BULLETIN de l'ASSOCIATION des PROFESSEURS de MATHÉMATIQUES de l'Enseignement Public

SOMMAIRE

I. ETUDES.

H. CARTAN : Sur la notion de dimension 1
R. GODEMENT : Compatibilité de structures algébriques et topologiques 13

II. ESSAIS.

J. CHAUVINEAU : Géométrie sur le cercle 20
J. ITARD : A propos du Lycée Fermat 25
R. MICHARD : Le satellite artificiel 28

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.

P. PUIG-ADAM : Les Mathématiques et le concret 31
T. VERVAECKE : XI[e] rencontre de la C.I.E.A.E.M. 33
L. NOT, SNYDERS, DUFAU et CLAVIER : Travaux pratiques et travail dirigé 36
M. E. NABOKOV et V. KOURGANOFF : Les méthodes de l'enseignement de l'astronomie au lycée 43
M. CLAVIER : Les activités du club astronomique du lycée de Sèvres en 1956-1957 53
T. J. FLETCHER : La réalisation des films de mathématiques 55
L. DUVERT : A propos des radicaux 59

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE.

« La logique moderne », par J. CHAUVINEAU (Y. CROZES). « Comment poser et résoudre un problème », par G. POLYA (Y. C.). « L'Aspect moderne des mathématiques », par L. FÉLIX (G. W.) 61

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.

Arrêté du 12 août 1957 : Nouveaux programmes de 6[e] et 5[e] 65
J. DESFORGE : Rapport sur l'agrégation féminine de mathématiques, session de 1956 (fin) 72
Concours de l'enseignement public en 1957 88

VI. LA VIE DE L'A.P.M.

G. W. : Un petit pas en avant 92
Réunion du Bureau (15-6-57) 95
Réunion du Comité (17-10-57) 96
Le bloc-notes de l'A.P.M. 98

★

La table des matières de la 36[e] année du Bulletin de l'A.P.M. est encartée dans ce numéro.

37[e] année — N° 187 Publication trimestrielle Octobre 1957

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5e)
Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 800 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés.*

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ..... 400 F
Prix de l'abonnement au *Bulletin* ..... 1 000 F
Prix du numéro ..... 200 F

Présidents d'Honneur
Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11e). OBE. 56-95.
Vice-Présidents :
Mlle MASSON (Enseignement féminin), 3, av. de la Porte-de-Montrouge, Paris, 14e.
M. BIGUENET (Enseignement Technique), 41, rue Madeleine-Michelis, Neuilly-sur-Seine.
M. CHAZAL (Formation des maîtres), 2, rue Thimonnier, Paris, 9e.
M. DURRANDE (Grandes Ecoles), 4 *bis*, rue Henri-Moreau, Asnières.
M. EDDE (Ecoles Normales), 40, avenue du Général-Leclerc, Paris, 14e.
M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Gemain, Paris, 5e.
Secrétaires :
Mlle FÉLIX (Conférences), 3, rue Pierre-Berland, Versailles.
M. HUISMAN (Administration de l'A.P.M.), 11, rue Jacques-Cœur, Paris, 4e.
M. SIROS (Programmes), 13, avenue Jean-Racine, Sceaux.
M. CROZES (Recherches pédagogiques), 10, rue du Buisson-St-Louis, Paris, 10e.
M. MOUGENOT (Relations avec les régionales), Lycée Poincaré, Nancy.
M. GIRARD (Classes préparatoires), 37, rue Davioud, Paris, 16e.
Trésorier : M. LEGRAND, 3 *bis*, avenue R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).
Comité de rédaction du « Bulletin » : Mlle FÉLIX, Mlle MARCHAND ; MM. CHAZAL, ITARD, SIROS. — Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (Compiègne) ; M. WALUSINSKI (*St-Cloud*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. DURRANDE (*St-Louis*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; RUFF (*St-Louis*) ; SIROS (*Lakanal*) ; THÉRON (*Louis-le-Grand*).

Sortants en 1961 : M. BAY (*Condorcet*) ; Mlle BIARD (*E.N.S.* Fontenay) ; M. CASSE (Savigny-sur-Orge) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. LE MÉNAGER (Angers) ; Mlle MARCHAND (Lycée de Sèvres) ; M. MOUGENOT (*Poincaré*, Nancy) ; Mlle VERVAECKE (*Fénelon*, Lille).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOUD (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; Lille : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

37e Année — N° 187 Octobre 1957

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

SUR LA NOTION DE DIMENSION *

par M. Henri CARTAN
Professeur à la Sorbonne

1. VARIÉTÉS DE DIMENSION n.

L'exemple le plus connu d'espace de « dimension » n est l'espace numérique (ou « euclidien ») R^n, dont les points sont les systèmes de n nombres réels $x_1, ..., x_n$. Tout hyperplan de R^n, c'est-à-dire tout ensemble H défini par une équation linéaire (non nécessairement homogène) $f(x) = 0$, sépare l'espace en deux demi-espaces définis respectivement par $f(x) > 0$ et par $f(x) < 0$; de plus, étant donnés arbitrairement deux points distincts x et y, il existe toujours un hyperplan H qui les « sépare », c'est-à-dire tel que x soit dans l'un des demi-espaces définis par H et y dans l'autre. Observons que H est homéomorphe (1) à l'espace R^{n-1}, donc est de « dimension » $n-1$.

L'espace R^n nous donne l'occasion de rencontrer d'autres espaces qu'il semble naturel de qualifier aussi de « dimension » n. Par exemple, soit S_n la *sphère* définie, dans l'espace R^{n+1}, par l'équation $(x_1)^2 + ... + (x_{n+1})^2 = 1$; c'est un sous-espace fermé et borné, donc *compact* ; de plus, la projection stéréographique établit une homéomorphie entre S_n privée d'un de ses points, et l'espace R^n ; on voit donc que chaque point de S_n possède un voisinage ouvert homéomorphe à R^n.

Considérons aussi l'espace projectif (réel) P_n, dont les points sont définis par $n+1$ coordonnées homogènes $z_0, ..., z_n$ non toutes nulles, avec la convention que deux systèmes de coordonnées homogènes qui sont proportionnels définissent le même point de l'espace projectif P_n ; à vrai dire, pour définir complètement P_n, il faudrait dire avec précision quelle est la topologie de P_n, mais nous n'entrerons pas dans les détails.

(*) Conférence prononcée le 9 mai 1957 à l'Institut Henri-Poincaré, huitième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

(1) Rappelons que deux espaces topologiques sont *homéomorphes* s'il existe une homéomorphie entre eux, c'est-à-dire une correspondance biunivoque dans laquelle les sous-ensembles ouverts se correspondent ; cela revient à dire que l'application de l'un des espaces sur l'autre (définie par cette correspondance) est bicontinue.

