37e Année — N° 191 Mars 1958

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDE

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE : ÉLÉMENTS D'HOMOLOGIE *

par M. Laurent SCHWARTZ
Professeur à la Sorbonne

Nous allons d'abord décrire quelques faits qui concernent ce que l'on appelait au temps de POINCARÉ l'Analysis Situs. Nous suggérerons ainsi des notions intuitives qui sont à la base d'une science qui constitue la Topologie algébrique ; nous y distinguerons alors les questions qui concernent l'Homologie.

I. Quelques problèmes de géométrie intuitive.

1) Sur une sphère, surface de l'espace à trois dimensions, nous avons la notion d'une *courbe fermée*. Par une *transformation continue* qui lui conserve ce caractère de courbe fermée, nous pouvons la *réduire à un point*. (Nous exprimerons plus tard ceci en disant qu'elle est *homotope à zéro*).

Mais, sur la surface du tore, nous distinguons immédiatement des courbes C du type précédent, c'est-à-dire réductibles à un point, en particulier toutes les courbes fermées qui restent dans une région assez petite du tore, des courbes C′ telles qu'un méridien, qui tournent autour du cercle moyen, des courbes C″ telles qu'un parallèle, qui tournent autour de l'axe du tore. Une courbe C′ et une courbe C″ ne peuvent pas se réduire à un point, ni se réduire l'une à l'autre par déformation continue qui les laisse fermées.

Les problèmes soulevés par ces remarques sont l'objet de l'*Homotopie*.

(*) Conférence prononcée le 6 juin 1957, à l'Institut Henri-Poincaré, dixième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

2) Le problème de la réduction à un point est lié à des *problèmes d'intersection :* par exemple, une courbe C′ et une courbe C″ sur le tore se coupent nécessairement en au moins un point. (L'on peut aussi songer aux deux familles de génératrices rectilignes sur une quadrique).

3) *Problème des régions.*

Considérons l'espace à trois dimensions R^3 « troué », c'est-à-dire dont on a ôté un point, l'origine par exemple (c'est donc $R^3 - O$). Toute courbe fermée y est réductible à un point, mais il n'en est pas de même de toute surface fermée : si O est dans la *région intérieure* à une sphère, on ne peut, dans R^3, réduire cette espère à un point sans qu'elle passe par O ; il se pose donc un problème d'*homotopie des surfaces.* Nous retrouvons un problème d'intersection d'une surface telle que cette sphère et d'une courbe analogue à une demi-droite Ox.

On ne peut évidemment étudier mathématiquement ces questions sans donner des définitions précises. Par exemple, l'on sait qu'on appelle *courbe compacte* l'image par application continue du segment [0, 1], et cette courbe est *fermée* si 0 et 1 ont la même image. On connaît, pour le plan, l'énoncé du *théorème de Jordan :* Toute courbe fermée sans point double partage le plan en deux régions. (Deux points d'une même région peuvent, par définition, être joints par une courbe continue sans points communs avec la courbe donnée et cette jonction est impossible pour deux points de régions différentes). Il s'agit donc d'un problème d'intersection. On ne pensera plus que ce résultat est évident et sans intérêt si l'on songe qu'il ne subsiste pas sur un tore : les courbes nommées plus haut C′ ou C″ ne divisent pas la surface en deux régions tout en étant fermées et sans point double !

4) *Problème du champ.*

Il est évidemment possible de définir sur un cercle un champ de vecteurs qui soient tangents au cercle et varient continuement avec le point du cercle sans être jamais nuls. Mais est-ce possible sur une sphère de R^3 ? La réponse est « non ». Mais c'est possible sur une sphère à 3 dimensions de R^4. L'on démontre qu'un tel champ existe sur une sphère S^n de R^{n+1} si et seulement si n est impair. Or, ce problème est primordial pour l'étude des équations différentielles sur les surfaces et l'existence, la classification des singularités, cols, nœuds, etc... (travaux de LEFSCHETZ).

5) Une question de même nature est celle de l'*existence de points fixes dans les transformations.* Par exemple, l'on démontre que toute application continue d'une boule dans elle-même a au moins un point invariant.

