COMPATIBILITÉ DES STRUCTURES ALGÉBRIQUES ET TOPOLOGIQUES ; GROUPES ET ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES *

par M. GODEMENT
Professeur à la Sorbonne

Le sujet annoncé par le titre est très vaste ; il comprend par exemple les groupes topologiques, les espaces fonctionnels, etc... Nous allons nous borner à faire entrevoir un seul aspect en indiquant quelques propriétés importantes des espaces vectoriels topologiques.

Définition d'un espace vectoriel topologique.

Nous rappelons qu'un *espace vectoriel* défini sur un corps (nous utiliserons seulement le corps R des nombres réels ; le cas du corps des complexes serait analogue) est un espace E qui est un groupe par rapport à une opération commutative notée additivement (au couple x, y d'éléments de E est associée leur somme $x + y$, élément de E), et sur lequel est définie une multiplication par un élément de R : au couple $x \in E$, $\lambda \in R$ est associé $\lambda x \in E$, cette opération étant associative pour les éléments de R et distributive par rapport à l'addition dans R et à l'addition dans E.

Les éléments x sont nommés points, ou vecteurs. Dans une représentation géométrique, nous pouvons confondre un vecteur et le point extrémité du vecteur dont l'origine est placée en O, comme pour la représentation des nombres complexes.

Supposons de plus qu'une topologie soit définie sur E. C'est dire que sur E est définie une famille d'ouverts, ou de fermés, ou que sont définis les voisinages des points, ou encore que sont caractérisées les conditions de convergence de suites ou de continuité de fonctions.

Mais pour que des propriétés puissent exister, il faut que des relations rendent compatibles les structures algébriques et topologiques introduites : *un espace vectoriel topologique* est un espace vectoriel muni d'une topologie vérifiant les conditions suivantes :

1) La fonction $x + y$ est continue en x et en y.

2) et 3) La fonction λx est continue en λ et en x, continuités définies par la topologie ordinaire sur R et la topologie introduite sur E.

Ceci se traduit par des conditions relatives à la convergence de suites. Si $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ converge vers x et $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ converge vers y, la suite des $x_n + y_n$ doit converger vers $x + y$. Et si la suite $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ converge vers λ, la suite des $\lambda_n x_n$ doit converger vers λx.

On peut aussi traduire les conditions de la définition à partir des ouverts de E ; c'est cet aspect que nous allons préciser.

(*) Conférence prononcée le 4 avril 1957 à l'Institut Henri-Poincaré, septième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

Axiomes définissant un espace vectoriel topologique par des conditions relatives à ses ouverts.

a étant donné, à chaque élément x de E associons l'élément $x + a$ qui s'en déduit par translation. Si x est élément générique d'un sous-ensemble U de E, notons $U + a$ l'ensemble des points $x + a$. L'application $x \rightarrow x + a$, (et son inverse $x \rightarrow x - a$), doit être continue ; donc, dire que U est ouvert équivaut à dire que $U + a$ est ouvert quel que soit a.

De même, l'application $x \rightarrow \lambda x$, pour $\lambda \neq 0$, doit être continue en x ; en particulier, si x est point générique d'un voisinage de O, il en est de même de λx.

Nous énonçons donc :

Axiome I : *La famille des ouverts de* E *est invariante par translation de vecteur quelconque.*

La famille des voisinages de O *est invariante par homothétie de centre* O, *de rapport quelconque.*

Par suite, pour définir la topologie sur E, il suffit de caractériser les voisinages de l'origine O, donc d'assurer les continuités 1), 2), 3) à l'origine. Mais 3) a déjà été exprimée ; il reste les conditions 1) et 2).

Dire que la fonction $x + y$ est continue à l'origine signifie que, quel que soit le voisinage U de O, il existe deux voisinages V et W de O tels que :

$$x \in V \quad \text{et} \quad y \in W \Longrightarrow x + y \in U$$

ce qu'on écrit aussi par une notation de somme directe :

$$x + y \in V + W \Longrightarrow x + y \in U, \quad \text{ou} \quad V + W \subset U.$$

Mais soit U' l'intersection de V et W ; c'est un voisinage de O. Nous énoncerons donc :

Axiome II : *Quel que soit le voisinage* U *de* O, *il existe un voisinage* U' *de* O *tel que* $U' + U' \subset U$.