L'ensemble des points de P_n tels que la coordonnée z_i soit nulle est un sous-ensemble fermé H_i, lui-même homéomorphe à P_{n-1} ; H_0 est ce qu'on appelle souvent l' « hyperplan à l'infini ». Le complémentaire U_i de H_i est un ensemble ouvert de P_n qui est *homéomorphe* à R^n (par exemple, U_0 est l'ensemble des points de P_n situés, comme on dit, « à distance finie ») : un point de U_i est repéré par n nombres réels, à savoir les quotients :

$$z_0/z_i, \ldots, z_{i-1}/z_i, z_{i+1}/z_i, \ldots, z_n/z_i.$$

Ainsi P_n est la réunion de $n+1$ ensembles ouverts dont chacun est homéomorphe à R^n.

D'une manière générale, on appelle *variété* de dimension n tout espace topologique V, qui satisfait à l'axiome de séparation de Hausdorff (à savoir : pour tout couple de points distincts x, y, il existe un voisinage de x et un voisinage de y sans point commun), et jouit en outre de la propriété suivante : *tout point de* V *possède un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace* R^n. On voit que R^n lui-même, S_n, P_n sont des variétés de dimension n.

Problème : Est-il possible qu'une variété V de dimension n et une variété W de dimension m soient *homéomorphes* lorsque $n \neq m$? Si c'était possible, la notion de « dimension » d'une variété n'aurait aucune signification topologique. Heureusement, c'est impossible ; mais cette impossibilité est fort difficile à démontrer.

Analysons d'un peu plus près la question : tout revient à savoir s'il peut exister une homéomorphie entre un ouvert U de R^n et un ouvert U' de R^m lorsque $m \neq n$ (U et U' étant, bien entendu, supposés non vides). Supposons qu'il en soit ainsi : on aurait donc une application continue f de U sur U', et une application continue g de U' sur U, telles que l'application composée $g \circ f$ soit l'application identique de U, et que $f \circ g$ soit l'application identique de U'. Si nous supposions de plus que f et g ont des dérivées partielles continues, nous pourrions démontrer une telle impossibilité, de la manière suivante : les coordonnées y_j d'un point de U' sont alors des fonctions continûment différentiables f_j des coordonnées x_i d'un point de U :

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n) ;$$

et de même $x_i = g_i(y_1, \ldots, y_m)$. Introduisons les différentielles :

$$dy_j = \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, dx_i, \qquad dx_i = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j}\, dy_j ;$$

la matrice des $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ définit, en chaque point $x \in U$, une application *linéaire* de R^n dans R^m ; la matrice des $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}$ définit, au point correspondant $y = f(x)$, une application linéaire de R^m dans R^n ; le théorème de la dérivation des fonctions composées, et le fait que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des applications identiques, montre que le produit de ces deux matrices (dans un ordre quelconque) est la matrice unité. Autrement dit, si $x \in U$ et $y = f(x)$, nous avons deux applications linéaires, l'une de R^n

dans R^m, l'autre de R^m dans R^n, qui sont inverses l'une de l'autre ; ceci prouve que R^m et R^n, comme *espaces vectoriels*, sont *isomorphes*. Or, un théorème d'algèbre nous affirme alors que le nombre n des éléments d'une *base* vectorielle de R^n est égal au nombre m des éléments d'une base de R^m, contrairement à l'hypothèse $n \neq m$.

Nous venons de démontrer l'invariance de la dimension par les homéomorphismes continûment différentiables ; et, pour cela, nous avons utilisé l'invariance de la « dimension » des espaces vectoriels, le mot « dimension » étant alors pris dans un sens purement algébrique (nombre des éléments d'une base vectorielle).

Pour prouver l'invariance de la dimension de R^n vis-à-vis des homéomorphismes quelconques (non nécessairement différentiables), c'est beaucoup plus difficile. La première démonstration date de 1911 et est due à BROUWER. Il n'est pas question de la reproduire ici, ni même d'en donner une idée. Elle repose sur la notion d'approximation simpliciale, et a des rapports étroits avec la notion d' « homologie » (cf. une conférence ultérieure de L. SCHWARTZ).

Une autre démonstration de l'invariance de la dimension repose sur une idée féconde de LEBESGUE (2), qui elle aussi est en relation avec l'homologie : considérons le cube I^n de dimension n, produit de n fois le segment $I = [0, 1]$ par lui-même ; on peut en faire un pavage par des ensembles fermés (voir fig. 1 pour le cas $n = 2$), tels que chaque point du cube appartienne au plus à $n + 1$ tels ensembles ; et cela est possible avec des ensembles de diamètre arbitrairement petit. On peut en outre démontrer que, pour n'importe quel recouvrement de I^n avec des ensembles fermés assez petits, il y a toujours au moins un point du cube qui appartient à au moins $n + 1$ ensembles du recouvrement. Le nombre n exprime ainsi une propriété purement topologique de l'espace I^n ; et, de là, on déduit facilement l'impossibilité d'une homéomorphie d'un ouvert de R^n sur un ouvert de R^m pour $m \neq n$. Voici l'énoncé précis du résultat de LEBESGUE : si I^n est recouvert par des ensembles fermés F_i tels que chaque F_i ne rencontre jamais simultanément deux faces opposées du cube, alors il existe un point commun à $n + 1$ des F_i.

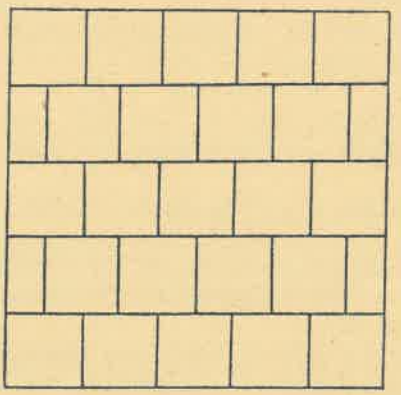


FIG. 1

(2) Lebesgue, dit-on, eut l'idée de cette caractérisation de la dimension en construisant un mur de briques dans une maison du petit village de Gouvieux (Oise).

2. Axiomes pour une théorie de la dimension.

On voudrait pouvoir parler de la dimension d'espaces plus généraux que ceux précédemment envisagés ; par exemple, considérons un sous-espace A de R^n, fermé pour fixer les idées : peut-on lui attribuer une dimension qui soit un invariant topologique, donc ne change pas si on remplace A par un autre sous-espace B d'un R^m, sous la seule condition que B soit homéomorphe à A ?

