A PROPOS DES RADICAUX

1. On relève souvent, en Première, en Mathématiques Elémentaires et... au-delà, les erreurs suivantes (et leurs variantes) :

$$\sqrt{a^2} = a, \qquad \sqrt{a^2} = \pm a.$$

Elles sont facilitées, peut-être même engendrées, par le vocabulaire habituel : on dit couramment : « 25 a deux racines, qui sont 5 et -5 », et, d'autre part, « $\sqrt{25}$ » se lit : « racine de 25 ». Le débutant n'est-il pas alors tenté d'en déduire : $\sqrt{25} = \pm 5$?

En somme, le mot « racine » est employé pour désigner deux notions différentes.

2. Aussi serait-il peut-être préférable d'adopter la terminologie suivante :

1° Le symbole $\sqrt[n]{\ }$ se lit « radical $n^{ième}$ de ».

2° On appelle « racine arithmétique $n^{ième}$ » d'un nombre arithmétique A le nombre, unique, dont la puissance n^{me} est A. On le note : $\sqrt[n]{A}$.

Jusqu'ici, la distinction entre « racine » et « radical » n'est pas indispensable. Mais :

3° On appelle « racines relatives n^{mes} » d'un nombre relatif a les nombres, s'il en existe, dont la puissance n^{me} est a. Leur nombre et leurs notations se résument de la façon suivante :

	a positif	a négatif
n impair	Une : $\sqrt[n]{a}$	Une : $-\sqrt[n]{-a}$
n pair	Deux : $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$	Aucune

($a = 0$: une seule, qui est zéro).

(Il faut enfin distinguer de ces notions celle de « racine approchée » ; pourquoi ne pas employer plus systématiquement le symbole $\simeq$, par exemple dans :

$$\sqrt{2} \simeq 1,41 \text{ ?}).$$

3. Il en résulte que :

1° Un radicande (c'est-à-dire ce qui est sous un radical) ne peut être que positif ou nul.

2° Un radical est essentiellement positif ou nul.

Ces deux faits *distincts* sont souvent mélangés dans l'esprit des élèves ; la phrase suivante le révèle :

« $\sqrt{x^6}$ est positif ou nul parce que x^6 est positif ou nul » ; en fait : 1° $\sqrt{x^6}$ existe parce que x^6 est positif ou nul ; 2° Une fois son existence assurée, $\sqrt{x^6}$ est positif ou nul parce que c'est un radical.

4. Autre conséquence : $\sqrt{a^2} \equiv |a|$, que a soit un nombre ou une fonction. (Il importe de vérifier d'abord que la notion de valeur absolue est bien comprise...). Cette identité mériterait d'être présentée comme aussi « remarquable » que $(a+b)^2$... etc... Quitte à voir, dans les débuts, tel élève scrupuleux écrire $\sqrt{25} = |5|$, ce qui n'est pas inexact...

$$\text{De même } \sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}},$$

$$\sqrt{a^2b} = |a|\cdot\sqrt{b}, \quad \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|, \text{ etc...}$$

5. Bien souvent, après avoir commis « $\sqrt{a^2} = a$ », l'élève espère se racheter grâce à « $\sqrt{a^2} = \pm a$ », ce qui est une réponse de Normand...

Peut-être avons-nous tort d'utiliser ou d'accepter le signe $\pm$. L'emploi en est malheureusement bien ancré en Première à propos des formules de résolution de l'équation du second degré ; il n'y est pas illogique, car $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ désigne l'ensemble de deux nombres (encore que le $\pm$ camoufle parfois une petite difficulté : $m \pm \sqrt{(m-1)^2}$ sont bien, dans leur ensemble, égaux à $m \pm (m-1)$, mais il y a « chassé-croisé » quand m traverse la valeur 1). Néanmoins, l'habitude me paraît mauvaise. Si on se refuse à l'effort d'écrire les deux solutions (ou les deux... racines !) sur deux lignes différentes, ne vaudrait-il pas mieux initier dès la Première à l'usage du symbole ε ?

6. Si on adopte les conditions du paragraphe 2, il faut s'interdire $\sqrt[3]{-8}$ (la racine cubique de -8 devant s'écrire : $-\sqrt[3]{8}$).

D'ailleurs, même du point de vue théorique, l'écriture $\sqrt[3]{-8}$ présente des inconvénients ; par exemple, $\sqrt[3]{-8}$ n'est pas égal à $\sqrt[6]{(-8)^2}$. L'emploi de $a^{p/q}$, y compris pour a négatif à condition que q soit impair, lève la difficulté ; en effet, $(-8)^{1/3}$ ne peut être remplacé par $(-8)^{2/6}$ qui n'existe pas puisque 6 est pair ; mais à quel niveau peut-on introduire ces conventions ?

La même interdiction s'étend au cas où le radicande est une fonction. Si on appelle $g(x)$ la fonction « racine cubique relative de la fonction $f(x)$ », il faut l'exprimer ainsi :

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt[3]{f(x)} \text{ pour les valeurs de } x \text{ telles que } f(x) \geqslant 0, \\ g(x) = -\sqrt[3]{-f(x)} \text{ pour les valeurs de } x \text{ telles que } f(x) < 0, \end{cases}$$

ou bien : $$g(x) = [f(x)]^{1/3}.$$

7. On a proposé le symbole $\sqrt[n]{z}$ pour désigner l'une quelconque des racines n^{mes} complexes de z : il me paraît dangereux. $\sqrt{25} = \pm 5$, qui serait correct, dévierait vite en $\sqrt{25} = \pm 5$, et tout serait à recommencer. A ce propos, regrettons le « $\sqrt{-1} = i$ », tarte à la crème des mauvais vulgarisateurs...

Il ne s'agit là que de problèmes pédagogiques. Une fois immunisé, l'étudiant pourra, sans grand inconvénient lire « racine » au lieu de « radical », écrire « $\sqrt[3]{-8}$ », utiliser $\pm$. Mais cette immunité n'est pas naturelle ; elle est acquise, et parfois péniblement...

L. Duvert (Lyon, *Ampère*).