37e Année — N° 188 Janvier 1958

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

REVÊTEMENTS - GROUPE FONDAMENTAL *

par M. Jean-Pierre SERRE
Professeur au Collège de France

§ 1. Introduction.

La notion de revêtement est la mise en forme d'une situation que l'on rencontre fréquemment dans des questions géométriques ; nous allons commencer par en donner quelques exemples :

a) Soit Y une hélice tracée sur un cylindre de révolution (cf. fig. 1), et désignons par p l'opération de projection $Y \to X$ de l'hélice Y sur la base X du cylindre. Cette application est *localement* un homéomorphisme : si y est un point de Y, et si $x = p(y)$ est sa projection, p définit une correspondance biunivoque et bicontinue entre un voisinage convenable de y (par exemple un petit arc) et un voisinage convenable de x. Bien entendu, p n'est pas *globalement* un homéomorphisme, puisque des points différents de Y peuvent avoir même image dans X. On dit que Y est un revêtement de X à une infinité de feuillets.

Sous une autre forme, on peut dire que le revêtement précédent est celui de la « mesure des angles » : on fait correspondre à tout élément $\alpha \in \mathbf{R}$ le point $p(\alpha)$ du cercle $\mathbf{S}_1$ défini par l'angle α.

b) Prenons pour Y la sphère $\mathbf{S}_n$ de l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x_0, ..., x_n)$ tels que $\sum x_i^2 = 1$; l'espace X sera ici l'espace projectif réel de dimension n, soit $\mathbf{P}_n$, et la projection $p : Y \to X$ sera

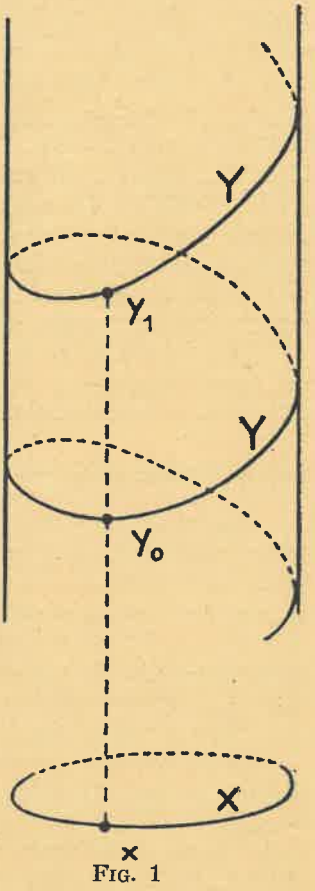


FIG. 1

(*) Conférence prononcée le 23 mai 1957, à l'Institut Henri Poincaré, neuvième conférence du cycle sur la topologie organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

celle qui associe à un point $(x_0, ..., x_n) \in \mathbf{S}_n$ le point de $\mathbf{P}_n$ qui a pour coordonnées homogènes $(x_0, ..., x_n)$. Cette projection est une application continue de Y sur X ; tout point de X est image de deux points diamétralement opposés de Y. On a un exemple de revêtement à deux feuillets.

Le fait que $\mathbf{P}_n$ admette $\mathbf{S}_n$ comme revêtement est utilisé pour étudier la géométrie non-euclidienne *elliptique* sur $\mathbf{P}_n$, qui correspond à la géométrie usuelle de $\mathbf{S}_n$ (celle induite par la métrique de $\mathbf{R}^{n+1}$).

c) Prenons $Y = \mathbf{S}_3$, identifiée à l'ensemble des quaternions $a + bi + cj + dk$ de norme 1. La multiplication des quaternions munit $\mathbf{S}_3$ d'une structure de *groupe topologique* (cf. l'exposé de R. GODEMENT) ; c'est d'ailleurs, comme l'a montré E. CARTAN, la seule sphère, avec $\mathbf{S}_1$, qui jouisse de cette propriété.

Nous identifierons un point $M = (x, y, z)$ de l'espace à trois dimensions au quaternion « pur » $xi + yj + zk$. Si $q \in \mathbf{S}_3$, posons $R_q(M) = qMq^{-1}$, le produit étant effectué dans l'algèbre des quaternions ; on vérifie tout de suite que $R_q(M)$ est encore un quaternion pur, donc un point de $\mathbf{R}^3$. De plus, la norme de $R_q(M)$ est égale à celle de M. Ainsi, la transformation linéaire R_q de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même conserve les distances ; si l'on note alors $\mathbf{SO}(3)$ le groupe des *rotations* de l'espace à trois dimensions, on voit que $q \to R_q$ est un homomorphisme continu $p : \mathbf{S}_3 \to \mathbf{SO}(3)$. On vérifie sans difficulté que p est un homéomorphisme local, et que toute rotation $R \in \mathbf{SO}(3)$ provient de deux quaternions opposés. On a ici encore un revêtement à deux feuillets, qui permet de ramener l'étude du groupe des rotations à celle, en général plus simple, du groupe $\mathbf{S}_3$.