Reste à exprimer la continuité de λx par rapport à λ pour $x = 0$. C'est dire que l'application $\lambda \rightarrow \lambda x$ doit vérifier : quel que soit U, il existe δ tel que : $\left\{ \begin{matrix} x \in U \\ |\lambda| < \delta \end{matrix} \right. \Longrightarrow \lambda x \in U$

ce qui s'écrit aussi :

Axiome III : $\forall U, \exists\ \delta$ *tel que* $|\lambda| < \delta \Longrightarrow \lambda U \subset U$.

Ces trois axiomes sont suffisants.

Espaces vectoriels topologiques localement convexes.

Dans le plan, avec la topologie ordinaire, un ensemble A est dit *convexe* si, quels que soient les points a et b appartenant à A, tout point du segment ab appartient à A. De même, d'après la définition analytique d'un segment de droite, pour un espace vectoriel quelconque sur le corps des réels, un sous-ensemble A est dit convexe si :

$$\forall\ x \text{ et } y \in A, \quad \forall\ \lambda \in [0, 1], \quad z = \lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

Un *espace vectoriel topologique est dit localement convexe* si tout voisinage de l'origine contient un voisinage convexe de l'origine. Cette condition se conserve par translation et par homothétie.

L'espace R^n avec la métrique ordinaire satisfait évidemment à cette condition, puisque tout voisinage de O contient une boule de centre O, qui est bien un voisinage convexe. En fait, les espaces vectoriels topologiques rencontrés sont presque toujours localement convexes, spécialement en analyse. Ce n'est pas toujours le cas en algèbre.

Espaces normés.

Une semi-norme définie sur un espace vectoriel topologique sur le corps des réels est une fonction numérique $p(x)$ qui vérifie les conditions :

1) $p(x)$ est un nombre positif ou nul,
2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$,
3) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

En particulier, remarquons que $p(-x) = p(x)$ et que $p(0) = 0$.

Si, de plus, $p(x)$ n'est nul que pour $x = 0$,

4) $p(x) = 0 \implies x = 0$;

cette fonction est dite *une norme*, et l'on écrit :

$$p(x) = \|x\|.$$

Un espace vectoriel muni d'une norme est dit *normé*.

De l'existence d'une norme sur un espace vectoriel, on peut déduire une topologie associée : on nomme *distance* $d(x, y)$ de deux points la norme de leur différence $d(x, y) = \|x - y\|$, nombre qui vérifie bien les les axiomes des distances, de sorte que l'espace vectoriel est devenu *métrique*. On définit alors *une boule*, ensemble des x vérifiant $d(x, a) < \rho$ que l'on qualifie d'ouvert, et un *voisinage* de a est défini comme un sous-ensemble contenant une boule contenant a.

Reste à vérifier que la topologie ainsi définie est bien compatible avec la structure d'espace vectoriel :

$$\begin{aligned} d(x+y, x_0+y_0) &= \|(x+y) - (x_0+y_0\| \\ &= \|(x - x_0) + (y - y_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \end{aligned}$$

soit :

$$d(x+y,\ x_0+y_0) \leqslant d(x - x_0) + d(y, y_0).$$

Mais :

$$\left.\begin{matrix} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} d(x - x_0) \to 0 \\ d(y - y_0) \to 0 \end{matrix}\right\} \implies d(x+y,\ x_0+y_0) \to 0,$$

donc :

$$\left.\begin{matrix} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{matrix}\right\} \text{ entraîne } x + y \to x_0 + y_0.$$

De même, $x \to x_0$ entraîne $\lambda x \to \lambda x_0$, et $\lambda \to \lambda_0$ entraîne $\lambda x \to \lambda_0 x$.

Exemples d'espaces normés.

Evidemment, l'espace R^n est normé. Mais la notion introduite est particulièrement importante pour les espaces fonctionnels, espaces à un nombre infini de dimensions où les éléments sont des fonctions, des mesures, etc...