Dans une théorie de la dimension, on doit d'abord fixer avec précision la classe $\mathcal{C}$ des espaces topologiques pour lesquels on désire définir une dimension (qui soit un nombre entier, éventuellement nul ou infini). Nous supposerons que la classe $\mathcal{C}$ ne contient que des espaces satisfaisant à l'axiome de séparation de Hausdorff, et qu'elle contient tous les *polyèdres*. Rappelons d'abord ce qu'on appelle polyèdre ; et, pour commencer, ce que c'est qu'un *p-simplexe* (ou simplexe de dimension p) : prenons, dans un espace R^n, une suite de $p+1$ points x_i ($i = 0, ..., p$) tels qu'il n'existe aucun plan de dimension $< p$ les contenant (ce qui est toujours possible si $n \geqslant p$) ; les barycentres de masses positives (ou nulles) portées par ces points ont pour lieu le plus petit ensemble convexe contenant ces points ; on l'appelle le p-simplexe de sommets $x_0, ..., x_p$; chacun de ses points s'écrit d'une seule manière $\sum_i \lambda_i x_i$, les nombres réels $\lambda_i \geqslant 0$ étant tels que $\sum_i \lambda_i = 1$. Deux simplexes de même dimension p sont homéomorphes ; pour $p = 0$, on trouve un point, pour $p = 1$ un segment, pour $p = 2$ un triangle, pour $p = 3$ un tétraèdre. Cela dit, un polyèdre est un espace qu'on peut recouvrir avec un nombre fini de sous-espaces fermés homéomorphes à des simplexes (de diverses dimensions), de manière qu'ils s'ajustent convenablement : l'intersection de deux quelconques des simplexes du recouvrement doit être une « face » de chacun de ces deux simplexes (une *face* d'un p-simplexe est le lieu des barycentres de certains de ses sommets ; c'est un simplexe de dimension 0, 1, ... ou $p-1$).

Revenons à la classe $\mathcal{C}$: nous désirons qu'elle contienne tous les polyèdres, et qu'elle satisfasse en outre à la condition suivante : tout espace homéomorphe à un *sous-espace fermé* d'un espace X de la classe $\mathcal{C}$ est aussi dans la classe $\mathcal{C}$. Une telle classe est donc forcément assez vaste, puisqu'elle contient tous les sous-espaces fermés des polyèdres.

Exemples de classes $\mathcal{C}$: 1) la classe $\mathcal{C}_1$ des espaces *compacts* (rappelons qu'un espace X est compact s'il satisfait à l'axiome de Hausdorff et possède en outre la propriété de Borel-Lebesgue : pour tout recouvrement de X par une famille d'ouverts U_i, il existe un nombre fini parmi ces U_i qui recouvrent X) ;

2) la classe $\mathcal{C}_2$ des espaces localement compacts (X est localement compact s'il satisfait à l'axiome de Hausdorff et si tout point possède au moins un voisinage compact) ; l'espace R^n appartient à la classe $\mathcal{C}_2$, non à la classe $\mathcal{C}_1$;

3) la classe $\mathcal{C}_3$ des espaces *métrisables de type dénombrable,* qui contient notamment tous les sous-espaces de R^n, quel que soit n. Un espace X est dit métrisable si la topologie de E peut être définie par une *distance,* ou, plus précisément, par une « métrique » qui, à chaque couple de points x, y, associe un nombre $d(x, y) \geqslant 0$, de manière que :

$d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
$d(x, y) = d(y, x)$;
$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (« inégalité du triangle »).

Un tel espace métrisable X est « de type dénombrable » s'il existe une suite dénombrable de points $x_1, ..., x_n, ...$ de X, *partout dense* dans X (c'est-à-dire telle que tout ensemble ouvert non vide contienne au moins un de ces points). L'espace R^n est dans la classe $\mathcal{C}_3$: car l'ensemble dénombrable des points à coordonnées rationnelles est partout dense. On montre que tout sous-espace A d'un espace X de la classe $\mathcal{C}_3$ est dans $\mathcal{C}_3$, même si A n'est pas fermé dans X ;

4) la classe $\mathcal{C}_4$ des espaces *normaux :* un espace X est normal s'il satisfait à l'axiome de Hausdorff et si, chaque fois que A et B sont des sous-ensembles fermés disjoints, il existe une fonction continue numérique sur X, égale à 0 sur A et à 1 sur B. Tout sous-espace *fermé* d'un espace normal est normal.

On démontre que tout espace compact est normal (autrement dit, $\mathcal{C}_4$ contient $\mathcal{C}_1$) ; et que tout espace métrisable est normal (donc $\mathcal{C}_4$ contient $\mathcal{C}_3$).

Pour chacune des classes précédentes, on a une *théorie de la dimension.* D'une manière générale, qu'exige-t-on d'une théorie de la dimension ? On suppose que l'on a, à tout espace X de la classe considérée $\mathcal{C}$, attaché un *entier* dim X, appelé la dimension de X, de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

(I) $\dim X \geqslant -1$; dim X peut être infini ; dim X est $\geqslant 0$ si et seulement si X n'est pas vide ;

(II) si X est homéomorphe à X', alors $\dim X = \dim X'$;

(III) si A est un sous-espace *fermé* de X, alors $\dim A \leqslant \dim X$;

(IV) si X est réunion de deux sous-espaces fermés A_1 et A_2, alors $\dim X = \sup(\dim A_1, \dim A_2)$;

(IV *bis* ; axiome facultatif) si X est réunion d'une suite dénombrable de sous-espaces fermés A_i, alors $\dim X = \sup(\dim A_i)$;

(V) la dimension du cube I^n est égale à n.

Alors, si R^n est dans la classe $\mathcal{C}$, la dimension de R^n est n : en effet, $\dim R^n \geqslant \dim I^n$ d'après (III), donc $\dim R^n \geqslant n$ d'après (V) ; d'autre part, R^n est une réunion dénombrable de cubes fermés, donc $\dim R^n \leqslant n$ d'après (IV *bis*).

Remarque : Il faut bien se garder d'imposer l'axiome suivant : « si f est une application continue de X dans Y, l'image $f(X)$ est de dimension au plus égale à dim X ». En effet, la « courbe de Peano » est une application continue du segment I *sur* le carré I^2, et l'on aurait donc une

contradiction avec l'axiome (V). (Pour la courbe de Peano, voir l'Appendice).

En dehors des axiomes précédents, il en est un autre d'une nature assez différente. Introduisons d'abord une notion : étant donnés deux sous-ensembles *fermés disjoints* A et B d'un espace X, on dit qu'un sous-ensemble fermé C *sépare* A et B si X-C est réunion de deux ouverts disjoints contenant respectivement A et B. Le nouvel axiome est le suivant :

Axiome (A) : Si X est un espace tel que deux fermés disjoints puissent toujours être séparés par un sous-espace fermé de dimension $\leqslant n-1$, alors $\dim X \leqslant n$.