La comparaison des exemples *b*) et *c*) montre que le groupe $\mathbf{SO}(3)$ est homéomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}_3$, résultat qu'il est facile de retrouver par un raisonnement géométrique direct.

§ 2. **Définition d'un revêtement.**

Soient X et Y deux espaces topologiques, et $p : Y \to X$ une application continue de Y sur X. On dit que Y est un revêtement de X, de projection p, si, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U de X contenant x et jouissant de la propriété suivante :

(R) — *L'image réciproque* $p^{-1}(U)$ *de* U *dans* Y *est réunion d'ouverts disjoints* V_i *tels que, pour tout indice* i, *la projection* $p : V_i \to U$ *soit un homéomorphisme de* V_i *sur* U.

(Voir fig. 2 ci-après).

Cette condition peut s'exprimer plus simplement si l'on définit d'abord ce qu'est un *revêtement trivial* d'un espace X : c'est un produit $X \times E$, où E est un espace *discret*, l'application $p : X \times E \to X$ étant simplement la projection sur le premier facteur. La condition (R) peut alors s'énoncer en disant que $p^{-1}(U)$ est isomorphe à un revêtement trivial de U. En d'autres termes, tout revêtement est *localement isomorphe à un revêtement trivial*. (Noter que, si l'on supprime l'hypothèse que E est discret, on arrive à la notion plus générale d'*espace fibré*).

Il n'est pas difficile de vérifier la condition (R) dans les exemples du § 1. Dans l'exemple *a*), il suffit de prendre pour U n'importe quel arc de cercle contenant le point x donné, et dans l'exemple *b*), l'ensemble des points x' de $\mathbf{P}_n$ non situés sur un hyperplan ne passant pas par x.

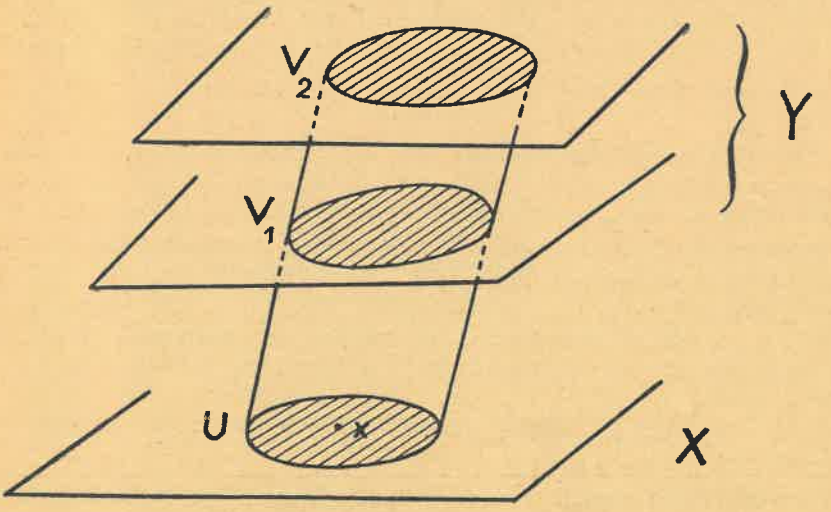


FIG. 2

§ 3. **Chemins tracés sur un revêtement.**

La théorie des revêtements n'est satisfaisante que si l'on fait sur les espaces X et Y des hypothèses de « régularité locale » ; il serait par exemple ridicule de prendre pour X un espace totalement discontinu, comme l'ensemble parfait de Cantor ! Nous n'essaierons pas de dégager les hypothèses minima ; nous supposerons (ce qui est en fait trop restrictif) que X est une *variété topologique*. Cela signifie que X est un espace *séparé* dont tout point possède un voisinage ouvert *homéomorphe à un ouvert de* $\mathbf{R}^n$. Nous supposerons également que X est *connexe* ; dans ce cas l'entier n est constant, c'est la *dimension* de X (cf. l'exposé de H. CARTAN). Vu la condition (R), Y est aussi une variété de dimension n (mais non nécessairement connexe).

Il est intuitivement évident que les espaces X et Y ne sont pas très différents. Localement, ils sont isomorphes (d'où l'intérêt de la notion de revêtement en géométrie différentielle), et ils ne diffèrent donc que par des propriétés globales. On peut essayer de se donner l'un des espaces X et Y et de voir dans quelle mesure l'autre peut être déterminé. En fait, ce n'est qu'en partant de X que l'on trouve un résultat simple, et cela grâce à la considération des *chemins* tracés sur X et sur Y.

Un *chemin* sur un espace topologique X est, par définition, une application continue $f : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$, où I désigne le segment $[0, 1]$. Si l'on écrit x_t au lieu de $f(t)$, un chemin est donc une famille x_t de points de X, indexée par un indice t variant entre 0 et 1, et dépendant continûment

de cet indice. Les points x_0 et x_1 sont respectivement appelés l'*origine* et l'*extrémité* du chemin ; un chemin fermé (c'est-à-dire tel que $x_0 = x_1$) est appelé un *lacet* (au point x_0). Puisque X est connexe, il existe toujours un chemin ayant une origine et une extrémité données.

