37e Année — N° 187 Octobre 1957

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

SUR LA NOTION DE DIMENSION *

par M. Henri CARTAN
Professeur à la Sorbonne

1. VARIÉTÉS DE DIMENSION n.

L'exemple le plus connu d'espace de « dimension » n est l'espace numérique (ou « euclidien ») R^n, dont les points sont les systèmes de n nombres réels $x_1, ..., x_n$. Tout hyperplan de R^n, c'est-à-dire tout ensemble H défini par une équation linéaire (non nécessairement homogène) $f(x) = 0$, sépare l'espace en deux demi-espaces définis respectivement par $f(x) > 0$ et par $f(x) < 0$; de plus, étant donnés arbitrairement deux points distincts x et y, il existe toujours un hyperplan H qui les « sépare », c'est-à-dire tel que x soit dans l'un des demi-espaces définis par H et y dans l'autre. Observons que H est homéomorphe (1) à l'espace R^{n-1}, donc est de « dimension » $n-1$.

L'espace R^n nous donne l'occasion de rencontrer d'autres espaces qu'il semble naturel de qualifier aussi de « dimension » n. Par exemple, soit S_n la *sphère* définie, dans l'espace R^{n+1}, par l'équation $(x_1)^2 + ... + (x_{n+1})^2 = 1$; c'est un sous-espace fermé et borné, donc *compact* ; de plus, la projection stéréographique établit une homéomorphie entre S_n privée d'un de ses points, et l'espace R^n ; on voit donc que chaque point de S_n possède un voisinage ouvert homéomorphe à R^n.

Considérons aussi l'espace projectif (réel) P_n, dont les points sont définis par $n+1$ coordonnées homogènes $z_0, ..., z_n$ non toutes nulles, avec la convention que deux systèmes de coordonnées homogènes qui sont proportionnels définissent le même point de l'espace projectif P_n ; à vrai dire, pour définir complètement P_n, il faudrait dire avec précision quelle est la topologie de P_n, mais nous n'entrerons pas dans les détails.

(*) Conférence prononcée le 9 mai 1957 à l'Institut Henri-Poincaré, huitième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

(1) Rappelons que deux espaces topologiques sont *homéomorphes* s'il existe une homéomorphie entre eux, c'est-à-dire une correspondance biunivoque dans laquelle les sous-ensembles ouverts se correspondent ; cela revient à dire que l'application de l'un des espaces sur l'autre (définie par cette correspondance) est bicontinue.

L'ensemble des points de P_n tels que la coordonnée z_i soit nulle est un sous-ensemble fermé H_i, lui-même homéomorphe à P_{n-1} ; H_0 est ce qu'on appelle souvent l' « hyperplan à l'infini ». Le complémentaire U_i de H_i est un ensemble ouvert de P_n qui est *homéomorphe* à R^n (par exemple, U_0 est l'ensemble des points de P_n situés, comme on dit, « à distance finie ») : un point de U_i est repéré par n nombres réels, à savoir les quotients :

$$z_0/z_i, \ldots, z_{i-1}/z_i, z_{i+1}/z_i, \ldots, z_n/z_i.$$

Ainsi P_n est la réunion de $n+1$ ensembles ouverts dont chacun est homéomorphe à R^n.

D'une manière générale, on appelle *variété* de dimension n tout espace topologique V, qui satisfait à l'axiome de séparation de Hausdorff (à savoir : pour tout couple de points distincts x, y, il existe un voisinage de x et un voisinage de y sans point commun), et jouit en outre de la propriété suivante : *tout point de* V *possède un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace* R^n. On voit que R^n lui-même, S_n, P_n sont des variétés de dimension n.

Problème : Est-il possible qu'une variété V de dimension n et une variété W de dimension m soient *homéomorphes* lorsque $n \neq m$? Si c'était possible, la notion de « dimension » d'une variété n'aurait aucune signification topologique. Heureusement, c'est impossible ; mais cette impossibilité est fort difficile à démontrer.

Analysons d'un peu plus près la question : tout revient à savoir s'il peut exister une homéomorphie entre un ouvert U de R^n et un ouvert U' de R^m lorsque $m \neq n$ (U et U' étant, bien entendu, supposés non vides). Supposons qu'il en soit ainsi : on aurait donc une application continue f de U sur U', et une application continue g de U' sur U, telles que l'application composée $g \circ f$ soit l'application identique de U, et que $f \circ g$ soit l'application identique de U'. Si nous supposions de plus que f et g ont des dérivées partielles continues, nous pourrions démontrer une telle impossibilité, de la manière suivante : les coordonnées y_j d'un point de U' sont alors des fonctions continûment différentiables f_j des coordonnées x_i d'un point de U :

