II. ESSAIS

GÉOMÉTRIE SUR LE CERCLE

INTRODUCTION. — L'*ordre cyclique* et la *congruence cyclique* jouent en géométrie euclidienne un rôle important (étude des faisceaux de droites ou de plans, théorie des angles ou des dièdres) ; mais ils y demeurent naturellement des notions dérivées, parfois même tardivement définies. On se propose, dans ce qui suit, une introduction directe de ces relations, en construisant axiomatiquement la *géométrie sur le cercle*. Si l'on préfère adopter un autre langage, c'est de l'édification axiomatique de la droite riemanienne qu'il va s'agir.

Nous introduirons nos axiomes en faisant appel à l'intuition, et sans traiter de leur indépendance. A partir de l'image intuitive que nous avons de la ligne fermée (sans point multiple), tous les postulats de la congruence cyclique peuvent être appréhendés expérimentalement, à l'aide d'un compas à pointes sèches, sur la ligne fermée particulière que nous traçons d'abord à l'aide d'un compas dans un plan. Nous montrerons finalement que les axiomes introduits sont compatibles en fournissant un modèle arithmétique du cercle pour lequel ils se trouveront tous vérifiés.

On s'inspirera largement de la méthode exposée ici-même par M. G. CHOQUET (*Bulletin* de l'A.P.M., n° 158, octobre 1953) pour l'édification axiomatique de la droite (euclidienne ou lobatschefskienne) ; c'est ainsi qu'on définira d'abord le *cercle orienté*, de manière qu'une relation ternaire suffise à introduire l'ordre cyclique.

ORDRE CYCLIQUE SUR LE CERCLE ORIENTÉ. — Nous appelons *cercle orienté* un ensemble Γ d'éléments $a, b, c\ldots$ nommés points sur lequel est donnée une relation ternaire, dite *relation d'ordre cyclique* et notée (a, b, c), qui possède les propriétés suivantes :

1° Quels que soient a, b, c, sur Γ, on a (1) :

I-1 $$(a = b \text{ ou } b = c \text{ ou } c = a) \text{ ex } (a, b, c) \text{ ex } (c, b, a).$$

On en tire aussitôt $(a, b, c) \rightarrow \overline{(c, b, a)}$.

2° Quels que soient a, b, c sur Γ, on a

I-2 $$(a, b, c) \rightarrow (b, c, a).$$

On en tire aussitôt $(a, b, c) \rightarrow (b, c, a)$ et (c, a, b) et $\overline{(c, b, a)}$ et $\overline{(a, c, b)}$ et $\overline{(b, a, c)}$.

3° Quels que soient a, b, c, d sur Γ, on a

I-3 $$(a, b, d) \text{ et } (b, c, d) \rightarrow (a, c, d).$$

Compte tenu de I-2 et de I-3 lui-même, les hypothèses de I-3 entraînent aussi (a, b, c), donc entraînent (a, c, d) et (a, b, c) ; la réciproque s'établit d'ailleurs sans peine, de sorte que

$$(a, b, d) \text{ et } (b, c, d) \leftrightarrow (a, c, d) \text{ et } (a, b, c).$$

De manière analogue on obtient

$$(a, b, c) \text{ et } (c, d, a) \leftrightarrow (b, c, d) \text{ et } (d, a, b).$$

Etant donnés a, b distincts, l'ensemble des points m tels qu'on ait (a, m, b) est dit *intervalle ouvert* d'extrémités a, b, noté $]a, b[$.

La relation (a, b, c) ou $(a = b)$ ou $(b = c)$ est dite *relation d'ordre cyclique large* et notée $(a, b, c)^*$.

---

(1) Le symbole ex note l'exclusion réciproque ; pour désigner la négation, nous surlignons. Le signe d'universalité $\forall$ est sous-entendu partout où cette convention est admissible ; le signe d'existence $\exists$ est affecté d'un astérisque lorsqu'il désigne l'existence univoque. Afin d'alléger l'écriture des parenthèses formatives, il est entendu que les signes d'implication et d'implication réciproque dominent tous les autres.

Etant donnés a, b, l'ensemble des points m tels qu'on ait $(a, m. b)^*$ est dit *intervalle fermé* d'extrémités a, b, noté $[a, b]$; lorsque $a = b$, cet ensemble ne contient qu'un seul point.