Un chemin y_t sur Y *relève* un chemin x_t sur X si l'on a $p(y_t) = x_t$ pour tout $t \in I$. Un tel chemin existe toujours. De façon plus précise :

Si x_t est un chemin sur X, *et si y_0 est un point de* Y, *se projetant en x_0, il existe un chemin y_t sur* Y *et un seul qui relève x_t et dont l'origine est y_0.*

En effet, supposons d'abord que le revêtement $p : Y \to X$ soit trivial, c'est-à-dire que $Y = X \times E$, avec E discret. Le point y_0 donné s'écrit alors $y_0 = (x_0, z)$, avec $z \in E$, et le chemin y_t cherché est nécessairement $y_t = (x_t, z)$, ce qui démontre notre assertion dans ce cas. Le cas général se ramène au précédent, en remarquant que l'on peut partager l'intervalle $[0, 1]$ en intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ tels que x_t, pour $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, soit contenu dans un ouvert U_i jouissant de la propriété (R) du § 2 ; en appliquant alors ce que l'on vient de voir au revêtement trivial $p^{-1}(U_i) \to U_i$, on conclut à l'existence et l'unicité des y_t, $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, et y_{t_i} donné. D'où, de proche en proche, l'existence et l'unicité de y_t pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

On observera que, si x_t est un lacet, le point y_1 extrémité du chemin y_t, se projette en x_0 ; mais on n'a pas en général $y_0 = y_1$, autrement dit *un lacet ne se relève pas nécessairement en un lacet* (voir fig. 3). Dans l'exemple *a*), si l'on prend pour lacet x_t le cercle lui-même (paramétré de façon convenable), le point y_1 sera situé « une spire au-dessus » de y_0. Dans l'exemple *c*), si l'on prend pour x_t la rotation de $2\pi t$ autour de l'axe des *z*, on a $y_t = \cos \pi t + k . \sin \pi t$, d'où $y_0 = 1$ et $y_1 = -1$. On a là une propriété en quelque sorte caractéristique des revêtements ; pour l'exploiter complètement, nous aurons besoin de la notion de *groupe fondamental*, que nous allons maintenant définir.

§ 4. **Chemins homotopes. Groupe fondamental.**

Soit X un espace topologique, et soient f et g deux chemins sur X, ayant même origine a et même extrémité b. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une famille f_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$, de chemins de X, ayant tous a pour origine et b pour extrémité, tels que $f_0 = f$ et $f_1 = g$, et dépendant continûment de u [autrement dit, $f_u(t)$ doit être fonction continue du couple (u, t)]. On voit aisément que c'est là une relation d'équivalence entre chemins d'origine et d'extrémité données ; on la notera $f \sim g$.

Ceci s'applique notamment aux *lacets* en un point x_0 fixé. On a de plus une *loi de composition* entre ces lacets : si f et g sont deux lacets, leur produit $f * g$ sera le lacet obtenu en parcourant d'abord f, puis g. Il faut bien entendu préciser la paramétrisation utilisée. Ce sera la suivante :

$$f * g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

On vérifie facilement que cette loi de composition est *compatible* avec la relation d'équivalence définie par l'homotopie, autrement dit que l'on a :

$$f \sim f' \text{ et } g \sim g' \Rightarrow f * g \sim f' * g'.$$

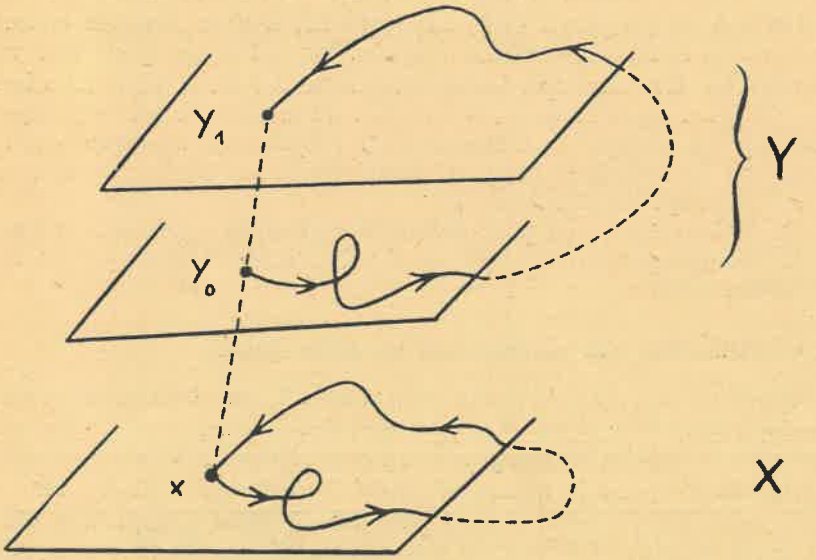


FIG. 3

On peut donc munir l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ des *classes* de lacets en x_0 de la loi de composition déduite de $f * g$ par passage au quotient. On obtient ainsi un *groupe*, car :

i) Il y a un *élément neutre* qui est la classe du lacet constant $e(t) = x_0$ pour tout t.