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n) ;$$

et de même $x_i = g_i(y_1, \ldots, y_m)$. Introduisons les différentielles :

$$dy_j = \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, dx_i, \qquad dx_i = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j}\, dy_j ;$$

la matrice des $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ définit, en chaque point $x \in U$, une application *linéaire* de R^n dans R^m ; la matrice des $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}$ définit, au point correspondant $y = f(x)$, une application linéaire de R^m dans R^n ; le théorème de la dérivation des fonctions composées, et le fait que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des applications identiques, montre que le produit de ces deux matrices (dans un ordre quelconque) est la matrice unité. Autrement dit, si $x \in U$ et $y = f(x)$, nous avons deux applications linéaires, l'une de R^n

dans R^m, l'autre de R^m dans R^n, qui sont inverses l'une de l'autre ; ceci prouve que R^m et R^n, comme *espaces vectoriels*, sont *isomorphes*. Or, un théorème d'algèbre nous affirme alors que le nombre n des éléments d'une *base* vectorielle de R^n est égal au nombre m des éléments d'une base de R^m, contrairement à l'hypothèse $n \neq m$.

Nous venons de démontrer l'invariance de la dimension par les homéomorphismes continûment différentiables ; et, pour cela, nous avons utilisé l'invariance de la « dimension » des espaces vectoriels, le mot « dimension » étant alors pris dans un sens purement algébrique (nombre des éléments d'une base vectorielle).

Pour prouver l'invariance de la dimension de R^n vis-à-vis des homéomorphismes quelconques (non nécessairement différentiables), c'est beaucoup plus difficile. La première démonstration date de 1911 et est due à BROUWER. Il n'est pas question de la reproduire ici, ni même d'en donner une idée. Elle repose sur la notion d'approximation simpliciale, et a des rapports étroits avec la notion d' « homologie » (cf. une conférence ultérieure de L. SCHWARTZ).

Une autre démonstration de l'invariance de la dimension repose sur une idée féconde de LEBESGUE (2), qui elle aussi est en relation avec l'homologie : considérons le cube I^n de dimension n, produit de n fois le segment $I = [0, 1]$ par lui-même ; on peut en faire un pavage par des ensembles fermés (voir fig. 1 pour le cas $n = 2$), tels que chaque point du cube appartienne au plus à $n + 1$ tels ensembles ; et cela est possible avec des ensembles de diamètre arbitrairement petit. On peut en outre démontrer que, pour n'importe quel recouvrement de I^n avec des ensembles fermés assez petits, il y a toujours au moins un point du cube qui appartient à au moins $n + 1$ ensembles du recouvrement. Le nombre n exprime ainsi une propriété purement topologique de l'espace I^n ; et, de là, on déduit facilement l'impossibilité d'une homéomorphie d'un ouvert de R^n sur un ouvert de R^m pour $m \neq n$. Voici l'énoncé précis du résultat de LEBESGUE : si I^n est recouvert par des ensembles fermés F_i tels que chaque F_i ne rencontre jamais simultanément deux faces opposées du cube, alors il existe un point commun à $n + 1$ des F_i.

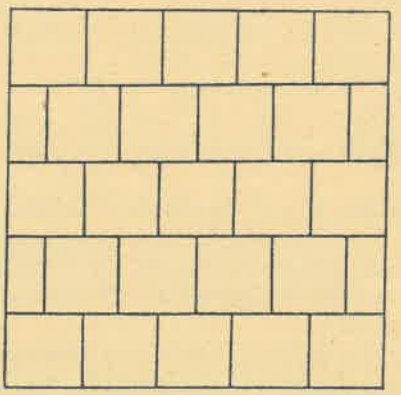


FIG. 1

(2) Lebesgue, dit-on, eut l'idée de cette caractérisation de la dimension en construisant un mur de briques dans une maison du petit village de Gouvieux (Oise).

2. Axiomes pour une théorie de la dimension.

On voudrait pouvoir parler de la dimension d'espaces plus généraux que ceux précédemment envisagés ; par exemple, considérons un sous-espace A de R^n, fermé pour fixer les idées : peut-on lui attribuer une dimension qui soit un invariant topologique, donc ne change pas si on remplace A par un autre sous-espace B d'un R^m, sous la seule condition que B soit homéomorphe à A ?