Relation d'ordre entre points. — Choisissons ω sur Γ ; on dit alors que *a précède b* sur Γ lorsque (ω, a, b) où $(\omega = a \neq b)$, ce qu'on note $a < b$. Il résulte des axiomes précédents que

$$(a = b) \text{ ex } (a < b) \text{ ex } (b < a),$$
$$(a < b) \text{ et } (b < c) \rightarrow (a < c),$$

et il suffit de faire $\omega = a$ dans la définition introduite pour voir que, quel que soit b

$$(\omega < b) \text{ ou } (\omega = b).$$

Ainsi se trouve définie sur Γ *une structure d'ordre total pour laquelle* Γ *admet le point choisi* ω *comme premier élément.*

Relation de localisation entre points. — Choisissons ω_1 et ω_2 distincts sur Γ ; on dit alors que *a localise b* sur Γ lorsque

$$[(\omega_1, a, \omega_2) \text{ et } (\omega_1, b, \omega_2)] \text{ ou } [(\omega_2, a, \omega_1) \text{ et } (\omega_2, b, \omega_1)],$$

ce qu'on note $\{ a, b \}$. On a aussitôt

$$\{ a, b \} \rightarrow \{ b, a \}$$

et, en éliminant les hypothèses incompatibles fournies par les prémisses,

$$\{ a, b \} \text{ et } \{ b, c \} \rightarrow \{ a, c \}.$$

Comme d'autre part $(\omega_1 \neq a \neq \omega_2) \rightarrow \{ a, a \}$,

on voit que la relation de localisation et une *relation d'équivalence* sur l'ensemble obtenu en retranchant de Γ les points ω_1 et ω_2.

Relation de séparation entre couples. — On dit que le couple ordonné (a, a') *sépare* le couple ordonné (b, b') sur Γ lorsque

$$[(a, b, a') \text{ et } (a', b', a)] \text{ ou } [(a', b, a) \text{ et } (a, b', a')]$$

ce qu'on note $(a, a')/(b, b')$. Cette relation donne lieu à une propriété de réciprocité entre les couples

$$(a, a')/(b, b') \rightarrow (b, b')/(a, a')$$

et subsiste, d'autre part, si l'on y permute les deux éléments d'un couple quelconque ; enfin, si a, a', b, b' sont tous distincts, on a

$$[(a, a')/(b, b')] \text{ ex } [(a, b)/(a', b')] \text{ ex } [(a, b')/(b, a')].$$

CONGRUENCE CYCLIQUE SUR LE CERCLE ORIENTÉ. — Sur l'ensemble des couples ordonnés $(a, b)^*$ de points *distincts* de Γ est donnée, par ailleurs, une relation binaire, dite *relation de congruence cyclique* et notée $(a, b)^* \sim (a', b')^*$, qui est d'abord une *relation d'équivalence :*

II-1 $$(a, b)^* \sim (a, b)^*,$$

II-2 $$(a, b)^* \sim (a', b')^* \rightarrow (a', b')^* \sim (a, b)^*,$$

II-3 $$[(a, b)^* \sim (a', b')^*] \text{ et } [(a', b')^* \sim (a'', b'')^*] \rightarrow (a, b)^* \sim (a'', b'')^*.$$

Cette relation d'équivalence peut être étendue à l'ensemble Γ^2 de tous les couples ordonnés (a, b) de points Γ en désignant par $(a, b) \sim (a', b')$ la relation

$$[(a, b)^* \sim (a', b')^*] \text{ ou } (a = b \text{ et } a' = b').$$

Ainsi complétée, elle induit sur l'ensemble des intervalles fermés $[a, b]$ une nouvelle relation d'équivalence, qui détermine une partition de cet ensemble en classes d'équivalence disjointes ; la classe contenant l'intervalle fermé $[a, b]$ sera dite *longueur cyclique* de $[a, b]$; nous la noterons $\delta(a, b)$, de sorte que

$$(a, b) \sim (a', b') \leftrightarrow \delta(a, b) = \delta(a', b').$$

L'extension à laquelle nous avons procédé entraîne $\delta(a, a) = \delta(b, b)$; la classe d'équivalence qui contient tous les intervalles fermés d'extrémités identiques est dite *longueur nulle*, notée o ; on a donc $\delta(a, a) = o$ et aussi $(a = b) \leftrightarrow \delta(a, b) = o$.

La relation de congruence cyclique ainsi introduite possède les propriétés suivantes :

1° A tout point a de Γ et à toute longueur cyclique δ_0 est associé un point unique b de Γ tel que $\delta(a, b) = \delta_0$.

II-4 $$(\exists^* b)\ [\delta(a, b) = \delta_0].$$

Il en résulte qu'à toute longueur cyclique δ_0 on peut associer une application univoque de Γ dans Γ, qu'on nommera un *glissement*.