On doit vérifier que, pour tout lacet f, on a $f \sim f * e$. Pour cela, on définit une famille de lacets g_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$, par les formules :

$$g_u(t) = \begin{cases} f\big((1+u)t\big) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/(1+u), \\ x_0 & \text{si} \quad 1/(1+u) \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

On a $g_0 = f$ et $g_1 = f * e$, d'où $f \sim f * e$. On vérifie de même que $f * e \sim f$.

ii) Pour tout lacet f, la classe de f admet un *inverse* qui est la classe du lacet f' tel que $f'(t) = f(1-t)$.

On doit vérifier que $f * f' \sim e$. Pour cela, on définit une famille de lacets h_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$, par les formules :

$$h_u(t) = \begin{cases} f(2ut) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ f(2u(1-t)) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

On a $h_0 = e$ et $h_1 = f * f'$, d'où $f * f' \sim e$.

iii) La loi de composition de $\pi_1(X, x_0)$ est *associative*.

On doit vérifier que, si f, g, h sont trois lacets, on a :

$$(f * g) * h \sim f * (g * h).$$

Pour cela, on définit une famille de lacets k_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$, par les formules :

$$k_u(t) = \begin{cases} f(4\,t/(1+u)) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant (1+u)/4, \\ g(4\,t-1-u) & \text{si} \quad (1+u)/4 \leqslant t \leqslant (2+u)/4, \\ h(1+4(t-1)/(2-u)) & \text{si} \quad (2+u)/4 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

On a $k_0 = (f * g) * h$ et $k_1 = f * (g * h)$, d'où le résultat cherché.

Lorsque X est connexe par arcs (ce qui est le cas pour une variété connexe), on démontre que les groupes $\pi_1(X, x)$, $x \in X$, sont tous isomorphes. On peut alors écrire $\pi_1(X)$ au lieu de $\pi_1(X, x)$, c'est le *groupe fondamental* (ou *groupe de Poincaré*) de l'espace X. Lorsque $\pi_1(X) = 0$, c'est-à-dire lorsque tout lacet est homotope à un lacet constant, on dit que X est *simplement connexe*.

(A côté de $\pi_1(X)$, on peut définir des groupes $\pi_n(X)$, $n \geqslant 2$, qui sont appelés les *groupes d'homotopie* de X ; ils n'interviennent pas en théorie des revêtements).

§ 5. Classification des revêtements de base donnée.

Revenons à la situation du § 3, et soit Y un revêtement d'une variété topologique X. Nous avons vu que deux chemins x_t et x'_t sur X, ayant mêmes extrémités, ne peuvent pas nécessairement se relever en des chemins de Y ayant la même propriété ; c'est toutefois le cas *si* x_t *et* x'_t *sont homotopes*. C'est à peu près évident lorsque les chemins sont assez voisins, et le cas général se ramène à celui-là par le procédé déjà utilisé au § 3.

Soit alors x_0 un point fixé dans X, et soit $E = p^{-1}(x_0)$ l'ensemble des points $y \in Y$ se projetant en x_0. Si $y \in E$ et si $f(t) = x_t$ est un lacet sur X en x_0, il y a un chemin et un seul sur Y qui a pour origine y et qui relève le chemin f ; son extrémité y_1 ne dépend que de la *classe* α du lacet f, en vertu de ce qui précède. On peut donc la noter $y * \alpha$. On a les identités :

$$\begin{cases} y * e = y, \\ y * (\alpha * \beta) = (y * \alpha) * \beta \quad \text{si} \quad \alpha, \beta \in \pi_1(X). \end{cases}$$

Pour tout $\alpha \in \pi_1(X)$, l'application $y \to y * \alpha$ est une *permutation* de l'ensemble E, et au produit de deux éléments α et β correspond le produit des permutations (dans l'ordre inverse) ; on exprime ceci en disant qu'on a *une représentation de* $\pi_1(X)$ *par des permutations de* E.

Le théorème de classification des revêtements de base X peut alors s'énoncer ainsi :

Toute représentation de $\pi_1(X)$ *par des permutations d'un ensemble* E *correspond à un revêtement* $Y \to X$ *et à un seul* (à un isomorphisme près, bien entendu).