1er exemple : Soit E l'ensemble des fonctions $x(t)$ d'une variable réelle t, définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ par exemple et à valeurs réelles et bor-

nées. Pour chaque fonction x, la borne supérieure de sa valeur absolue est déterminée, d'où une fonction de x :

$$K(x) = \sup_t |x(t)| < +\infty$$

$K(x)$, évidemment positive, est une norme pour l'ensemble E des fonctions x. En effet :

$K(x+y) = \sup_t |x(t) + y(t)| \leqslant \sup_t (|x(t)| + |y(t)|) \leqslant K(x) + K(y)$
et $K(\lambda x) = \sup_t (|\lambda| . |x \in t)|) = |\lambda| K(x)$.

Enfin, $K(x) = 0$ exige $|x(t)| = 0$ quel que soit t.

La norme ainsi définie induit, comme nous l'avons dit, une topologie associée sur E ; la convergence des suites $x_n(t)$ est définie par la condition $d(x, x_n) \to 0$.

Mais $d(x,x_n) = \|x - x_n\| = \sup_t |x(t) - x_n(t)|$.

Comme dire que la borne d'une fonction est inférieure à ε, c'est dire que la fonction est inférieure à ε quel que soit t ; la convergence en question s'exprime par :

$\forall \varepsilon$, $\exists N$ tel que $n > N$ entraîne $|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$
pour tout t vérifiant $0 \leqslant t \leqslant 1$.

L'on reconnaît que ceci caractérise la *convergence uniforme.*

Autres exemples : On peut considérer des sous-ensembles de l'espace précédent, par exemple celui des fonctions *continues* sur $[0, 1]$ (l'on sait qu'elles sont bornées), ou, parmi celles-ci, considérer les fonctions dérivables une fois, ou n fois, ou qui sont indéfiniment dérivables.

L'on peut aussi changer la définition de la norme : par exemple, dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, l'on peut prendre :

$$\|x(t)\| = \int_0^1 x(t)\,dt$$

qui vérifie bien les axiomes des normes.

Construction d'espaces vectoriels topologiques localement convexes.

On démontre que de tels espaces ne sont pas tous normés. Pour obtenir les plus généraux, on démontre qu'il faut partir d'une famille de semi-normes $p_\alpha(x)$, les α étant éléments d'une famille de paramètres qui peut être infinie.

Extrayons de cette famille de normes un nombre fini d'entre elles $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n}$ et associons à chacune un nombre positif ε_i, puis le voisinage de l'origine, ensemble des x définis par : $p_{\alpha_i}(x) < \varepsilon_i$. Soit $B(p_{\alpha_i}, \varepsilon_i)$ ce voisinage. Enfin, soit A l'intersection de ces n voisinages $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

A chaque ensemble fini de paramètres α correspond ainsi un voisinage A de l'origine. C'est l'ensemble $\mathcal{A}$ de ces A que nous prenons comme système fondamental des voisinages de O (c'est-à-dire que nous nommons voisinage de O tout sous-ensemble de E qui contient un des ensembles A). Ceci généralise ce que nous avions fait dans le cas d'une norme unique.

Montrons que la topologie ainsi définie rend bien E localement convexe. Il suffit pour cela de montrer que les A sont convexes, ce qui est assuré si les $B(p_{\alpha_i}, \varepsilon_i)$ sont convexes, car l'intersection d'un nombre

fini d'ensembles convexes est convexe. Supposons donc $p_{\alpha_i}(x) < \varepsilon_i$ et $p_{\alpha_i}(y) < \varepsilon_i$. Nous avons, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$:

$$p_{\alpha_i}[\lambda x + (1-\lambda)y] \leqslant p_{\alpha_i}(\lambda x) + p_{\alpha_i}[(1-\lambda)y] \leqslant |\lambda| p_{\alpha_i}(x) + |1-\lambda| p_{\alpha_i}(y)$$
$$< \lambda\varepsilon_i + (1-\lambda)\varepsilon_i = \varepsilon_i$$

d'après les axiomes des semi-normes.