6) Lorsque l'on traite du calcul des résidus dans le plan complexe, on étudie une intégrale curviligne et l'on compte *combien de fois la courbe « fait le tour »* de l'origine ou d'un point singulier. C'est un nombre positif, nul ou négatif, qui est lié au nombre « algébrique » des points d'intersection de la courbe avec une courbe joignant le point considéré au point à l'infini du plan complexe. Ce « nombre de tours », évident intuitivement pour les cas simples, devra être défini.

II. Bord d'une surface.

Nous allons étudier plus en détail un problème lié aux précédents et qui est particulièrement typique. Nous nous bornerons à des espaces compacts.

Sur un espace topologique assez simple, donnons-nous une courbe fermée (avec ou sans points doubles). Cette courbe peut-elle être *le bord d'une surface* ?

Voyons d'abord intuitivement ce que cette expression désigne.

Supposons (fig. 1) une courbe limitant une surface orientée en chaque point. La courbe devra être orientée en accord avec le sens choisi. Inversement, soit une courbe fermée parcourue dans un sens déterminé. Est-ce le « bord » d'une surface ? Sur une sphère, oui, c'est le bord de deux surfaces qu'il faut munir d'orientations différentes. Mais sur le tore ? C'est non pour une courbe C' analogue à un méridien, car, en orientant la surface, on aurait un double sens sur la courbe et l'on sent qu'il faudrait alors compter cette courbe, parcourue deux fois dans des sens contraires, pour zéro. Il en est de même pour les courbes C'' telles que les parallèles. Donc, sur le tore, certaines courbes fermées ne sont pas des bords de surface. De même, dans $R^2 - O$ si, comme nous l'avons dit, nous nous bornons à des surfaces compactes, ce qui interdit d'aller à l'infini. Dans $R^3 - O$, une courbe est un bord, mais une sphère qui entoure O n'en est pas un.

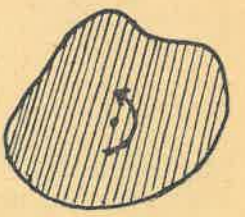


Fig. 1

Les exemples que nous venons de prendre, les mêmes pour les deux problèmes de « réduction à un point » et de « bord de surface », montrent bien qu'il y a une liaison entre ces notions. Le premier, réduction à un point, est un *problème d'homotopie ;* le second, étude des bords de surfaces, est un *problème d'homologie*. Ces problèmes ne sont pas équivalents ; le point de vue de l'homotopie est plus fin, au sens suivant : Toute courbe fermée réductible à un point par déformation continue est bord d'une surface, toute surface réductible à un point est bord d'un volume, etc..., mais les réciproques sont inexactes : il existe des bords de surfaces (volumes, etc...) qui ne sont pas réductibles à un point par déformation continue. Montrons ceci sur des exemples :

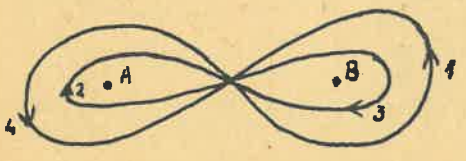


Fig. 2

1er exemple : Du plan R^2, retirons deux points A et B et considérons une courbe 1 2 3 4 telle que l'indique la figure 2. Cette courbe est évidemment un bord de surface et, en homologie, on peut la réduire à zéro en superposant des arcs orientés en sens contraire, mais, en homotopie, on ne peut pas la réduire à un point.

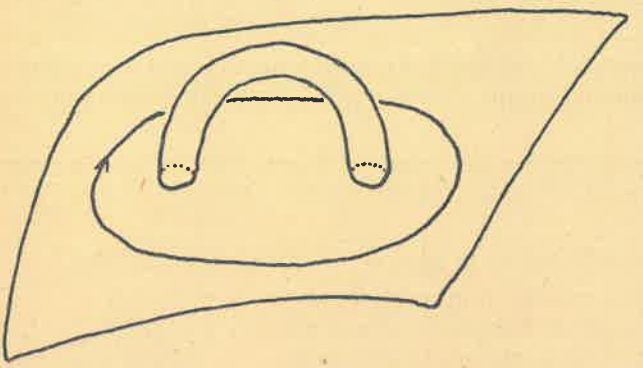


FIG. 3

2° exemple : La figure 3 montre une surface percée de deux trous où sont soudées les extrémités d'un tube. La courbe C qui entoure les trous est bord d'une surface, mais elle ne peut évidemment pas être réduite à zéro, même si le tube est réduit à une simple ligne réunissant deux points.