Indiquons seulement le principe de la démonstration : il s'agit en somme de reconstituer Y au moyen de X, de E, et des opérations $y * \alpha$, $y \in E$, $\alpha \in \pi_1(X)$. Soit $z \in Y$; on peut joindre la projection $p(z)$ de z dans X au point x_0 par un chemin f. En relevant ce chemin, on voit que z peut être joint par un chemin à au moins un point $y \in E$. De plus, la connaissance de y et de f déterminent z ; deux couples (y, f) et (u, g)

correspondent au même point z si et seulement si la classe α du lacet $f * g'$ transforme y en u, autrement dit si $u = y * \alpha$ (cf. fig. 4). On peut donc identifier Y à l'ensemble quotient de l'ensemble des couples (y, f) par la relation d'équivalence :

$$(y, f) \sim (u, g) \quad \text{si} \quad u = y * (f * g').$$

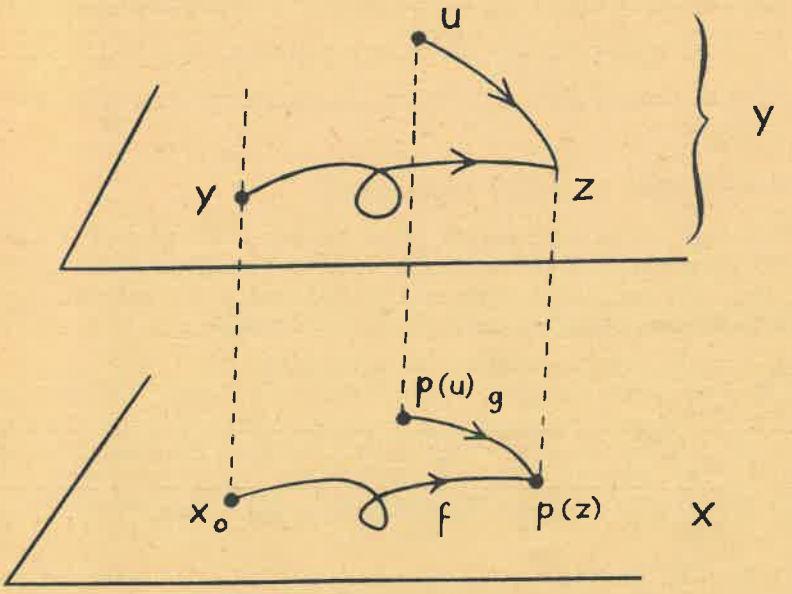


FIG. 4

Il reste à définir la *topologie* de Y uniquement au moyen de X, E, et des opérations $y * \alpha$. Cela ne présente pas de difficulté sérieuse (mais c'est là que des hypothèses de régularité locale sur X sont nécessaires).

Le cas le plus intéressant est celui où Y est *connexe ;* cela revient à dire que deux points de E peuvent être joints par un chemin, ou encore que le *groupe de permutations de* E *défini par* $\pi_1(X)$ *est transitif*. Si y_0 est un point fixé dans E, l'ensemble des $\alpha \in \pi_1(X)$ tels que $y_0 * \alpha = y_0$ est un sous-groupe H de $\pi_1(X)$, et E s'identifie à l'ensemble des classes de $\pi_1(X)$ mod. H. On voit ainsi que *les revêtements connexes de* X *correspondent aux sous-groupes de* $\pi_1(X)$. En particulier, pour que X n'ait pas d'autre revêtement connexe que lui-même (revêtement « à un feuillet »), il faut et il suffit que X soit simplement connexe.

Si l'on prend pour H le sous-groupe de $\pi_1(X)$ réduit à l'élément neutre, on obtient un revêtement $\widetilde{X}$ de X qui est appelé le *revêtement universel* de X. Le terme d' « universel » provient de ce que X est un revêtement de tout revêtement connexe Y de X ; en d'autres termes, la projection $p : \widetilde{X} \to X$ se factorise en : $\widetilde{X} \to Y \to X$.

On voit en particulier que $\widetilde{X}$ est *simplement connexe*, et que c'est le seul revêtement connexe de X jouissant de cette propriété.

Si Y est un revêtement de X, de projection p, on appelle *automorphisme* de Y toute application continue $g : Y \to Y$ telle que $p \circ g = p$; une telle application est nécessairement un homéomorphisme de Y sur lui-même. Dans le cas particulier où $Y = \widetilde{X}$, on montre que *le groupe des automorphismes de* $\widetilde{X}$ *est isomorphe à* $\pi_1(X)$ (l'isomorphisme dépendant du choix d'un point $y_0 \in \widetilde{X}$) ; deux points y_1 et y_2 de $\widetilde{X}$ ont même projection si et seulement si il existe un automorphisme g de $\widetilde{X}$ tel que $g(y_1) = g(y_2)$.

§ 6. Détermination du groupe fondamental.

Nous venons de voir que la connaissance du groupe fondamental $\pi_1(X)$ d'un espace X permet de déterminer tous les revêtements de X. Il est donc intéressant de calculer explicitement $\pi_1(X)$ pour un espace X donné. Indiquons quelques exemples de tels calculs :

1) $X = \mathbf{R}^n$, *espace euclidien de dimension* n.

Soit f un lacet d'origine et d'extrémité le point de coordonnées $(0, ..., 0)$. Si $0 \leqslant u \leqslant 1$, posons $f_u(t) = u.f(t)$; on a $f_1 = f$, alors que le lacet f_0 est le lacet constant. Tout lacet f est donc homotope à 0, ce qui signifie que $\mathbf{R}^n$ *est simplement connexe*, autrement dit $\pi_1(\mathbf{R}^n) = 0$.