3. La théorie de Menger-Urysohn.

On prend comme classe $\mathcal{C}$ la classe $\mathcal{C}_3$ des espaces métrisables de type dénombrable, et on impose non seulement l'axiome (A), mais sa réciproque : si $\dim X \leqslant n$, alors deux fermés disjoints de X peuvent toujours être séparés par un sous-espace fermé de dimension $\leqslant n-1$. Cet axiome ainsi renforcé et l'axiome (I) *définissent complètement la dimension :* d'une façon précise, on définit, par récurrence sur l'entier n, ce que c'est qu'un espace X de dimension $\leqslant n$; c'est, par définition, un espace tel que, étant donnés arbitrairement deux sous-ensembles fermés disjoints, ils puissent être séparés par un sous-espace fermé de dimension $\leqslant n-1$. Puisque, d'après l'axiome (I), on sait quels sont les espaces de dimension $\leqslant -1$ (il y a uniquement l'espace vide), on obtient successivement la définition des espaces de dimension $\leqslant 0$, des espaces de dimension $\leqslant 1$, etc... La *dimension* d'un espace X sera alors égale au plus petit des entiers n tels que $\dim X \leqslant n$, ou à l'infini s'il n'existe pas de tels entiers n.

Dans cette définition de la dimension, on n'a pas tenu compte des conditions (II) à (V). En fait, elles sont remplies [y compris (IV *bis*)] : ce sont ici des *théorèmes*, et, pour les démontrer (ce qui est parfois assez difficile), on doit utiliser le fait que l'espace X est métrisable de type dénombrable. De plus, l'axiome (III) est valable pour tout sous-espace A de X, même non fermé.

Pour tout ce qui concerne cette théorie de la dimension, le lecteur peut se reporter à l'ouvrage de Hurewicz-Wallman (*Dimension theory*, Princeton, 1941), ou au petit livre de Favard, chez Albin Michel.

Si, pour la classe $\mathcal{C}_3$, on avait une autre théorie de la dimension, alors la dimension d'un espace X dans cette nouvelle théorie serait *au plus égale* à sa dimension dans la théorie de Menger-Urysohn : démonstration par récurrence, en utilisant l'axiome (A).

Il est bon d'expliciter ce que c'est qu'un *espace de dimension zéro :* on démontre que X est de dimension 0 si et seulement si tout point de X possède un système fondamental de voisinages dont la frontière (3) est

(3) Rappelons qu'à un sous-ensemble A d'un espace topologique X on associe les deux ensembles suivants : l'adhérence (ou fermeture) $\overline{A}$, qui est le plus petit ensemble fermé contenant A ; et l'intérieur $\mathring{A}$, qui est le plus grand ensemble ouvert contenu dans A ; la différence $\overline{A} - \mathring{A}$ s'appelle la *frontière* de A ; c'est un ensemble fermé, qui est aussi la frontière du complémentaire de A. Dire que la frontière de A est vide, c'est dire que $\mathring{A} = \overline{A}$; pour cela, il faut et il suffit que A soit à la fois ouvert et fermé.

vide. Or, un ensemble dont la frontière est vide n'est pas autre chose qu'un ensemble *à la fois ouvert et fermé*. Exemple d'espace de dimension 0 : soit D le sous-espace des points *irrationnels* du segment I ; D est de dimension 0, car tout point x de D possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés, à savoir les traces sur D des segments de I qui contiennent x et dont les extrémités sont rationnelles. Il y a des espaces *compacts* de dimension 0, formés d'une infinité de points : par exemple, l'espace E, dont les points sont les suites illimitées de chiffres 0 et 1, la topologie étant telle que pour que des suites $s_1, \ldots, s_k, \ldots$ aient pour limite une suite s, il faut et il suffit que, pour tout entier n, la suite s_k ait les mêmes chiffres que s jusqu'au rang n, dès que k est plus grand qu'un certain entier $k(n)$. Cet espace E est compact et de dimension 0 (on le voit en observant que toutes les suites dont les n premiers chiffres sont donnés forment un ensemble à la fois ouvert et fermé dans E). Il existe une application continue f de cet espace E *sur* le segment $I = [0, 1]$: f associe à chaque suite $(a_1, \ldots, a_k, \ldots)$, formée de chiffres 0 et 1, le nombre réel $\sum_k \frac{a_k}{2^k}$ (la série est convergente), nombre dont l'écriture dyadique consiste dans ce système de chiffres, *sauf si les chiffres sont tous égaux à 1 à partir d'un certain rang ;* dans ce dernier cas (par exemple, 0101111...), le nombre défini par la suite est égal à celui défini par la suite 0110000... Ainsi, l'application continue f de E sur I n'est pas biunivoque.

4. La théorie d'Alexandroff-Čech.

Elle est fondée sur l'idée de Lebesgue (ci-dessus, n° 2), convenablement adaptée. On prend pour classe $\mathcal{C}$ la classe $\mathcal{C}_4$ des espaces *normaux*. Etant donné un recouvrement d'un espace X par un nombre fini d'ouverts U_i, convenons de dire que ce recouvrement est de dimension $\leqslant n$ si chaque point de X appartient à au plus $n + 1$ ensembles du recouvrement. D'autre part, disons qu'un recouvrement par des ouverts V_j est *plus fin* qu'un recouvrement par des ouverts U_i si chaque V_j est contenu dans au moins un ensemble U_i. Dans la théorie d'Alexandroff-Čech, on donne la définition suivante :

Un espace normal X *est de dimension* $\leqslant n$ *si, pour tout recouvrement de* X *par un nombre fini d'ouverts, il existe un recouvrement plus fin, formé aussi d'un nombre fini d'ouverts, et qui soit de dimension* $\leqslant n$.

On démontre que cette théorie de la dimension satisfait à tous les axiomes (I) à (V) [sauf peut-être (IV *bis*)], ainsi qu'à l'axiome (A).

On a déjà dit que la classe $\mathcal{C}_4$ contient la classe $\mathcal{C}_3$. Il est très remarquable que, sur la classe $\mathcal{C}_3$, la dimension au sens d'Alexandroff-Čech est égale à la dimension au sens de Menger-Urysohn.

D'autre part, la classe $\mathcal{C}_4$ contient la classe $\mathcal{C}_1$ des espaces *compacts ;* la théorie d'Alexandroff-Čech fournit donc une *théorie de la dimension des espaces compacts* (la théorie de Menger-Urysohn donnait seulement la dimension des espaces compacts *métrisables*). Cette théorie de la dimension des espaces compacts satisfait à tous les axiomes, y compris (IV *bis*).

On va maintenant donner une autre caractérisation de la dimension des espaces compacts. Il est une classe d'espaces compacts dont la dimension est évidente : ce sont les polyèdres ; en effet, la dimension d'un polyèdre est évidemment, en vertu des axiomes (I) à (V), la plus grande des dimensions des simplexes qui le composent. Cela dit, la notion de dimension d'un espace compact va pouvoir être ramenée à celle de dimension d'un polyèdre. Pour simplifier, supposons que la topologie de l'espace compact considéré X soit définie par une distance ; une application continue de X dans un polyèdre P sera, par définition, une *ε-application* si l'image réciproque de chaque point de P est un ensemble de X dont le diamètre est $\leqslant \varepsilon$ (ε désigne ici un nombre > 0). On démontre le théorème suivant : *pour qu'un espace compact* X *soit de dimension* $\leqslant n$, *il faut et il suffit que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un polyèdre* P *de dimension* $\leqslant n$ *et une* ε*-application de* X *dans* P.