Ainsi, la théorie de l'homologie est plus simple que la théorie de l'homotopie. La seconde fut tout d'abord abordée par POINCARÉ, mais l'on s'est rapidement dirigé vers l'homologie.

En particulier, *pour le théorème des résidus* signalé plus haut, *le véritable point de vue utile est celui de l'homologie.* Rappelons l'énoncé, d'abord sous une forme trop vague : Si $f(z)$ est une fonction holomorphe uniforme dans le plan, $\int_c f(z)dz = 0$, C étant une courbe fermée quelconque. Mais si la fonction a des pôles, CAUCHY définit, pour chaque pôle, un coefficient nommé résidu de la fonction relatif au pôle, et le théorème fondamental de Cauchy s'exprime par l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz = \sum R_i,$$

le deuxième membre étant la somme des *résidus relatifs aux pôles autour desquels « tourne »* C.

Sur la fig. 2, l'on voit bien, si les pôles sont A et B, que l'intégrale sera nulle, parce que la surface dont la courbe est le bord ne contient pas de pôles ; or, la courbe n'est pas réductible à un point (sans traversée de pôle). Sur la fig. 4, la courbe ayant le sens de parcours marqué, l'on sent bien qu'il faut affecter un point tel que A du coefficient 1, mais un point tel que B du coefficient 2. De même, sur les fig. 5 et 5bis, il faut utiliser $+1$ et $+1$ ou $+1$ et -1.

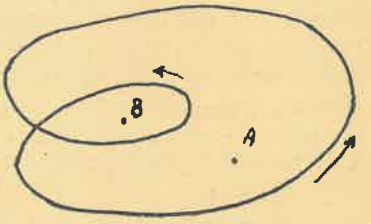


FIG. 4



FIG. 5



FIG. 5 *bis*

Il faut donc considérer la courbe comme bord d'une surface et tenir compte de l'orientation de la courbe et de l'ordre de multiplicité de la surface pour affecter la surface de coefficients au voisinage des pôles.

Une fraction rationnelle d'une variable complexe peut être considérée comme fonction méromorphe sur une sphère de Riemann ; or, une courbe C fermée simple sur la sphère est bord de deux surfaces S_1 et S_2 dont la réunion forme la sphère entière et auxquelles nous devons attribuer les coefficients $+1$ et -1 ; la même intégrale vaut donc la somme des résidus des pôles situés dans S_1 et l'opposé de la somme des résidus des pôles situés dans S_2. On en déduit donc que la somme totale des résidus est nulle. Mais il est clair que la courbe considérée n'intervient pas en réalité ; il suffisait de considérer la surface de la sphère entière, de bord zéro, pour obtenir la conclusion.

III. Définitions et études précises.

Nous venons de montrer comment des problèmes s'introduisent et nous en avons fait sentir l'importance. Il s'agit de leur donner une forme précise. Toute théorie mathématique exprime une idée intuitive, mais on doit souvent la modifier profondément. L'intuition gêne alors la démonstration et risque de conduire à des pétitions de principes. Nous allons nous borner à des espaces topologiques compacts, tels que la sphère S^2 ou le tore T^2. Les surfaces en question seront supposées *triangulables*, c'est-à-dire *pavables par des simplexes :*

Complexe. — Nous savons (voir conférence de M. CARTAN) définir dans R^{n+1} un simplexe de dimension n (pour $n = 0$, c'est un point ; pour $n = 1$, c'est un segment ; pour $n = 2$, c'est la surface d'un triangle ; pour $n = 3$, c'est le volume d'un tétraèdre, etc...), ainsi que ses faces, simplexes de dimension inférieure à n. Sur la surface S^2 ou T^2, ou un espace topologique compact quelconque, nous dirons que nous avons un pavage par simplexes si les conditions suivantes sont réalisées :

1) Les simplexes sur la surface sont définis par homéomorphisme à partir des simplexes de R^n, chaque simplexe σ choisi sur la surface correspondant par un homéomorphisme déterminé à un simplexe σ^1 de R^n (de sorte que les faces de dimension $\leqslant n-1$ de σ seront bien définies) ; σ sera un *simplexe topologique.*

2) La surface est recouverte par un nombre fini de simplexes (hypothèse de compacité).