Le même raisonnement s'applique plus généralement à tout ouvert *convexe* de $\mathbf{R}^n$.

2) $X = \mathbf{S}_1$, *le cercle.*

Puisque $\pi_1(\mathbf{R}) = 0$, le revêtement $\mathbf{R} \to \mathbf{S}_1$ du § 1, *a*), est le *revêtement universel de* $\mathbf{S}_1$, et son groupe d'automorphismes est donc isomorphe à $\pi_1(\mathbf{S}_1)$. Or, ce groupe est évidemment formé des translations verticales d'amplitude na, où a est la distance de deux spires ; il est donc isomorphe au groupe $\mathbf{Z}$ des entiers, d'où :

$$\pi_1(\mathbf{S}_1) = \mathbf{Z}.$$

3) $X = \mathbf{S}_n$, *sphère de dimension* n *dans* $\mathbf{R}^{n+1}$ (*on suppose* $n \geqslant 2$).

On montre d'abord que tout lacet f sur $\mathbf{S}_n$ peut être déformé en un lacet en forme de « ligne brisée », composé d'arcs de grands cercles mis bout à bout (décomposer l'intervalle $I = [0, 1]$ en intervalles partiels dans lesquels le point $f(t)$ reste à l'intérieur d'un hémisphère fixe, et définir une déformation de cet hémisphère sur un arc de grand cercle). Ceci fait, on choisit un point P non situé sur le nouveau lacet f' (ce ne serait pas nécessairement possible pour f : courbe de Peano !). Le complémentaire de P dans $\mathbf{S}_n$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$, comme on le voit en effectuant une projection stéréographique ; d'après 1), le lacet f' est donc homotope à 0 dans ce complémentaire, donc *a fortiori* dans $\mathbf{S}_n$, et il en est de même de f. D'où :

$$\pi_1(\mathbf{S}_n) = 0 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

4) $X = \mathbf{P}_n$, *espace projectif de dimension* n.

Pour $n = 1$, $\mathbf{P}_1$ est homéomorphe à $\mathbf{S}_1$, donc $\pi_1(\mathbf{P}_1) = \mathbf{Z}$. Supposons donc $n \geqslant 2$. Dans ce cas, le revêtement $\mathbf{S}_n \to \mathbf{P}_n$ du § 1, *b*), est le

revêtement universel de $\mathbf{P}_n$, puisque $\pi_1(\mathbf{S}_n) = 0$; le groupe d'automorphismes de ce revêtement est donc isomorphe à $\pi_1(\mathbf{P}_n)$. Puisque le revêtement a deux feuillets, on en conclut que $\pi_1(\mathbf{P}_n)$ est le groupe à deux éléments. D'où :

$$\pi_1(\mathbf{P}_n) = \mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z} \quad \textit{pour} \quad n \geqslant 2.$$

5) $X = \mathbf{T}^2$, *tore à deux dimensions.*

Le tore est homéomorphe au produit $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$. Comme il est facile d'établir la formule :

$$\pi_1(X \times X') = \pi_1(X) \times \pi_1(X'),$$

on en déduit :

$$\pi_1(\mathbf{T}^2) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \textit{ groupe abélien libre à deux générateurs.}$$

On pourrait aussi raisonner directement en utilisant le fait que le plan $\mathbf{R}^2$ est le revêtement universel de $\mathbf{T}^2$, le groupe des automorphismes étant le groupe des translations $m\vec{\omega} + m'\vec{\omega'}$, où $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega'}$ sont des vecteurs indépendants (cf. fonctions elliptiques).

Signalons que l'on peut prendre pour générateurs de $\pi_1(\mathbf{T}^2)$ un cercle méridien et un cercle parallèle.

6) X *est une surface orientable « à deux trous ».*

Dans tous les exemples précédents, on pouvait donner explicitement le revêtement universel $\tilde{X} \to X$, et l'utiliser pour obtenir $\pi_1(X)$. Ici, c'est beaucoup plus difficile (on pourrait toutefois y arriver au moyen de fonctions automorphes), et il faut employer une autre méthode.

On représente la surface X comme un polygone à 8 côtés que l'on identifie suivant le schéma $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ (cf. fig. 5). Chacun de ces côtés représente donc un lacet sur X, dont on désigne la classe par $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \ldots$, etc. Il est évident que le lacet produit $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$ est homotope à 0. On démontre alors, par des méthodes de déformation assez semblables à celles utilisées dans 3), que les éléments $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *engendrent* $\pi_1(X)$, et que toutes les relations qu'ils vérifient sont conséquences de la relation :

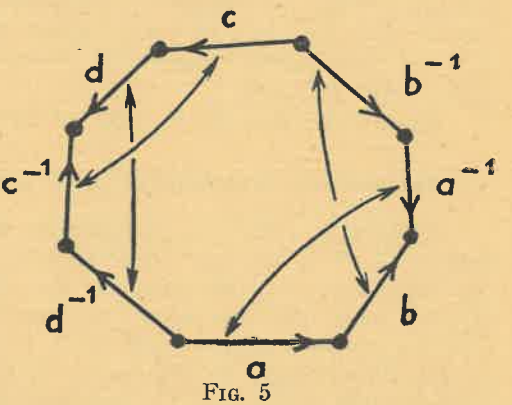


FIG. 5

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} = 1.$$

On peut donc écrire de façon abrégée :

$$\pi_1(X) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} / (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}).$$

On a là un exemple d'espace dont le groupe fondamental *n'est pas abélien.*

§ 7. Application de la notion de simple connexion : le théorème de monodromie.