Voici une application de ce critère. Il est presque évident que le *produit* de deux polyèdres P et Q peut être décomposé en simplexes, et que la dimension de $P \times Q$ ainsi décomposé est la *somme* des dimensions de P et de Q. Il en résulte ceci : si X et Y sont deux espaces compacts, on a :

$$(1) \qquad \dim (X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y.$$

Malheureusement, on n'a pas toujours l'*égalité* ; Pontrjagin a donné, en 1930, l'exemple de deux espaces compacts de dimension 2 dont le produit est de dimension 3.

L'inégalité (1) vaut aussi dans la théorie d'Alexandroff-Čech : en fait, si X et Y sont dans la classe $\mathcal{C}_4$, on peut les plonger dans des espaces compacts $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ tels que $\dim \widetilde{X} = \dim X$, $\dim \widetilde{Y} = \dim Y$; alors $X \times Y$ est plongé dans $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$, et on a :

$$\dim (X \times Y) \leqslant \dim (\widetilde{X} \times \widetilde{Y}) \leqslant \dim \widetilde{X} + \dim \widetilde{Y} = \dim X + \dim Y,$$

ce qui démontre bien (1).

5. Dimension des espaces localement compacts.

Dans cette théorie, on définit la dimension d'un espace localement compact X comme la *borne supérieure* des dimensions des sous-espaces compacts de X (la dimension d'un compact étant définie comme au n° 4). On obtient ainsi une théorie de la dimension pour la classe $\mathcal{C}_2$; elle satisfait à tous les axiomes (I) à (V) [y compris (IV *bis*)], ainsi qu'à l'axiome (A) et à la relation (1).

Nous avons donc essentiellement deux théories : une théorie de la dimension pour les espaces de la classe $\mathcal{C}_3$ (cf. n° 3), et la présente théorie pour la classe $\mathcal{C}_2$ de tous les espaces localement compacts. Il est agréable de savoir que sur la classe commune $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_2$, ces deux théories coïncident : si un espace localement compact X appartient à la classe $\mathcal{C}_3$ (et, pour cela, il faut et il suffit que X soit réunion d'une suite dénombrable de sous-espaces compacts métrisables), alors la dimension de X au sens de Menger-Urysohn est bien égale à la borne supérieure des

dimensions des compacts contenus dans X. Cela tient à ce que la dimension de Menger-Urysohn satisfait à l'axiome (IV *bis*).

Dans chacune des deux théories précédentes, la notion de dimension a un *caractère local :* pour que $\dim X \leqslant n$, il faut et il suffit que chaque point possède un *voisinage fermé* de dimension $\leqslant n$.

6. Sous-espaces de l'espace R^n.

Soit X un sous-espace de R^n ; X est donc dans la classe $\mathcal{C}_3$. Si X contient un ouvert non vide de R^n, il est évident que $\dim X = n$. On démontre la réciproque : si un sous-espace X de R^n est de dimension n exactement, X contient un ouvert non vide de R^n. Dans le cas particulier où X est compact, on s'en rend compte facilement : supposons en effet que X n'ait pas de point intérieur ; prenons un polyèdre $P \subset R^n$, qui contienne X, et soit formé de simplexes de diamètre $\leqslant \varepsilon$; choisissons, à l'intérieur de chaque n-simplexe de P, un point n'appartenant pas à X ; projetons, depuis ce point, sur la frontière du simplexe, la partie de X située dans le simplexe. En procédant ainsi pour tous les n-simplexes de P, on obtient une application continue de X dans la réunion P' des simplexes de P dont la dimension est $\leqslant n - 1$; ceci est une ε-application de X dans un polyèdre dont la dimension est $\leqslant n - 1$. On en déduit bien que $\dim X \leqslant n - 1$.

Quels sont les espaces compacts que l'on peut réaliser comme sous-espace (fermé) d'un espace numérique R^q (et donc aussi comme sous-espace d'un cube I^q) ? Un tel espace doit évidemment être *métrisable.* On a inversement le théorème (Menger-Nöbeling) : si X est un espace compact métrisable de dimension n, il est possible de réaliser X comme sous-espace fermé du cube I^{2n+1} de dimension $2n + 1$. Au contraire, il y a des espaces compacts métrisables de dimension n qu'on ne peut pas réaliser comme sous-espace du cube I^{2n} (par exemple, la réunion des faces de dimension n d'un simplexe de dimension $2n + 2$).

7. Applications dans la sphère S_n.

Soit X un espace *compact,* et A un sous-espace fermé de X ; toute application continue de A dans l'espace R^n peut se prolonger en une application continue de X tout entier dans R^n (ceci est même vrai si X est normal). Mais si on considère des applications dans la *sphère* S_n, il n'en est plus de même : par exemple, soit B_{n+1} la *boule* de dimension $n + 1$, ensemble des points de R^{n+1} dont la distance à l'origine est $\leqslant 1$ (S_n est la frontière de B_{n+1}) ; soit f l'application identique de S_n ; on démontre que f ne peut pas se prolonger en une application continue de B_{n+1} dans S_n.

On a la caractérisation suivante de la dimension des espaces compacts : pour que $\dim X \leqslant n$, il faut et il suffit que, quel que soit le sous-espace fermé $A \subset X$, et l'application continue f de A dans S_n, il existe un prolongement de f en une application continue de X dans S_n.

La même caractérisation est valable pour la dimension de Menger-Urysohn (X étant alors métrisable de type dénombrable).

On en déduit la propriété suivante : si Y est un sous-espace *fermé* d'un espace localement compact X, on a :

$$\dim X \leqslant \sup(\dim Y, \dim(X - Y)) \quad (2)$$

en fait, la même inégalité vaut aussi dans la théorie de Menger-Urysohn, car alors l'ouvert $X - Y$ est réunion d'une suite dénombrable de fermés.

8. Sous-espaces séparateurs.

Rappelons qu'un espace X est dit *connexe* s'il n'est pas réunion de deux sous-ensembles ouverts non vides et disjoints. Si on enlève d'un espace connexe X un sous-ensemble fermé A, il se peut que l'espace restant $X - A$ ne soit pas connexe (exemple : X est l'espace R^n, et A un hyperplan). Cependant, on démontre : si X est une *variété* connexe de dimension n, et si A est un sous-espace fermé de dimension $\leqslant n - 2$, l'espace $X - A$ est connexe (par exemple, le plan privé d'un point est connexe). Que peut-on dire dans le cas où A est de dimension $n - 1$, et plus précisément dans le cas où A, comme espace topologique, est une variété de dimension $n - 1$? Signalons, sans démonstration évidemment, le théorème de Jordan-Brouwer généralisé : soit X une variété « orientable » de dimension n, connexe et « simplement connexe » (cela signifie que toute courbe fermée peut se déformer en un point) ; si une variété (connexe ou non) de dimension $n - 1$ est plongée comme sous-ensemble fermé A dans X, le nombre des composantes connexes de $X - A$ est égal à celui des composantes connexes de A augmenté d'une unité ; en outre, chaque composante connexe de A est nécessairement « orientable ». Ceci s'applique notamment au cas où X est l'espace R^n.