Dans une théorie de la dimension, on doit d'abord fixer avec précision la classe $\mathcal{C}$ des espaces topologiques pour lesquels on désire définir une dimension (qui soit un nombre entier, éventuellement nul ou infini). Nous supposerons que la classe $\mathcal{C}$ ne contient que des espaces satisfaisant à l'axiome de séparation de Hausdorff, et qu'elle contient tous les *polyèdres*. Rappelons d'abord ce qu'on appelle polyèdre ; et, pour commencer, ce que c'est qu'un *p-simplexe* (ou simplexe de dimension p) : prenons, dans un espace R^n, une suite de $p+1$ points x_i ($i = 0, ..., p$) tels qu'il n'existe aucun plan de dimension $< p$ les contenant (ce qui est toujours possible si $n \geqslant p$) ; les barycentres de masses positives (ou nulles) portées par ces points ont pour lieu le plus petit ensemble convexe contenant ces points ; on l'appelle le p-simplexe de sommets $x_0, ..., x_p$; chacun de ses points s'écrit d'une seule manière $\sum_i \lambda_i x_i$, les nombres réels $\lambda_i \geqslant 0$ étant tels que $\sum_i \lambda_i = 1$. Deux simplexes de même dimension p sont homéomorphes ; pour $p = 0$, on trouve un point, pour $p = 1$ un segment, pour $p = 2$ un triangle, pour $p = 3$ un tétraèdre. Cela dit, un polyèdre est un espace qu'on peut recouvrir avec un nombre fini de sous-espaces fermés homéomorphes à des simplexes (de diverses dimensions), de manière qu'ils s'ajustent convenablement : l'intersection de deux quelconques des simplexes du recouvrement doit être une « face » de chacun de ces deux simplexes (une *face* d'un p-simplexe est le lieu des barycentres de certains de ses sommets ; c'est un simplexe de dimension 0, 1, ... ou $p-1$).

Revenons à la classe $\mathcal{C}$: nous désirons qu'elle contienne tous les polyèdres, et qu'elle satisfasse en outre à la condition suivante : tout espace homéomorphe à un *sous-espace fermé* d'un espace X de la classe $\mathcal{C}$ est aussi dans la classe $\mathcal{C}$. Une telle classe est donc forcément assez vaste, puisqu'elle contient tous les sous-espaces fermés des polyèdres.

Exemples de classes $\mathcal{C}$: 1) la classe $\mathcal{C}_1$ des espaces *compacts* (rappelons qu'un espace X est compact s'il satisfait à l'axiome de Hausdorff et possède en outre la propriété de Borel-Lebesgue : pour tout recouvrement de X par une famille d'ouverts U_i, il existe un nombre fini parmi ces U_i qui recouvrent X) ;

2) la classe $\mathcal{C}_2$ des espaces localement compacts (X est localement compact s'il satisfait à l'axiome de Hausdorff et si tout point possède au moins un voisinage compact) ; l'espace R^n appartient à la classe $\mathcal{C}_2$, non à la classe $\mathcal{C}_1$;

3) la classe $\mathcal{C}_3$ des espaces *métrisables de type dénombrable,* qui contient notamment tous les sous-espaces de R^n, quel que soit n. Un espace X est dit métrisable si la topologie de E peut être définie par une *distance,* ou, plus précisément, par une « métrique » qui, à chaque couple de points x, y, associe un nombre $d(x, y) \geqslant 0$, de manière que :

$d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
$d(x, y) = d(y, x)$;
$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (« inégalité du triangle »).

Un tel espace métrisable X est « de type dénombrable » s'il existe une suite dénombrable de points $x_1, ..., x_n, ...$ de X, *partout dense* dans X (c'est-à-dire telle que tout ensemble ouvert non vide contienne au moins un de ces points). L'espace R^n est dans la classe $\mathcal{C}_3$: car l'ensemble dénombrable des points à coordonnées rationnelles est partout dense. On montre que tout sous-espace A d'un espace X de la classe $\mathcal{C}_3$ est dans $\mathcal{C}_3$, même si A n'est pas fermé dans X ;

4) la classe $\mathcal{C}_4$ des espaces *normaux :* un espace X est normal s'il satisfait à l'axiome de Hausdorff et si, chaque fois que A et B sont des sous-ensembles fermés disjoints, il existe une fonction continue numérique sur X, égale à 0 sur A et à 1 sur B. Tout sous-espace *fermé* d'un espace normal est normal.

On démontre que tout espace compact est normal (autrement dit, $\mathcal{C}_4$ contient $\mathcal{C}_1$) ; et que tout espace métrisable est normal (donc $\mathcal{C}_4$ contient $\mathcal{C}_3$).

Pour chacune des classes précédentes, on a une *théorie de la dimension.* D'une manière générale, qu'exige-t-on d'une théorie de la dimension ? On suppose que l'on a, à tout espace X de la classe considérée $\mathcal{C}$, attaché un *entier* dim X, appelé la dimension de X, de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

(I) $\dim X \geqslant -1$; dim X peut être infini ; dim X est $\geqslant 0$ si et seulement si X n'est pas vide ;

(II) si X est homéomorphe à X', alors $\dim X = \dim X'$;

(III) si A est un sous-espace *fermé* de X, alors $\dim A \leqslant \dim X$;

(IV) si X est réunion de deux sous-espaces fermés A_1 et A_2, alors $\dim X = \sup(\dim A_1, \dim A_2)$;

(IV *bis* ; axiome facultatif) si X est réunion d'une suite dénombrable de sous-espaces fermés A_i, alors $\dim X = \sup(\dim A_i)$;

(V) la dimension du cube I^n est égale à n.