3) L'intersection de deux simplexes est vide ou bien est une face commune.

Si un espace admet un tel pavage, on l'appellera un complexe.

D'une façon générale, d'après l'hypothèse 2, on définit la dimension topologique du *complexe* obtenu par cette triangulation comme la plus grande dimension, n, des simplexes. Mais il faut noter qu'il peut ne pas y avoir partout la même dimension topologique (par exemple, si l'on considère une sphère à laquelle on ajoute un fil).

Supposer les surfaces triangulables simplifie beaucoup le problème ; ainsi, une courbe sera une union de simplexes à une dimension. Mais

toute variété topologique est-elle triangulable ? Ce problème général n'est pas résolu. Pourtant, l'hypothèse simplificatrice est justifiée, au moins au départ. On montre d'autre part que, si un espace a plusieurs triangulations distinctes, les groupes d'homologie que nous définirons plus loin en sont indépendants.

Chaînes d'un complexe. — Définissons d'abord un *chaînon* de dimension p, ou p-chaînon.

Un p-chaînon est un système de $p+1$ points $a_0 a_1 \dots a_p$ donnés dans un ordre déterminé, distincts ou non, et tous sommets d'un même simplexe du complexe.

Un 0-chaînon est donc un sommet a_0, quelconque, de la triangulation.

Un 1-chaînon est un système de deux sommets $a_0 a_1$ d'un simplexe de dimension 1. Il faut noter que $a_1 a_0$ est un autre 1-chaînon qui est considéré comme tout à fait distinct de $a_0 a_1$. Nous considérons $a_0 a_0$ comme aussi un 1-chaînon, acceptant ainsi que les sommets soient confondus.

Les p-chaînons, p étant choisi, sont en nombre fini N_p (hypothèse 2) et peuvent être notés :

$$\gamma_p^1, \gamma_p^2, \dots, \gamma_p^{Np}$$

Par définition, une p-chaîne sera une combinaison linéaire formelle, à coefficients entiers, de p-chaînons :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{i=Np} \xi_i \gamma_p^i, \quad \xi_i \in Z$$

Nous établirons entre chaînes la loi d'addition :

$$\left(\sum \xi_i \gamma_p^i\right) + \left(\sum \eta_i \gamma_p^i\right) = \sum (\xi_i + \eta_i) \gamma_p^i$$

Cette addition est associative et commutative ; la chaîne nulle ($\xi_i = 0$ pour tout i) est un élément neutre de cette addition.

L'ensemble des p-chaînes est donc un groupe abélien que nous noterons Γ_p.

Bord d'une p-chaîne. — C'est une $(p-1)$-chaîne que nous allons définir. Une p-chaîne, par définition, s'écrit :

$$\sum_{i \in I} \xi_i \gamma_p^i,$$

I étant l'ensemble $1, 2, \dots, N_p$.

Tout d'abord nous posons :

$$\text{bord de } \left(\sum \xi_i \gamma_p^i\right) = \sum \xi_i \, (\text{bord de } \gamma_p^i)$$

Il ne reste donc qu'à définir le bord d'un chaînon.

Le chaînon a_0 est de dimension 0. Son bord est zéro.

Le chaînon ab est de dimension 1. Son bord est une chaîne de dimension 0. Nous le définissons : bord $(ab) = +b - a$, noté $\mathcal{B}(ab)$.