9. Relation avec les mesures k-dimensionnelles.

Soit X un espace métrisable de type dénombrable. Supposons qu'on ait choisi une *métrique* sur X. Alors, pour chaque entier n, soit $m_n(X)$ la borne inférieure de toutes les sommes $\sum_i d(X_i)^n$ relatives à tous les recouvrements dénombrables de X par des X_i ; $d(X_i)$ désigne le « diamètre » de X_i calculé avec la métrique donnée. Lorsque X est compact, on peut se borner à considérer les recouvrements finis. On montre ceci : si $m_{n+1}(X) = 0$, alors $\dim X \leqslant n$. Il y a une sorte de réciproque : si $\dim X \leqslant n$, il existe une métrique sur X pour laquelle $m_{n+1}(X) = 0$; on peut même trouver une réalisation de X comme sous-espace de I^{2n+1} de manière que la métrique induite par la métrique du cube convienne.

Par exemple, prenons pour X le segment I, qui est de dimension 1, et pour métrique la distance habituelle de deux points du segment ; il est bien clair que l'on peut recouvrir I avec un nombre fini de segments dont la somme des *carrés* des distances soit arbitrairement petite.

Conclusion. — On espère, par cet aperçu forcément rapide, avoir donné quelque idée de la diversité des questions et des problèmes qui, en topologie, se rattachent à la notion de « dimension ».

Appendice : la courbe de Peano

Considérons un triangle rectangle et isocèle T, et soient s_0 et s_1 les sommets des angles aigus. On va définir une application continue g du segment $I = [0, 1]$ *sur* T, telle que $g(0) = s_0$ et $g(1) = s_1$. En complétant la « courbe » ainsi obtenue au moyen d'une symétrie par rapport à l'hypoténuse de T, on aura une « courbe » qui remplit un carré.

Pour cela, reprenons l'espace E défini au n° 3. On va définir une application continue h de E sur T : la bissectrice de l'angle droit de T partage T en deux triangles (fermés) T_0 et T_1, en notant T_0 celui qui contient le sommet s_0 et T_1 celui qui contient s_1. De même, T_0 est réunion de deux triangles égaux T_{00} et T_{01}, et T_1 est réunion de T_{10} et T_{11}. On appelle T_{00} le triangle qui contient s_0, et T_{01} celui qui contient le sommet de l'angle droit de T ; de même, T_{10} contient le sommet de l'angle droit de T, et T_{11} contient s_1. On recommence, en décomposant en deux triangles égaux chacun des triangles T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11} ; on note T_{000}, T_{001} les deux triangles de la décomposition de T_{00}, etc... D'une façon précise, les triangles sont numérotés de telle manière que dans la suite

$$T_{000}, T_{001}, T_{010}, T_{011}, T_{100}, T_{101}, T_{110}, T_{111},$$

deux triangles consécutifs aient toujours un côté commun (fig. 2). On peut continuer : pour chaque entier n, le triangle T sera décomposé en 2^n triangles égaux, dont chacun correspond à une suite de n chiffres égaux à 0 ou 1.

Considérons alors un point x de l'espace E, c'est-à-dire une suite *illimitée* de chiffres égaux à 0 ou 1, par exemple 0010111... ; on lui associe la suite illimitée des triangles :

$$T_0, T_{00}, T_{001}, T_{0010}, T_{00101}, T_{001011}, T_{0010111}, \ldots$$

Chacun contient le suivant, et leur diamètre tend vers zéro ; ils ont donc en commun un point unique. Si on note $h(x)$ ce point commun, on définit ainsi une application h de E dans T ; on vérifie qu'elle est continue ; comme tout point de T appartient à au moins une suite illimitée de triangles emboîtés, h applique E *sur* T. Or, au n° 3, on a défini une application continue f de E sur le segment $I = [0, 1]$; d'autre part, si deux suites illimitées (telles, par exemple, que $x = 0101111...$ et $y = 0110000...$) sont telles que $f(x) = f(y)$, on voit facilement que $h(x) = h(y)$: elles définissent le même point de T. Si, pour chaque point $u \in I$, on choisit un $x \in E$ tel que $f(x) = u$, l'élément $h(x) \in T$ ne dépend pas du choix de x ; c'est une fonction $g(u)$. L'application g de I sur T est continue, car elle applique le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur T_0 et le segment $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sur T_1 ; le segment $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ sur T_{00}, etc... Cette application g est la « courbe de Peano » cherchée.

On peut voir qu'étant donné un point quelconque $t \in T$, il existe au plus quatre points de I que g transforme dans t ; « en général », il n'en existe qu'un.

La figure 3 donne une *approximation* de la courbe de Peano (obtenue en considérant les triangles ayant 6 chiffres en indice).