2° Quels que soient a, b, a', b' sur Γ, on a

II-5 $$(a.\ b) \sim (a', b') \to (a, a') \sim (b, b').$$

Cet axiome exprime qu'un glissement sur le cercle orienté conserve les longueurs cycliques.

3° Quels que soient a, b, c, a', b', c', sur Γ, on a

II-6 $$[(a, b) \sim (a', b')] \text{ et } [(b, c) \sim (b', c')] \sim (a, c)\ (a', c').$$

Cet axiome exprime que, sur le cercle orienté, le produit de deux glissements est un glissement.

Supposons qu'on ait $(a, b) \sim (b', c')$ et $(b, c) \sim (a', b')$ et soit d' le point de Γ défini par $(b, c) \sim (c', d')$, de sorte que $(a', b') \sim (c', d')$; II-5 donne alors $(a', c') \sim (b', d')$; mais II-6 donne par ailleurs $(a, c) \sim (b', d')$, si bien que $(a, c) \sim (a', c')$. L'axiome II-6 se trouve complété par le théorème

$$[(a, b) \sim (b' c')] \text{ et } [(b, c) \sim (a', b')] \to (a, c) \sim (a', c').$$

Si (a, b) et (a', b') sont congruents, (a, a') et (b, b') le sont aussi, d'après II-5 ; comme $(b' a)$ est congruent à lui-même, le théorème précédent montre que (b', a') et (b, a) le sont aussi ; on obtient en fin de compte

$$(a, b) \sim (a', b') \to (b, a) \sim (b', a').$$

Soit a un point de Γ et δ_0 une longueur cyclique ; soit b le point de Γ défini par $\delta(a, b) = \delta_0$. Il existe sur Γ un point b' tel que $\delta(a, b') = \delta(b, a)$, donc tel, d'après la propriété précédente, que $\delta(b', a) = \delta(a, b) = \delta_0$. L'axiome II-4 se trouve complété par le théorème

$$(\exists^* b')\ [\delta(b', a) = \delta_0].$$

De plus, si $\delta_0 \neq 0$, a est distinct à la fois de b et de b', et l'on a, soit (b, a, b'), soit (b', a, b), soit $b = b'$.

Opération d'addition sur les longueurs cycliques. — Définissons une addition sur l'ensemble Γ^2 des couples ordonnés en posant $(a, c) = (a, b) + (b, c)$; nos derniers axiomes permettent alors de construire une addition sur l'ensemble L des longueurs cycliques, telle que $\delta(a, c) = \delta(a, b) + \delta(b, c)$; cette opération, qui admet 0 comme élément neutre, est commutative et associative. Nous pouvons écrire maintenant une série de formules de Chasles

$\delta(a, a) = 0 \quad \delta(a, b) + \delta(b, a) = 0 \quad \delta(a, b) + \delta(b, c) + \delta(c, a) = 0$, etc...

Liaison entre l'ordre cyclique et la congruence cyclique. — *Conservation de l'ordre cyclique par glissement.* — Nous exprimons que la structure d'ordre cyclique définie sur Γ est compatible avec la structure de congruence cyclique définie sur Γ^2 en posant :

Quels que soient a, b, c, a', b', c' sur Γ, on a

III-1 $$(a, b, c) \text{ et } [(a, a') \sim (b, b') \sim (c, c')] \to (a', b', c').$$

Relation d'ordre cyclique entre longueurs cycliques. — Choisissons ω sur Γ et associons à toute longueur cyclique δ_i le point a_i tel que $\delta(\omega, a_i) = \delta_i$; la relation (a_1, a_2, a_3) définit alors entre $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ une relation qui est indépendante du point ω choisi ; on la note $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, et l'on a

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \to (\delta_1 + \delta_0, \delta_2 + \delta_0, \delta_3 + \delta_0).$$

Ainsi la structure d'ordre cyclique définie sur Γ induit sur L *une structure d'ordre cyclique compatible avec l'addition.*

Introduisant ensuite la relation (o, δ_1, δ_2) ou $(o = \delta_1 \neq \delta_2)$, qu'on note $\delta_1 < \delta_2$, on définit sur L *une structure d'ordre total pour laquelle* L *admet* o *comme premier élément.*

Médiation des intervalles. — Tel qu'il se trouve actuellement construit, le cercle orienté peut encore ne contenir qu'un nombre fini de points ; l'axiome que voici va enrichir ses propriétés tout en lui assurant désormais un nombre infini d'éléments :

A tout couple (a, b) de points distincts de Γ est associé un point unique c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $(a, c) \sim (c, b)$,

III-2 $$(a \neq b) \rightarrow (\exists^* c)\ [[(a, c) \sim (c, b)] \text{ et } (a, c, b)].$$

Ce point c est dit le *milieu* de l'intervalle fermé $[a, b]$ d'extrémités distinctes ; on étend cette définition à tous les intervalles fermés en appelant milieu de l'intervalle fermé $[a, a]$ le point a lui-même.