Réciproquement, l'on démontre que sur tout espace vectoriel topologique E localement convexe existe un système de semi-normes permettant de reconstruire la topologie de E par le procédé que nous venons d'indiquer.

Exemple : Fonctions indéfiniment dérivables $x(t)$ d'une seule variable réelle. (On étendrait aisément l'étude à des fonctions de plusieurs variables). Pour définir ses *Distributions*, L. SCHWARTZ suppose de plus ces fonctions nulles pour les valeurs de t supérieures à une valeur finie dépendant de la fonction ; nous ne ferons pas ici cette hypothèse supplémentaire.

Il est clair que l'ensemble E de ces fonctions est un espace vectoriel. On peut le munir de bien des topologies ; par exemple, on peut dire que x_n converge vers x si $x_n(t)$ tend vers $x(t)$ pour chaque valeur de t, ce qui n'utilise pas l'hypothèse de dérivabilité. Nous allons introduire une topologie très forte : $x_n(t)$ est dite converger vers $x(t)$ si : 1) $x_n(t)$ converge uniformément vers $x(t)$ sur tout intervalle fini $[t_1, t_2]$, et si, de plus, 2) toutes les dérivées satisfont à cette même condition : $x_n^{(h)}(t)$ converge uniformément vers $x^{(h)}(t)$ dans tout intervalle fermé de longueur finie, et ceci quel que soit h.

(Notons que la convergence des dérivées entraîne assez généralement la convergence de la fonction, mais l'inverse est exceptionnel).

A l'aide de cette définition de la convergence, on peut définir une topologie en introduisant un système de semi-normes en nombre infini :

Soit K un intervalle de longueur finie $[t_1, t_2]$, c'est-à-dire un compact de R. Notons D un symbole de dérivation d'ordre quelconque ; Dx est la famille d'opérateurs $x \underset{D}{\longrightarrow} x^{(h)} = \mathrm{D}x, \forall\ h$.

Nous définissons une semi-norme relative à K et à D en posant :

$$p_{K,D}(x) = \sup_{t \in K} |\mathrm{D}\,x(t)|. \qquad \text{(maximum de D}x \text{ sur K).}$$

La famille des paramètres α est donc ici la famille des couples K, D. Ces nombres vérifient bien les axiomes des semi-normes, et la convergence que l'on en déduit vérifie bien la condition de convergence forte désirée puisque :

$$\forall K, \forall D,\ p_{K,D}(x_n - x_0) \to 0 \iff x_n^h(t) \to 0 \text{ uniformément.}$$

De nombreux autres exemples peuvent être donnés.

Importance de la notion d'espaces vectoriels topologiques localement compacts.

Esquisse historique : Les théories mathématiques se développent en vue de leur utilisation pour des problèmes précis. La théorie que nous venons d'introduire contient des théorèmes d'une force extrême, mais en petit nombre ; ceci explique leur découverte tardive (vers 1920).

BANACH ne considère d'abord qu'une seule norme ; on nomme *espace*

de Banach un espace vectoriel normé complet (c'est-à-dire où toutes les suites de Cauchy convergent). Vers 1930 sont connus les théorèmes essentiels, une demi-douzaine seulement, mais qui s'appliquent à une foule de situations diverses. En moins de 25 ans, on sut choisir les bons axiomes, c'est-à-dire ceux qui sont vérifiés dans les exemples utiles, et rassembler les théorèmes applicables à ces exemples. Le traité de BANACH (*Théorie des opérations linéaires*, Varsovie, 1932) marque cette étape qui ne fut dépassée qu'une quinzaine d'années plus tard pour répondre au besoin d'inclure dans la théorie l'étude d'ensembles plus généraux, tels que les espaces infiniment dérivables de SCHWARTZ avec l'infinité de semi-normes indispensables. Un article de J. DIEUDONNÉ (*Annales de l'E.N.S.*, 1940) reprend le problème de BANACH en introduisant l'hypothèse que l'espace est localement convexe ; on peut alors obtenir des théorèmes qui ne se réduisent pas aux énoncés de BANACH dans les cas étudiés par celui-ci (G. W. MACKEY, J. DIEUDONNÉ, L. SCHWARTZ pour sa théorie des *Distributions*). Enfin, GROTHENDIECK, par l'importance des résultats obtenus, doit être considéré comme le vrai successeur de BANACH.