Alors, si R^n est dans la classe $\mathcal{C}$, la dimension de R^n est n : en effet, $\dim R^n \geqslant \dim I^n$ d'après (III), donc $\dim R^n \geqslant n$ d'après (V) ; d'autre part, R^n est une réunion dénombrable de cubes fermés, donc $\dim R^n \leqslant n$ d'après (IV *bis*).

Remarque : Il faut bien se garder d'imposer l'axiome suivant : « si f est une application continue de X dans Y, l'image $f(X)$ est de dimension au plus égale à dim X ». En effet, la « courbe de Peano » est une application continue du segment I *sur* le carré I^2, et l'on aurait donc une

contradiction avec l'axiome (V). (Pour la courbe de Peano, voir l'Appendice).

En dehors des axiomes précédents, il en est un autre d'une nature assez différente. Introduisons d'abord une notion : étant donnés deux sous-ensembles *fermés disjoints* A et B d'un espace X, on dit qu'un sous-ensemble fermé C *sépare* A et B si X-C est réunion de deux ouverts disjoints contenant respectivement A et B. Le nouvel axiome est le suivant :

Axiome (A) : Si X est un espace tel que deux fermés disjoints puissent toujours être séparés par un sous-espace fermé de dimension $\leqslant n-1$, alors dim $X \leqslant n$.

3. La théorie de Menger-Urysohn.

On prend comme classe $\mathcal{C}$ la classe $\mathcal{C}_3$ des espaces métrisables de type dénombrable, et on impose non seulement l'axiome (A), mais sa réciproque : si dim $X \leqslant n$, alors deux fermés disjoints de X peuvent toujours être séparés par un sous-espace fermé de dimension $\leqslant n-1$. Cet axiome ainsi renforcé et l'axiome (I) *définissent complètement la dimension :* d'une façon précise, on définit, par récurrence sur l'entier n, ce que c'est qu'un espace X de dimension $\leqslant n$; c'est, par définition, un espace tel que, étant donnés arbitrairement deux sous-ensembles fermés disjoints, ils puissent être séparés par un sous-espace fermé de dimension $\leqslant n-1$. Puisque, d'après l'axiome (I), on sait quels sont les espaces de dimension $\leqslant -1$ (il y a uniquement l'espace vide), on obtient successivement la définition des espaces de dimension $\leqslant 0$, des espaces de dimension $\leqslant 1$, etc... La *dimension* d'un espace X sera alors égale au plus petit des entiers n tels que dim $X \leqslant n$, ou à l'infini s'il n'existe pas de tels entiers n.

Dans cette définition de la dimension, on n'a pas tenu compte des conditions (II) à (V). En fait, elles sont remplies [y compris (IV *bis*)] : ce sont ici des *théorèmes*, et, pour les démontrer (ce qui est parfois assez difficile), on doit utiliser le fait que l'espace X est métrisable de type dénombrable. De plus, l'axiome (III) est valable pour tout sous-espace A de X, même non fermé.

Pour tout ce qui concerne cette théorie de la dimension, le lecteur peut se reporter à l'ouvrage de Hurewicz-Wallman (*Dimension theory*, Princeton, 1941), ou au petit livre de Favard, chez Albin Michel.

Si, pour la classe $\mathcal{C}_3$, on avait une autre théorie de la dimension, alors la dimension d'un espace X dans cette nouvelle théorie serait *au plus égale* à sa dimension dans la théorie de Menger-Urysohn : démonstration par récurrence, en utilisant l'axiome (A).

Il est bon d'expliciter ce que c'est qu'un *espace de dimension zéro :* on démontre que X est de dimension 0 si et seulement si tout point de X possède un système fondamental de voisinages dont la frontière (3) est

(3) Rappelons qu'à un sous-ensemble A d'un espace topologique X on associe les deux ensembles suivants : l'adhérence (ou fermeture) $\overline{A}$, qui est le plus petit ensemble fermé contenant A ; et l'intérieur $\mathring{A}$, qui est le plus grand ensemble ouvert contenu dans A ; la différence $\overline{A} - \mathring{A}$ s'appelle la *frontière* de A ; c'est un ensemble fermé, qui est aussi la frontière du complémentaire de A. Dire que la frontière de A est vide, c'est dire que $\mathring{A} = \overline{A}$; pour cela, il faut et il suffit que A soit à la fois ouvert et fermé.