La notion d'espace simplement connexe intervient en théorie des fonctions de variables complexes de la manière suivante :

Soit X un domaine du plan complexe **C**, soit x_0 un point de X, et soit f_0 une série entière en $(x - x_0)$, convergeant dans un voisinage de x_0 ; si x_t est un chemin sur X, d'origine x_0, on définit la notion de *prolongement analytique* de f le long de x_t ; c'est une opération qui n'est pas toujours possible, en général. Supposons que, pour la série f_0 donnée, le prolongement soit *toujours* possible, et supposons que X soit *simplement connexe*. Il existe alors une fonction holomorphe f sur X qui coïncide avec f_0 dans un voisinage de x_0 : c'est le *théorème de monodromie*. Il revient à dire que le prolongement analytique ne dépend pas du chemin suivi ; or, pour deux chemins voisins, c'est évident, et l'hypothèse de simple connexion permet de passer d'un chemin à un autre par une succession de chemins voisins.

Bien entendu, ce théorème n'est pas spécial aux fonctions d'une variable complexe ; il vaut aussi pour des fonctions de plusieurs variables complexes, des fonctions harmoniques, etc. La seule condition est qu'il y ait *localement* unicité du prolongement.

Le résultat suivant peut être rattaché au principe de monodromie :

Soient G et H deux groupes topologiques connexes, et soit f un « homomorphisme local » de G dans H, c'est-à-dire une application continue d'un voisinage de l'élément neutre de G dans H vérifiant $f(xy) = f(x).f(y)$ si x et y sont assez voisins de l'élément neutre, Alors, *si* G *est simplement connexe,* il existe un homomorphisme global de G dans H qui prolonge f.

Exemples : $G = \mathbf{R}$, $H = \mathbf{S}_1$, et $G = \mathbf{S}_3$, $H = \mathbf{SO}(3)$ (cf. § 1).

§ 8. Applications topologiques de la notion de groupe fondamental.

Le groupe $\pi_1(X)$ est évidemment un *invariant* de l'espace X : deux espaces X et X′ ne peuvent être homéomorphes que si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. On peut se demander si $\pi_1(X)$ est en rapport avec d'autres invariants topologiques de X, et en particulier avec *les groupes d'homologie de* X (voir l'exposé de L. SCHWARTZ). Le groupe d'homologie de dimension 1, $H_1(X)$, est en effet défini par une méthode très voisine de celle qui nous a servi pour $\pi_1(X)$: un lacet n'est pas autre chose qu'un cycle de dimension 1, et un lacet homotope à 0 est un bord. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie (*loc. cit.*), et les groupes $\pi_1(X)$ et $H_1(X)$ sont en général distincts ; on a seulement :

Le groupe $H_1(X)$ *est isomorphe au groupe* $\pi_1(X)$ *rendu abélien.*

Il s'ensuit que $\pi_1(X)$ est un invariant *plus précis* que $H_1(X)$. L'exemple suivant est dû à POINCARÉ :

Soit K le groupe des rotations de l'espace $\mathbf{R}^3$ qui conservent un icosaèdre régulier ; on sait que K est isomorphe au groupe alterné de cinq lettres A_5. Dans le revêtement $p : \mathbf{S}_3 \to \mathbf{SO}(3)$ du § 1, *c*), l'image réciproque G de K est un sous-groupe de $\mathbf{S}_3$ ayant 120 éléments ; de

plus, le groupe G, rendu abélien, devient égal à 0. On définit alors $X = S_3/G$ comme le quotient de S_3 par la relation d'équivalence définie par G ; l'espace X est une variété compacte de dimension 3, ayant S_3 pour revêtement universel et G pour groupe fondamental. Il s'ensuit que $H_1(X) = 0$, et X *a même homologie que* S_3, bien que $\pi_1(X) = G$ soit différent de $\pi_1(S_3) = 0$. L'espace X est appelé un *espace de Poincaré.* Signalons à ce propos la *conjecture de Poincaré* (qui n'est toujours pas démontrée) :

Toute variété compacte, connexe, simplement connexe, de dimension 3, est homéomorphe à la sphère S_3.