H. C.

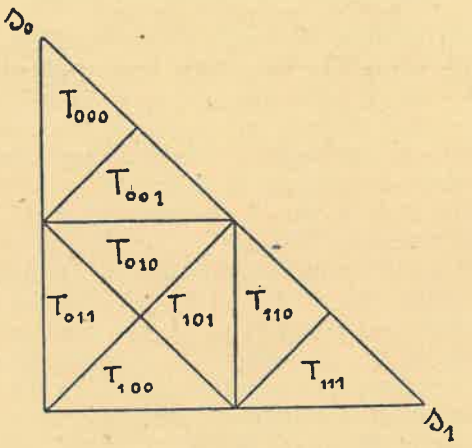


FIG. 2

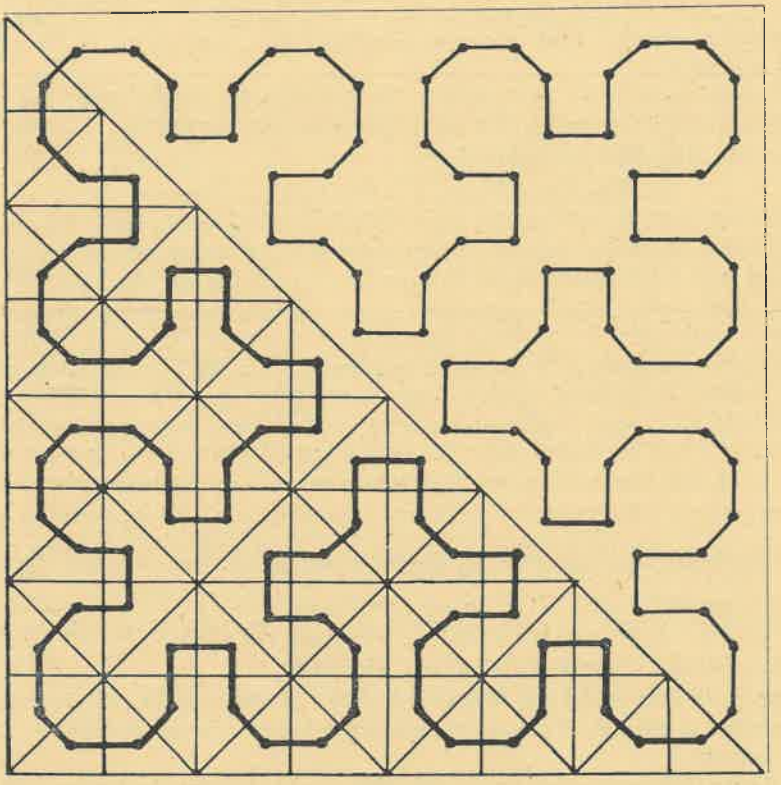


FIG. 3

COMPATIBILITÉ DES STRUCTURES ALGÉBRIQUES ET TOPOLOGIQUES ; GROUPES ET ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES *

par M. GODEMENT
Professeur à la Sorbonne

Le sujet annoncé par le titre est très vaste ; il comprend par exemple les groupes topologiques, les espaces fonctionnels, etc... Nous allons nous borner à faire entrevoir un seul aspect en indiquant quelques propriétés importantes des espaces vectoriels topologiques.

Définition d'un espace vectoriel topologique.

Nous rappelons qu'un *espace vectoriel* défini sur un corps (nous utiliserons seulement le corps R des nombres réels ; le cas du corps des complexes serait analogue) est un espace E qui est un groupe par rapport à une opération commutative notée additivement (au couple x, y d'éléments de E est associée leur somme $x + y$, élément de E), et sur lequel est définie une multiplication par un élément de R : au couple $x \in E$, $\lambda \in R$ est associé $\lambda x \in E$, cette opération étant associative pour les éléments de R et distributive par rapport à l'addition dans R et à l'addition dans E.

Les éléments x sont nommés points, ou vecteurs. Dans une représentation géométrique, nous pouvons confondre un vecteur et le point extrémité du vecteur dont l'origine est placée en O, comme pour la représentation des nombres complexes.

Supposons de plus qu'une topologie soit définie sur E. C'est dire que sur E est définie une famille d'ouverts, ou de fermés, ou que sont définis les voisinages des points, ou encore que sont caractérisées les conditions de convergence de suites ou de continuité de fonctions.

Mais pour que des propriétés puissent exister, il faut que des relations rendent compatibles les structures algébriques et topologiques introduites : *un espace vectoriel topologique* est un espace vectoriel muni d'une topologie vérifiant les conditions suivantes :

1) La fonction $x + y$ est continue en x et en y.

2) et 3) La fonction λx est continue en λ et en x, continuités définies par la topologie ordinaire sur R et la topologie introduite sur E.

Ceci se traduit par des conditions relatives à la convergence de suites. Si $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ converge vers x et $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ converge vers y, la suite des $x_n + y_n$ doit converger vers $x + y$. Et si la suite $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ converge vers λ, la suite des $\lambda_n x_n$ doit converger vers λx.

On peut aussi traduire les conditions de la définition à partir des ouverts de E ; c'est cet aspect que nous allons préciser.

(*) Conférence prononcée le 4 avril 1957 à l'Institut Henri-Poincaré, septième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

Axiomes définissant un espace vectoriel topologique par des conditions relatives à ses ouverts.

a étant donné, à chaque élément x de E associons l'élément $x + a$ qui s'en déduit par translation. Si x est élément générique d'un sous-ensemble U de E, notons $U + a$ l'ensemble des points $x + a$. L'application $x \rightarrow x + a$, (et son inverse $x \rightarrow x - a$), doit être continue ; donc, dire que U est ouvert équivaut à dire que $U + a$ est ouvert quel que soit a.

De même, l'application $x \rightarrow \lambda x$, pour $\lambda \neq 0$, doit être continue en x ; en particulier, si x est point générique d'un voisinage de O, il en est de même de λx.

Nous énonçons donc :

Axiome I : *La famille des ouverts de* E *est invariante par translation de vecteur quelconque.*

La famille des voisinages de O *est invariante par homothétie de centre* O, *de rapport quelconque.*

Par suite, pour définir la topologie sur E, il suffit de caractériser les voisinages de l'origine O, donc d'assurer les continuités 1), 2), 3) à l'origine. Mais 3) a déjà été exprimée ; il reste les conditions 1) et 2).

Dire que la fonction $x + y$ est continue à l'origine signifie que, quel que soit le voisinage U de O, il existe deux voisinages V et W de O tels que :

$$x \in V \quad \text{et} \quad y \in W \Longrightarrow x + y \in U$$

ce qu'on écrit aussi par une notation de somme directe :

$$x + y \in V + W \Longrightarrow x + y \in U, \quad \text{ou} \quad V + W \subset U.$$

Mais soit U' l'intersection de V et W ; c'est un voisinage de O. Nous énoncerons donc :

Axiome II : *Quel que soit le voisinage* U *de* O, *il existe un voisinage* U' *de* O *tel que* $U' + U' \subset U$.

Reste à exprimer la continuité de λx par rapport à λ pour $x = 0$. C'est dire que l'application $\lambda \rightarrow \lambda x$ doit vérifier : quel que soit U, il existe δ tel que : $\left\{ \begin{matrix} x \in U \\ |\lambda| < \delta \end{matrix} \right. \Longrightarrow \lambda x \in U$

ce qui s'écrit aussi :

Axiome III : $\forall U, \exists\ \delta$ *tel que* $|\lambda| < \delta \Longrightarrow \lambda U \subset U$.

Ces trois axiomes sont suffisants.

Espaces vectoriels topologiques localement convexes.

Dans le plan, avec la topologie ordinaire, un ensemble A est dit *convexe* si, quels que soient les points a et b appartenant à A, tout point du segment ab appartient à A. De même, d'après la définition analytique d'un segment de droite, pour un espace vectoriel quelconque sur le corps des réels, un sous-ensemble A est dit convexe si :

$$\forall\ x \text{ et } y \in A, \quad \forall\ \lambda \in [0, 1], \quad z = \lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

Un *espace vectoriel topologique est dit localement convexe* si tout voisinage de l'origine contient un voisinage convexe de l'origine. Cette condition se conserve par translation et par homothétie.

L'espace R^n avec la métrique ordinaire satisfait évidemment à cette condition, puisque tout voisinage de O contient une boule de centre O, qui est bien un voisinage convexe. En fait, les espaces vectoriels topologiques rencontrés sont presque toujours localement convexes, spécialement en analyse. Ce n'est pas toujours le cas en algèbre.