vide. Or, un ensemble dont la frontière est vide n'est pas autre chose qu'un ensemble *à la fois ouvert et fermé*. Exemple d'espace de dimension 0 : soit D le sous-espace des points *irrationnels* du segment I ; D est de dimension 0, car tout point x de D possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés, à savoir les traces sur D des segments de I qui contiennent x et dont les extrémités sont rationnelles. Il y a des espaces *compacts* de dimension 0, formés d'une infinité de points : par exemple, l'espace E, dont les points sont les suites illimitées de chiffres 0 et 1, la topologie étant telle que pour que des suites $s_1, \ldots, s_k, \ldots$ aient pour limite une suite s, il faut et il suffit que, pour tout entier n, la suite s_k ait les mêmes chiffres que s jusqu'au rang n, dès que k est plus grand qu'un certain entier $k(n)$. Cet espace E est compact et de dimension 0 (on le voit en observant que toutes les suites dont les n premiers chiffres sont donnés forment un ensemble à la fois ouvert et fermé dans E). Il existe une application continue f de cet espace E *sur* le segment $I = [0, 1]$: f associe à chaque suite $(a_1, \ldots, a_k, \ldots)$, formée de chiffres 0 et 1, le nombre réel $\sum_k \frac{a_k}{2^k}$ (la série est convergente), nombre dont l'écriture dyadique consiste dans ce système de chiffres, *sauf si les chiffres sont tous égaux à 1 à partir d'un certain rang ;* dans ce dernier cas (par exemple, 0101111...), le nombre défini par la suite est égal à celui défini par la suite 0110000... Ainsi, l'application continue f de E sur I n'est pas biunivoque.

4. La théorie d'Alexandroff-Čech.

Elle est fondée sur l'idée de Lebesgue (ci-dessus, n° 2), convenablement adaptée. On prend pour classe $\mathcal{C}$ la classe $\mathcal{C}_4$ des espaces *normaux*. Etant donné un recouvrement d'un espace X par un nombre fini d'ouverts U_i, convenons de dire que ce recouvrement est de dimension $\leqslant n$ si chaque point de X appartient à au plus $n + 1$ ensembles du recouvrement. D'autre part, disons qu'un recouvrement par des ouverts V_j est *plus fin* qu'un recouvrement par des ouverts U_i si chaque V_j est contenu dans au moins un ensemble U_i. Dans la théorie d'Alexandroff-Čech, on donne la définition suivante :

Un espace normal X *est de dimension* $\leqslant n$ *si, pour tout recouvrement de* X *par un nombre fini d'ouverts, il existe un recouvrement plus fin, formé aussi d'un nombre fini d'ouverts, et qui soit de dimension* $\leqslant n$.

On démontre que cette théorie de la dimension satisfait à tous les axiomes (I) à (V) [sauf peut-être (IV *bis*)], ainsi qu'à l'axiome (A).

On a déjà dit que la classe $\mathcal{C}_4$ contient la classe $\mathcal{C}_3$. Il est très remarquable que, sur la classe $\mathcal{C}_3$, la dimension au sens d'Alexandroff-Čech est égale à la dimension au sens de Menger-Urysohn.

D'autre part, la classe $\mathcal{C}_4$ contient la classe $\mathcal{C}_1$ des espaces *compacts ;* la théorie d'Alexandroff-Čech fournit donc une *théorie de la dimension des espaces compacts* (la théorie de Menger-Urysohn donnait seulement la dimension des espaces compacts *métrisables*). Cette théorie de la dimension des espaces compacts satisfait à tous les axiomes, y compris (IV *bis*).

On va maintenant donner une autre caractérisation de la dimension des espaces compacts. Il est une classe d'espaces compacts dont la dimension est évidente : ce sont les polyèdres ; en effet, la dimension d'un polyèdre est évidemment, en vertu des axiomes (I) à (V), la plus grande des dimensions des simplexes qui le composent. Cela dit, la notion de dimension d'un espace compact va pouvoir être ramenée à celle de dimension d'un polyèdre. Pour simplifier, supposons que la topologie de l'espace compact considéré X soit définie par une distance ; une application continue de X dans un polyèdre P sera, par définition, une *ε-application* si l'image réciproque de chaque point de P est un ensemble de X dont le diamètre est $\leqslant \varepsilon$ (ε désigne ici un nombre > 0). On démontre le théorème suivant : *pour qu'un espace compact* X *soit de dimension* $\leqslant n$, *il faut et il suffit que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un polyèdre* P *de dimension* $\leqslant n$ *et une* ε*-application de* X *dans* P.

Voici une application de ce critère. Il est presque évident que le *produit* de deux polyèdres P et Q peut être décomposé en simplexes, et que la dimension de $P \times Q$ ainsi décomposé est la *somme* des dimensions de P et de Q. Il en résulte ceci : si X et Y sont deux espaces compacts, on a :

$$(1) \qquad \dim (X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y.$$

Malheureusement, on n'a pas toujours l'*égalité* ; Pontrjagin a donné, en 1930, l'exemple de deux espaces compacts de dimension 2 dont le produit est de dimension 3.