Comme autre application du groupe fondamental à la topologie, signalons la *théorie des nœuds :*

Un nœud est un sous-espace N de $\mathbf{R}^3$ homéomorphe à un cercle S_1 ; autrement dit, c'est un chemin fermé sans points doubles de $\mathbf{R}^3$. Deux nœuds N et N′ sont *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tout entier sur lui-même qui transforme N en N′, et qui conserve l'orientation de $\mathbf{R}^3$. Un nœud isomorphe à un cercle d'un plan est dit *trivial* (il n'est pas réellement « noué »). Comment peut-on montrer qu'un nœud donné, par exemple le « nœud de trèfle » (fig. 6), n'est pas trivial ? On remarque que, si N et N′ sont isomorphes, leurs complémentaires $\mathbf{R}^3 - N$ et $\mathbf{R}^3 - N'$ sont homéomorphes, donc ont même groupe fondamental ; on est ainsi amené à étudier π_1 ($\mathbf{R}^3 - N$), c'est *le groupe du nœud* N ; deux nœuds ayant des groupes non isomorphes ne sont pas isomorphes. On a une méthode permettant de déterminer par générateurs et relations le groupe d'un nœud donné par sa projection ; dans le cas du nœud trivial, S_1, ce groupe est $\mathbf{Z}$; dans le cas du nœud de trèfle, on trouve le groupe engendré par deux générateurs x et y liés par la relation $xyx = yxy$. Comme ce groupe n'est pas abélien (il admet en effet comme quotient le groupe symétrique de trois lettres), il n'est pas isomorphe à $\mathbf{Z}$, et *le nœud de trèfle est bien noué,* comme on pouvait du reste s'y attendre !

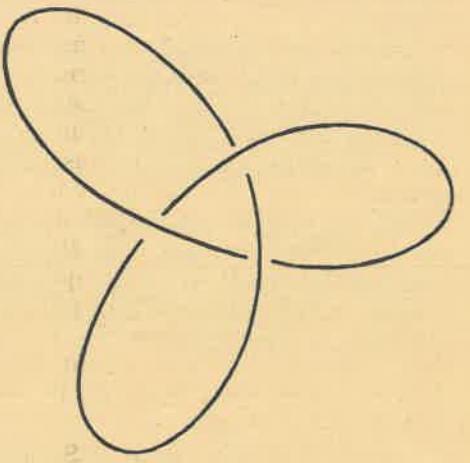


FIG. 6

Notons qu'ici encore les groupes d'homologie n'auraient été d'aucune utilité ; on a en effet $H_1(\mathbf{R}^3 - N) = \mathbf{Z}$ pour tout nœud N.

§ 9. Application aux théorèmes d'existence de fonctions algébriques.

Soit C une courbe algébrique, sans singularités, sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, et soit f une fonction rationnelle sur C. On peut considérer f comme une application continue de C dans la sphère S_2 (identifiée au plan complexe $\mathbf{C}$ auquel on a ajouté un point à l'infini).

Nous écarterons le cas trivial où f est constante ; l'application $f : C \to \mathbf{S}_2$ fait de C un « revêtement ramifié » de $\mathbf{S}_2$; cela signifie que, si on enlève de $\mathbf{S}_2$ les points où l'application f a une différentielle nulle, on obtient un véritable revêtement $Y \to X$. L'espace X est donc égal à $\mathbf{S}_2$ privé de points $P_1, ..., P_r$, et Y est égal à C privé de l'image réciproque des P_i. Ceci étant, le *théorème d'existence de Riemann,* pour les fonctions algébriques d'une variable, s'énonce ainsi :

Tout revêtement connexe, à un nombre fini de feuillets, d'une sphère privée de points $P_1, ..., P_r$, *peut s'obtenir par le procédé ci-dessus, et cela de manière unique.*

(L'unicité est facile ; l'existence fait intervenir des moyens analytiques puissants ; la première démonstration (correcte !) est due à HILBERT).

Le groupe fondamental de $X = \mathbf{S}_2 - \{P_1\} - ... - \{P_r\}$ est le groupe libre (non abélien) à $r - 1$ générateurs ; l'énoncé ci-dessus peut donc se traduire en un théorème d'existence d'une fonction algébrique ayant un certain nombre de « déterminations » s'échangeant suivant $r - 1$ substitutions données. C'est la forme sous laquelle le donnait RIEMANN.

Si, au lieu de partir d'une courbe C, on part d'une surface S, on doit remplacer la droite projective $\mathbf{S}_2$ par le plan projectif complexe $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$, et les points $P_1, ..., P_r$ par des courbes algébriques $D_1, ..., D_r$ de ce plan ; le théorème d'existence (et d'unicité) est encore valable : c'est le *théorème d'Enriques.*

J.-P. S.

Indications bibliographiques

Le meilleur texte de référence est sans doute :

H. SEIFERT und W. THRELFALL. — *Lehrbuch der Topologie,* Teubner, 1934, photocopié par Chelsea en 1947 (voir chap. 7 et 8).

Pour la construction du groupe fondamental, du revêtement universel, et leurs applications aux groupes topologiques, voir aussi :

L. PONTRJAGIN. — *Topological groups,* Princeton, 1946 (chap. 8).