Le chaînon *abc* de dimension 2 aura comme bord :

$$\mathcal{B}(abc) = bc - ac + ab$$

D'une façon générale, le *p*-chaînon $a_0a_1a_2 \dots a_p$ aura comme bord la $(p-1)$-chaîne :

$$a_1a_2 \dots a_p - a_0a_2 \dots a_p + \dots + (-1)^k a_0a_1 \dots a_{k-1}\, a_{k+1} \dots a_p + \dots + (-1)^p a_0a_1a_2 \dots a_{p-1}$$

Un calcul formel très simple permet ainsi de déterminer le bord d'une *p*-chaîne.

Cycle de dimension p (ce qui équivaut topologiquement à une variété fermée de dimension *p*). — *Un p-cycle est, par définition, une p-chaîne dont le bord est zéro.*

Comme l'opération qui transforme une *p*-chaîne en son bord respecte l'addition (d'après sa définition), l'ensemble des *p*-cycles est un groupe abélien Z_p inclus dans le groupe Γ_p des *p*-chaînes.

Problème : Parmi les *p*-cycles, quels sont ceux qui sont bord de $(p-1)$-chaînes ?

1) *Un bord est un cycle,* autrement dit le bord d'un bord est toujours zéro. Il suffit de le prouver pour un chaînon : $\mathcal{B}\mathcal{B}\,\gamma_p^i = 0$.

Par exemple : $\mathcal{B}(abc) = bc - ac + ab$ et

$$\mathcal{B}\mathcal{B}(abc) = c - b - c + a + b - a = 0.$$

Ceci se généralise sans peine.

Si donc l'on nomme B_p l'ensemble des *p*-chaînes qui sont des bords, l'on a l'inclusion : $\Gamma_p \supset Z_p \supset B_p$

2) Ainsi, le groupe des bords est un sous-groupe du groupe des cycles. Mais ces groupes sont-ils identiques ? L'on a vu intuitivement que la réponse est oui pour la sphère S^2 et non pour le tore T^2. L'on précise la comparaison en étudiant le *groupe-quotient* $Z_p/B_p = H_p$. Ce groupe-quotient se nomme le *groupe d'homologie* de la variété étudiée, pour la dimension *p* (1). Il caractérise la structure étudiée. L'on dit que les *p*-chaînes qui sont des bords, donc les éléments de B_p, sont homologues à zéro, ce que l'on note ~ 0. Deux cycles Γ, Γ' sont *homologues* s'ils sont dans la même *classe d'homologie,* c'est-à-dire si leur différence est homologue à zéro (autrement dit, si cette différence est un bord) ; on écrit $\Gamma \sim \Gamma'$.

Le calcul du groupe d'homologie se fait par les méthodes de la topologie algébrique. Indiquons seulement quelques remarques :

a) Un *chaînon dégénéré aa* est un cycle, car son bord est $a - a = 0$. Est-ce un bord ? Oui, c'est le bord de *aaa*. Donc, il est homologue à zéro, ce qui permet de l'éliminer des chaînes : $aa \sim 0$.

---

(1) On rappelle que si Z est un groupe abélien noté additivement et si B en est un sous-groupe, $H = Z/B$ est l'ensemble des classes d'équivalence définies par la relation d'équivalence $\begin{cases} x \in Z \\ y \in Z \end{cases}$, $x \equiv y \iff x - y \in B$.

b) La chaîne $ab + ba$ est homologue à zéro : $ab + ba \sim 0$. En effet, le bord de bab est $\mathcal{B}(bab) = ab - bb + ba \sim ab + ba$. Donc, au point de vue homologique, on peut remplacer ab par $-ba$: $ab \sim -ba$.

c) Plus généralement, si dans un chaînon l'on permute les sommets, l'on obtient un chaînon homologue ou non suivant qu'il s'agit d'une permutation paire ou impaire.

Exemples de calcul d'un groupe d'homologie :

1) *Sphère* S^2 supposée triangulée. Les 0-cycles sont les 0-chaînes $\sum \xi_i a_i$, les a_i étant les sommets de la triangulation.

Les 0-bords sont les 0-cycles $\sum \xi_i a_i$ tels que $\sum \xi_i = 0$. Cette condition est en effet évidemment nécessaire puisqu'elle est vraie pour le bord d'un chaînon.