Cette théorie est le type même de celles qui ne peuvent être créées et enrichies d'une façon valable sans avoir en vue leurs applications.

Aperçu de quelques théorèmes.

Théorème de Hahn-Banach : Ce théorème a un énoncé si remarquable qu'il a convaincu même les non spécialistes de l'importance de la théorie. Nous n'indiquerons pas sa démonstration qui utilise l'induction transfinie et l'axiome de Zermelo.

PRÉLIMINAIRES : *Applications linéaires continues d'un espace vectoriel topologique sur un autre.*

Parmi les applications linéaires d'un espace vectoriel topologique E sur un autre F, l'on peut considérer celles qui sont continues pour les topologies de E et F. Ces applications sont extrêmement importantes dans de nombreux exemples ; ainsi, dans les espaces de Schwartz, l'application par dérivation, $x(t) \to x^{(h)}(t)$, est linéaire et continue pour la convergence donnée. De même, tous les opérateurs différentiels de la physique sont des applications linéaires continues d'espaces fonctionnels que l'on peut définir, plus ou moins aisément du reste. Il en est de même des opérateurs intégraux.

Un cas particulier fondamental est celui des applications linéaires continues d'un espace vectoriel topologique E dans l'ensemble R des nombres réels $x(t) \longrightarrow u(x) \in \mathrm{R}$, de sorte que :

$u(x + y) = u(x) + u(y)$ est continue en x et y,

$u(\lambda x) = \lambda u(x)$ est continue en x et en λ,

$u(x)$ se nomme alors une *forme linéaire* sur E.

Exemples : Soit E l'ensemble des fonctions $x(t)$ numériques continues sur $[0, 1]$; choisissons un nombre fixe t_0 de cet intervalle. L'application $x(t) \longrightarrow x(t_0)$ qui associe à chaque fonction sa valeur en t_0 est linéaire et continue.

De même, E étant le même, l'application $x(t) \rightarrow \int_0^1 x(t)dt$ est linéaire, et, d'après le théorème de la moyenne, est continue.

Plus généralement, $f(t)$ étant une fonction numérique continue choisie une fois pour toutes, l'application $x(t) \rightarrow \int_0^1 x(t)f(t)dt$ est linéaire et continue.

Il en est de même si $x(t)$ a pour image une intégrale de Lebesgue-Stieljes $x(t) \underset{u}{\rightarrow} \int_0^1 x(t)d\mu(t)$ où $\mu(t)$ est une fonction à variations bornées. Les théorèmes relatifs à ces intégrales et leurs réciproques ont du reste conduit à la définition moderne de ces intégrales comme *formes linéaires sur l'ensemble des fonctions continues, qui sont continues pour la topologie de la convergence uniforme.*

Théorème de Hahn Banach concernant les espaces vectoriels topologiques localement convexes :

Le théorème affirme *l'existence de formes linéaires continues* sur ces espaces, et même en précise des conditions de détermination :

Soit F un sous-espace vectoriel de E (c'est-à-dire un sous-ensemble stable pour les opérations d'addition et de multiplication par un nombre réel). Puisqu'il existe une topologie sur E, l'on peut définir la fermeture (ou adhérence) $\overline{F}$ de F dans E. Ceci dit, un des énoncés de BANACH est le suivant :

Etant donné un sous-espace vectoriel fermé $\overline{F}$ *et un point p non situé dans* $\overline{F}$, *il existe une forme linéaire continue sur* E *qui est nulle en tout point x de l'ensemble* $\overline{F}$ *et non nulle au point p.*

Il est évident que si $u(x)$, application continue, est nulle sur F, elle l'est aussi sur $\overline{F}$, puisque les points de $\overline{F}$ sont limites des points de F, mais on n'en peut rien réduire au dehors de $\overline{F}$. C'est *l'existence* de $u(x)$ qui est l'objet du théorème.

M. G.