L'inégalité (1) vaut aussi dans la théorie d'Alexandroff-Čech : en fait, si X et Y sont dans la classe $\mathcal{C}_4$, on peut les plonger dans des espaces compacts $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ tels que $\dim \widetilde{X} = \dim X$, $\dim \widetilde{Y} = \dim Y$; alors $X \times Y$ est plongé dans $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$, et on a :

$$\dim (X \times Y) \leqslant \dim (\widetilde{X} \times \widetilde{Y}) \leqslant \dim \widetilde{X} + \dim \widetilde{Y} = \dim X + \dim Y,$$

ce qui démontre bien (1).

5. Dimension des espaces localement compacts.

Dans cette théorie, on définit la dimension d'un espace localement compact X comme la *borne supérieure* des dimensions des sous-espaces compacts de X (la dimension d'un compact étant définie comme au n° 4). On obtient ainsi une théorie de la dimension pour la classe $\mathcal{C}_2$; elle satisfait à tous les axiomes (I) à (V) [y compris (IV *bis*)], ainsi qu'à l'axiome (A) et à la relation (1).

Nous avons donc essentiellement deux théories : une théorie de la dimension pour les espaces de la classe $\mathcal{C}_3$ (cf. n° 3), et la présente théorie pour la classe $\mathcal{C}_2$ de tous les espaces localement compacts. Il est agréable de savoir que sur la classe commune $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_2$, ces deux théories coïncident : si un espace localement compact X appartient à la classe $\mathcal{C}_3$ (et, pour cela, il faut et il suffit que X soit réunion d'une suite dénombrable de sous-espaces compacts métrisables), alors la dimension de X au sens de Menger-Urysohn est bien égale à la borne supérieure des

dimensions des compacts contenus dans X. Cela tient à ce que la dimension de Menger-Urysohn satisfait à l'axiome (IV *bis*).

Dans chacune des deux théories précédentes, la notion de dimension a un *caractère local :* pour que $\dim X \leqslant n$, il faut et il suffit que chaque point possède un *voisinage fermé* de dimension $\leqslant n$.

6. Sous-espaces de l'espace R^n.

Soit X un sous-espace de R^n ; X est donc dans la classe $\mathcal{C}_3$. Si X contient un ouvert non vide de R^n, il est évident que $\dim X = n$. On démontre la réciproque : si un sous-espace X de R^n est de dimension n exactement, X contient un ouvert non vide de R^n. Dans le cas particulier où X est compact, on s'en rend compte facilement : supposons en effet que X n'ait pas de point intérieur ; prenons un polyèdre $P \subset R^n$, qui contienne X, et soit formé de simplexes de diamètre $\leqslant \varepsilon$; choisissons, à l'intérieur de chaque n-simplexe de P, un point n'appartenant pas à X ; projetons, depuis ce point, sur la frontière du simplexe, la partie de X située dans le simplexe. En procédant ainsi pour tous les n-simplexes de P, on obtient une application continue de X dans la réunion P' des simplexes de P dont la dimension est $\leqslant n - 1$; ceci est une ε-application de X dans un polyèdre dont la dimension est $\leqslant n - 1$. On en déduit bien que $\dim X \leqslant n - 1$.

Quels sont les espaces compacts que l'on peut réaliser comme sous-espace (fermé) d'un espace numérique R^q (et donc aussi comme sous-espace d'un cube I^q) ? Un tel espace doit évidemment être *métrisable.* On a inversement le théorème (Menger-Nöbeling) : si X est un espace compact métrisable de dimension n, il est possible de réaliser X comme sous-espace fermé du cube I^{2n+1} de dimension $2n + 1$. Au contraire, il y a des espaces compacts métrisables de dimension n qu'on ne peut pas réaliser comme sous-espace du cube I^{2n} (par exemple, la réunion des faces de dimension n d'un simplexe de dimension $2n + 2$).

7. Applications dans la sphère S_n.

Soit X un espace *compact,* et A un sous-espace fermé de X ; toute application continue de A dans l'espace R^n peut se prolonger en une application continue de X tout entier dans R^n (ceci est même vrai si X est normal). Mais si on considère des applications dans la *sphère* S_n, il n'en est plus de même : par exemple, soit B_{n+1} la *boule* de dimension $n + 1$, ensemble des points de R^{n+1} dont la distance à l'origine est $\leqslant 1$ (S_n est la frontière de B_{n+1}) ; soit f l'application identique de S_n ; on démontre que f ne peut pas se prolonger en une application continue de B_{n+1} dans S_n.