Elle est suffisante car, sur la sphère, on peut joindre un sommet choisi a_0 à tout sommet a_i, donc toutes les chaînes $(a_i - a_0)$ sont ~ 0. Or, si $\sum \xi_i = 0$, $\sum \xi_i a_i = \sum \xi_i (a_i - a_0) \sim 0$.

Alors, deux 0-cycles sont équivalents ou homologues s'ils correspondent à la même valeur de l'entier $\sum \xi_i$. C'est dire que le groupe d'homologie $H_0 = Z_0/B_0$ est le groupe des entiers positifs, négatifs ou nuls.

L'on voit que cette conclusion subsiste pourvu que deux points quelconques puissent être joints par une ligne polygonale formée de simplexes à une dimension : c'est dire que le complexe est un espace topologique *connexe*. Par exemple, ceci ne conviendrait plus pour l'ensemble de deux sphères disjointes. H_0 serait alors le groupe des couples d'entiers. On voit que H_0 donne le *nombre de composantes connexes*.

Etudions maintenant $H_1 = Z_1/B_1$. L'on démontre que, sur la sphère, tous les cycles à une dimension sont des bords ; B_1 est donc identique à Z_1, de sorte que H_1 est le groupe réduit à l'élément neutre 0. (Pour faire la démonstration, l'on utilise une triangulation, par exemple en 8 triangles dont les côtés sont des quarts de grands cercles).

Nous laisserons de côté le groupe d'homologie pour la dimension 2.

2) *Plan percé d'un trou en un point* 0, donc $R^2 - 0$. Cet espace n'est pas compact, mais l'on convient de n'utiliser que des chaînes d'un nombre fini de chaînons pour rester dans la méthode de l'homologie finie ou à support compact. L'on démontre qu'il est possible de définir un cycle fondamental γ_1 dont la classe est représentée par 1, et que tout cycle γ est homologue à n fois le cycle fondamental (de sorte que $\gamma - n\gamma_1 \sim 0$ est un bord), n entier de signe quelconque. La classe d'homologie qui correspond à l'entier n est, par définition, la classe des cycles qui « tournent algébriquement n fois autour du point 0 ». Le groupe d'homologie pour la dimension 1 est ainsi celui des entiers.

3) *Tore* T^2. Les méthodes de topologie algébrique permettent de démontrer que le groupe d'homologie est celui des couples d'entiers (m, n) avec la loi d'addition $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$.

Si nous représentons, par exemple, par (1, 0) les courbes C′ homologues aux méridiens et par (0, 1) les courbes C″ homologues aux parallèles du tore, tout cycle est homologue à $mC' + nC''$, m et n étant déterminés d'une façon unique. Nous dirons alors que ce cycle fait algébriquement m fois le tour du cercle moyen, et n fois le tour de l'axe de révolution. Par exemple, pour un cercle de Villarceau, qui tourne une fois autour de l'axe et une fois autour du cercle moyen, la classe d'homologie est $(\pm 1, \pm 1)$ (1).

Conférence rédigée par Mlle L. FÉLIX,
(La Fontaine, Paris).

---

(1) C′ et C″ ont un sens de parcours déterminé, m et n sont des entiers de signe quelconque. Il y a 2 familles de cercles de Villarceau, 2 sens de parcours pour chacune, ce qui donne 4 classes d'homologie : (1, 1), (1, — 1), (— 1, 1), (— 1, — 1).

Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites, les structures mathématiques ; et il se trouve — sans qu'on sache bien pourquoi — que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles et de remplir pleinement leur rôle élaborateur.

C'est seulement avec ce sens du mot « forme » qu'on peut dire que la méthode axiomatique est un « formalisme » ; l'unité qu'elle confère à la mathématique, ce n'est pas l'armature de la logique formelle, unité de squelette sans vie ; c'est la sève nourricière d'un organisme en plein développement, le souple et fécond instrument de recherches auquel ont consciemment travaillé, depuis Gauss, tous les grands penseurs des mathématiques, tous ceux qui, suivant la formule de Lejeune-Dirichlet, ont toujours tendu à « substituer les idées au calcul ».

Nicolas BOURBAKI
(*L'architecture des mathématiques*,
dans « Les grands courants
de la pensée mathématique »).