Rappelons que, dans la construction de M. G. Choquet, la propriété analogue résulte, non pas seulement des axiomes liant l'ordre et la congruence sur la droite orientée, mais aussi des axiomes régissant le plan qu'on associe ultérieurement à la droite.

Opposition des points. — Soit a un point de Γ ; prenons sur Γ un point b_1 distinct de a, et soit b_2 le point de Γ défini par $(b_1, a) \sim (a, b_2)$; considérons alors le point c défini de la manière suivante :

— si $b_1 = b_2$, on pose $c = b_1 = b_2$;
— si (b_1, a, b_2), c est le milieu de $[b_2, b_1]$;
— si (b_2, a, b_1), c est le milieu de $[b_1, b_2]$.

On constate aisément qu'on a, dans tous les cas $(a, c) \sim (c, a)$ et $(a \neq c)$ et on démontre par l'absurde qu'il ne peut exister de point c' distinct de c possédant aussi cette propriété : si, par exemple, (b_1, a, b_2), c' ne saurait, ni se confondre avec b_1 ou b_2, ni appartenir à $[b_1, b_2]$, qui aurait alors deux milieux a et c', ni appartenir à $[b_2, b_1]$, qui aurait alors deux milieux c et c'.

Ainsi, à tout point a de Γ est associé un point unique c distinct de a et tel que $(a, c) \sim (c, a)$; ce point est dit l'*opposé* de a sur Γ ; on le note $\bar{a}$, de sorte que

$$\delta(a, \bar{a}) = \delta(\bar{a}, a) \neq o.$$

Remarquons que ces relations subsistent si l'on y permute a et $\bar{a}$, d'où il résulte que $a = \bar{\bar{a}}$: *l'opposé de l'opposé d'un point est ce point lui-même.*

Soit a, b deux points de Γ, et soit b_1 le point de Γ défini par $(a, \bar{a}) \sim (b, b_1)$; on a alors
$$\delta(b, b_1) + \delta(b, b_1) = o,$$
et comme aussi
$$\delta(b, b_1) + \delta(b_1, b) = o,$$
on en tire $(b, b_1) \sim (b_1, b)$; cette relation, jointe à $b \neq b_1$, montre que $b_1 = \bar{b}$, de sorte que
$$\delta(a, \bar{a}) = \delta(b, \bar{b}).$$

La classe d'équivalence qui contient tous les intervalles fermés d'extrémités opposées est dite *longueur fondamentale*, notée Δ ; on a donc $\delta(a, \bar{a}) = \Delta$ et aussi

$$(b = \bar{a}) \longleftrightarrow \delta(a, b) = \Delta.$$

Remarquons que $\Delta \neq o$: *la longueur nulle et la longueur fondamentale sont distinctes.*

L'addition des longueurs cycliques possède maintenant les propriétés suivantes :

$$o + o = \Delta + \Delta = o,$$
$$o + \Delta = \Delta + o = \Delta,$$

et nous pouvons écrire une nouvelle série de formules de Chasles :

$\delta(a, \overline{a}) = \Delta$, $\quad \delta(a, b) + \delta(b, \overline{a}) = \Delta$, $\quad \delta(a, b) + \delta(b, c) + \delta(c, \overline{a}) = \Delta$, etc...

On obtient aisément $\quad \delta(a, b) = \delta(\overline{a}, \overline{b})$,

et l'axiome III-1 donne $\quad (a, b, c) \longleftrightarrow (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$,

d'où, en particulier $\quad (a, b, \overline{a}) \longleftrightarrow (\overline{a}, \overline{b}, a)$.