On a la caractérisation suivante de la dimension des espaces compacts : pour que $\dim X \leqslant n$, il faut et il suffit que, quel que soit le sous-espace fermé $A \subset X$, et l'application continue f de A dans S_n, il existe un prolongement de f en une application continue de X dans S_n.

La même caractérisation est valable pour la dimension de Menger-Urysohn (X étant alors métrisable de type dénombrable).

On en déduit la propriété suivante : si Y est un sous-espace *fermé* d'un espace localement compact X, on a :

$$\dim X \leqslant \sup(\dim Y, \dim(X - Y)) \quad (2)$$

en fait, la même inégalité vaut aussi dans la théorie de Menger-Urysohn, car alors l'ouvert $X - Y$ est réunion d'une suite dénombrable de fermés.

8. Sous-espaces séparateurs.

Rappelons qu'un espace X est dit *connexe* s'il n'est pas réunion de deux sous-ensembles ouverts non vides et disjoints. Si on enlève d'un espace connexe X un sous-ensemble fermé A, il se peut que l'espace restant $X - A$ ne soit pas connexe (exemple : X est l'espace R^n, et A un hyperplan). Cependant, on démontre : si X est une *variété* connexe de dimension n, et si A est un sous-espace fermé de dimension $\leqslant n - 2$, l'espace $X - A$ est connexe (par exemple, le plan privé d'un point est connexe). Que peut-on dire dans le cas où A est de dimension $n - 1$, et plus précisément dans le cas où A, comme espace topologique, est une variété de dimension $n - 1$? Signalons, sans démonstration évidemment, le théorème de Jordan-Brouwer généralisé : soit X une variété « orientable » de dimension n, connexe et « simplement connexe » (cela signifie que toute courbe fermée peut se déformer en un point) ; si une variété (connexe ou non) de dimension $n - 1$ est plongée comme sous-ensemble fermé A dans X, le nombre des composantes connexes de $X - A$ est égal à celui des composantes connexes de A augmenté d'une unité ; en outre, chaque composante connexe de A est nécessairement « orientable ». Ceci s'applique notamment au cas où X est l'espace R^n.

9. Relation avec les mesures k-dimensionnelles.

Soit X un espace métrisable de type dénombrable. Supposons qu'on ait choisi une *métrique* sur X. Alors, pour chaque entier n, soit $m_n(X)$ la borne inférieure de toutes les sommes $\sum_i d(X_i)^n$ relatives à tous les recouvrements dénombrables de X par des X_i ; $d(X_i)$ désigne le « diamètre » de X_i calculé avec la métrique donnée. Lorsque X est compact, on peut se borner à considérer les recouvrements finis. On montre ceci : si $m_{n+1}(X) = 0$, alors $\dim X \leqslant n$. Il y a une sorte de réciproque : si $\dim X \leqslant n$, il existe une métrique sur X pour laquelle $m_{n+1}(X) = 0$; on peut même trouver une réalisation de X comme sous-espace de I^{2n+1} de manière que la métrique induite par la métrique du cube convienne.

Par exemple, prenons pour X le segment I, qui est de dimension 1, et pour métrique la distance habituelle de deux points du segment ; il est bien clair que l'on peut recouvrir I avec un nombre fini de segments dont la somme des *carrés* des distances soit arbitrairement petite.

Conclusion. — On espère, par cet aperçu forcément rapide, avoir donné quelque idée de la diversité des questions et des problèmes qui, en topologie, se rattachent à la notion de « dimension ».

Appendice : la courbe de Peano

Considérons un triangle rectangle et isocèle T, et soient s_0 et s_1 les sommets des angles aigus. On va définir une application continue g du segment $I = [0, 1]$ *sur* T, telle que $g(0) = s_0$ et $g(1) = s_1$. En complétant la « courbe » ainsi obtenue au moyen d'une symétrie par rapport à l'hypoténuse de T, on aura une « courbe » qui remplit un carré.

Pour cela, reprenons l'espace E défini au n° 3. On va définir une application continue h de E sur T : la bissectrice de l'angle droit de T partage T en deux triangles (fermés) T_0 et T_1, en notant T_0 celui qui contient le sommet s_0 et T_1 celui qui contient s_1. De même, T_0 est réunion de deux triangles égaux T_{00} et T_{01}, et T_1 est réunion de T_{10} et T_{11}. On appelle T_{00} le triangle qui contient s_0, et T_{01} celui qui contient le sommet de l'angle droit de T ; de même, T_{10} contient le sommet de l'angle droit de T, et T_{11} contient s_1. On recommence, en décomposant en deux triangles égaux chacun des triangles T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11} ; on note T_{000}, T_{001} les deux triangles de la décomposition de T_{00}, etc... D'une façon précise, les triangles sont numérotés de telle manière que dans la suite

$$T_{000}, T_{001}, T_{010}, T_{011}, T_{100}, T_{101}, T_{110}, T_{111},$$

deux triangles consécutifs aient toujours un côté commun (fig. 2). On peut continuer : pour chaque entier n, le triangle T sera décomposé en 2^n triangles égaux, dont chacun correspond à une suite de n chiffres égaux à 0 ou 1.

