'enseignement « facilité formellement ».

En écrivant cet article, je n'avais pas l'intention de développer le thème complètement, ce qui demanderait des recherches encore plus approfondies. Il me semble qu'il est important de les poursuivre parce que notre vigilance ne peut jamais s'endormir si le développement de l'intelligence de la jeunesse est en jeu.

Zofia KRYGOWSKA, *Cracovie.*