Mesure naturelle des longueurs cycliques. — Choisissons ω sur Γ, et soit $\overline{\omega}$ son opposé, de sorte que $\delta(\omega, \overline{\omega}) = \Delta$; rappelons que $\omega \neq \overline{\omega}$. Par application répétée de III-2, on définit le milieu ω_1 de $[\omega, \overline{\omega}]$, puis le milieu ω_2 de $[\omega, \omega_1]$, puis le milieu ω_3 de $[\omega, \omega_2]$, etc... ; la longueur cyclique $\delta(\omega, \omega_n]$ est notée $\frac{\Delta}{2^n}$. Par **addition** répétée de $\frac{\Delta}{2^n}$ sera définie ensuite, quel que soit l'entier naturel k, la longueur cyclique notée $k\frac{\Delta}{2^n}$. Soit alors une longueur cyclique δ_0, et adoptons Δ comme *unité naturelle* sur l'ensemble L. En comparant successivement (pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) la longueur δ_0 aux longueurs de la suite $k\frac{\Delta}{2^n}$, où $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^{n+1} - 1$, **on** construira par le procédé classique, l'opération étant poursuivie indéfiniment au besoin, le nombre réel. rationnel ou irrationnel, compris entre 0 et 2 (2 exclu), qui sera dit la *mesure naturelle* de δ_0.

Ainsi *toute longueur cyclique* δ_0 *a pour mesure naturelle un nombre réel bien déterminé* x_0 *tel que* $0 \leqslant x_0 < 2$.

Continuité sur le cercle orienté. — Soit b un point de Γ et considérons une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de points de Γ tels que, quel que soit l'entier naturel k, on ait $(a_k, a_{k+1}, b)^*$, ce qu'on notera simplement ici $(a_k, a_{k+1}, b)^*_k$. Le cercle orienté est dit *continu* s'il possède la propriété suivante :

IV $\quad (a_k, a_{k+1}, b)^*_k \rightarrow (\exists a')\,[(a_k, a', b)^*_k$ et $(\forall b')\,[a_k, b', b)^*_k \rightarrow (a', b', b)^*]]$

Le point a', nécessairement unique, introduit par cet axiome, s'appelle le *point limite* de la suite a_k.

Dès lors, on pourra établir par le procédé classique que *tout nombre réel* x_0 *tel que* $0 \leqslant x_0 < 2$ *est la mesure naturelle d'une longueur cyclique bien déterminée* δ_0.

En résumé, on aura défini une application biunivoque de l'ensemble L des longueurs cycliques sur l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 2 (2 exclu).

Cercle non orienté. — Au cercle orienté Γ associons le cercle orienté opposé Γ' obtenu :

— en renversant l'ordre cyclique, c'est-à-dire en remplaçant (a, b, c) par (c, b, a), donc aussi $(a, b, c)^*$ par $(c, b, a)^*$;

— en renversant l'ordre des couples, c'est-à-dire en remplaçant (a, b) par (b, a), donc aussi $\delta(a, b)$ par $\delta(b, a)$.

Nous appelons *cercle non orienté* l'ensemble de ces deux cercles orientés opposés.

On notera que les relations de localisation entre points et de séparation entre couples se trouvent définies sur le cercle non orienté, puisque leurs définitions sont invariantes par renversement de l'ordre cyclique.

Consistance de la géométrie sur le cercle. — Considérons l'ensemble Γ des progressions arithmétiques illimitées $a, b, c, \ldots$ de raison 2 ; a contient un terme unique, soit $f(a)$, tel que $0 \leqslant f(a) < 2$. Pour que a et b soient identiques, il faut et il suffit que $f(a) = f(b)$. Soit alors trois progressions, a, b, c, deux à deux distinctes, et désignons par (a, b, c) la relation

$[f(a) < f(b) < f(c)]$ ou $[f(b) < f(c) < f(a)]$ ou $[f(c) < f(a) < f(b)]$.

On s'assure aisément que les trois axiomes I sont vérifiés. L'axiome IV l'est aussi.

La congruence $f(b) - f(a) = f(b') - f(a')$ (mod. 2) définit sur l'ensemble Γ^2 des couples ordonnés (a, b) une relation d'équivalence que nous notons

$$(a, b) \frown (a', b') ;$$

la classe d'équivalence correspondante contenant le couple ordonné (a, b) sera désignée par $\delta(a, b)$. Les six axiomes II se trouvent vérifiés.

En discutant les diverses possibilités offertes par les prémisses, on verra enfin que les deux axiomes III sont également vérifiés, la progression c dont III-2 affirme l'existence étant fournie, tantôt par $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$, tantôt par $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \varepsilon$, où $\varepsilon = \pm 1$ suivant le cas.

En résumé, tous les axiomes que nous avons introduits, se trouvant affirmés pour notre modèle, doivent être tenus pour compatibles ; de manière explicite, *si l'arithmétique est consistante, la géométrie sur le cercle l'est aussi.*

Jean Chauvineau, *professeur au Lycée Henri-IV.*