Considérons alors un point x de l'espace E, c'est-à-dire une suite *illimitée* de chiffres égaux à 0 ou 1, par exemple 0010111... ; on lui associe la suite illimitée des triangles :

$$T_0, T_{00}, T_{001}, T_{0010}, T_{00101}, T_{001011}, T_{0010111}, \ldots$$

Chacun contient le suivant, et leur diamètre tend vers zéro ; ils ont donc en commun un point unique. Si on note $h(x)$ ce point commun, on définit ainsi une application h de E dans T ; on vérifie qu'elle est continue ; comme tout point de T appartient à au moins une suite illimitée de triangles emboîtés, h applique E *sur* T. Or, au n° 3, on a défini une application continue f de E sur le segment $I = [0, 1]$; d'autre part, si deux suites illimitées (telles, par exemple, que $x = 0101111...$ et $y = 0110000...$) sont telles que $f(x) = f(y)$, on voit facilement que $h(x) = h(y)$: elles définissent le même point de T. Si, pour chaque point $u \in I$, on choisit un $x \in E$ tel que $f(x) = u$, l'élément $h(x) \in T$ ne dépend pas du choix de x ; c'est une fonction $g(u)$. L'application g de I sur T est continue, car elle applique le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur T_0 et le segment $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sur T_1 ; le segment $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ sur T_{00}, etc... Cette application g est la « courbe de Peano » cherchée.

On peut voir qu'étant donné un point quelconque $t \in T$, il existe au plus quatre points de I que g transforme dans t ; « en général », il n'en existe qu'un.

La figure 3 donne une *approximation* de la courbe de Peano (obtenue en considérant les triangles ayant 6 chiffres en indice).

H. C.

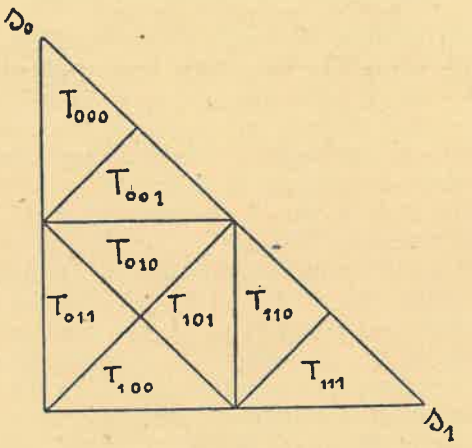


FIG. 2

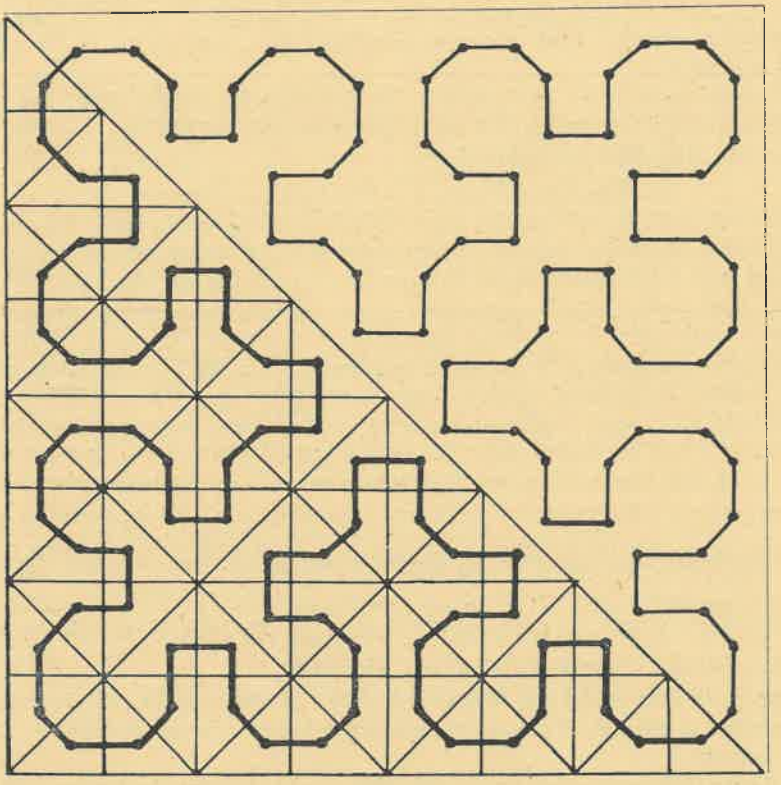


FIG. 3