Espaces normés.

Une semi-norme définie sur un espace vectoriel topologique sur le corps des réels est une fonction numérique $p(x)$ qui vérifie les conditions :

1) $p(x)$ est un nombre positif ou nul,
2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$,
3) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

En particulier, remarquons que $p(-x) = p(x)$ et que $p(0) = 0$.

Si, de plus, $p(x)$ n'est nul que pour $x = 0$,

4) $p(x) = 0 \implies x = 0$;

cette fonction est dite *une norme*, et l'on écrit :

$$p(x) = \|x\|.$$

Un espace vectoriel muni d'une norme est dit *normé*.

De l'existence d'une norme sur un espace vectoriel, on peut déduire une topologie associée : on nomme *distance* $d(x, y)$ de deux points la norme de leur différence $d(x, y) = \|x - y\|$, nombre qui vérifie bien les les axiomes des distances, de sorte que l'espace vectoriel est devenu *métrique*. On définit alors *une boule*, ensemble des x vérifiant $d(x, a) < \rho$ que l'on qualifie d'ouvert, et un *voisinage* de a est défini comme un sous-ensemble contenant une boule contenant a.

Reste à vérifier que la topologie ainsi définie est bien compatible avec la structure d'espace vectoriel :

$$\begin{aligned} d(x+y, x_0+y_0) &= \|(x+y) - (x_0+y_0\| \\ &= \|(x - x_0) + (y - y_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \end{aligned}$$

soit :

$$d(x+y,\ x_0+y_0) \leqslant d(x - x_0) + d(y, y_0).$$

Mais :

$$\left.\begin{matrix} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} d(x - x_0) \to 0 \\ d(y - y_0) \to 0 \end{matrix}\right\} \implies d(x+y,\ x_0+y_0) \to 0,$$

donc :

$$\left.\begin{matrix} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{matrix}\right\} \text{ entraîne } x + y \to x_0 + y_0.$$

De même, $x \to x_0$ entraîne $\lambda x \to \lambda x_0$, et $\lambda \to \lambda_0$ entraîne $\lambda x \to \lambda_0 x$.

Exemples d'espaces normés.

Evidemment, l'espace R^n est normé. Mais la notion introduite est particulièrement importante pour les espaces fonctionnels, espaces à un nombre infini de dimensions où les éléments sont des fonctions, des mesures, etc...

1er exemple : Soit E l'ensemble des fonctions $x(t)$ d'une variable réelle t, définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ par exemple et à valeurs réelles et bor-

nées. Pour chaque fonction x, la borne supérieure de sa valeur absolue est déterminée, d'où une fonction de x :

$$K(x) = \sup_t |x(t)| < +\infty$$

$K(x)$, évidemment positive, est une norme pour l'ensemble E des fonctions x. En effet :

$K(x+y) = \sup_t |x(t) + y(t)| \leqslant \sup_t (|x(t)| + |y(t)|) \leqslant K(x) + K(y)$
et $K(\lambda x) = \sup_t (|\lambda| . |x \in t)|) = |\lambda| K(x)$.

Enfin, $K(x) = 0$ exige $|x(t)| = 0$ quel que soit t.

La norme ainsi définie induit, comme nous l'avons dit, une topologie associée sur E ; la convergence des suites $x_n(t)$ est définie par la condition $d(x, x_n) \to 0$.

Mais $d(x,x_n) = \|x - x_n\| = \sup_t |x(t) - x_n(t)|$.

Comme dire que la borne d'une fonction est inférieure à ε, c'est dire que la fonction est inférieure à ε quel que soit t ; la convergence en question s'exprime par :

$\forall \varepsilon$, $\exists N$ tel que $n > N$ entraîne $|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$
pour tout t vérifiant $0 \leqslant t \leqslant 1$.

L'on reconnaît que ceci caractérise la *convergence uniforme.*

Autres exemples : On peut considérer des sous-ensembles de l'espace précédent, par exemple celui des fonctions *continues* sur $[0, 1]$ (l'on sait qu'elles sont bornées), ou, parmi celles-ci, considérer les fonctions dérivables une fois, ou n fois, ou qui sont indéfiniment dérivables.

L'on peut aussi changer la définition de la norme : par exemple, dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, l'on peut prendre :

$$\|x(t)\| = \int_0^1 x(t)\,dt$$

qui vérifie bien les axiomes des normes.

Construction d'espaces vectoriels topologiques localement convexes.

On démontre que de tels espaces ne sont pas tous normés. Pour obtenir les plus généraux, on démontre qu'il faut partir d'une famille de semi-normes $p_\alpha(x)$, les α étant éléments d'une famille de paramètres qui peut être infinie.

Extrayons de cette famille de normes un nombre fini d'entre elles $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n}$ et associons à chacune un nombre positif ε_i, puis le voisinage de l'origine, ensemble des x définis par : $p_{\alpha_i}(x) < \varepsilon_i$. Soit $B(p_{\alpha_i}, \varepsilon_i)$ ce voisinage. Enfin, soit A l'intersection de ces n voisinages $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

A chaque ensemble fini de paramètres α correspond ainsi un voisinage A de l'origine. C'est l'ensemble $\mathcal{A}$ de ces A que nous prenons comme système fondamental des voisinages de O (c'est-à-dire que nous nommons voisinage de O tout sous-ensemble de E qui contient un des ensembles A). Ceci généralise ce que nous avions fait dans le cas d'une norme unique.

Montrons que la topologie ainsi définie rend bien E localement convexe. Il suffit pour cela de montrer que les A sont convexes, ce qui est assuré si les $B(p_{\alpha_i}, \varepsilon_i)$ sont convexes, car l'intersection d'un nombre

fini d'ensembles convexes est convexe. Supposons donc $p_{\alpha_i}(x) < \varepsilon_i$ et $p_{\alpha_i}(y) < \varepsilon_i$. Nous avons, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$:

$$p_{\alpha_i}[\lambda x + (1-\lambda)y] \leqslant p_{\alpha_i}(\lambda x) + p_{\alpha_i}[(1-\lambda)y] \leqslant |\lambda| p_{\alpha_i}(x) + |1-\lambda| p_{\alpha_i}(y)$$
$$< \lambda\varepsilon_i + (1-\lambda)\varepsilon_i = \varepsilon_i$$

d'après les axiomes des semi-normes.

Réciproquement, l'on démontre que sur tout espace vectoriel topologique E localement convexe existe un système de semi-normes permettant de reconstruire la topologie de E par le procédé que nous venons d'indiquer.

Exemple : Fonctions indéfiniment dérivables $x(t)$ d'une seule variable réelle. (On étendrait aisément l'étude à des fonctions de plusieurs variables). Pour définir ses *Distributions*, L. SCHWARTZ suppose de plus ces fonctions nulles pour les valeurs de t supérieures à une valeur finie dépendant de la fonction ; nous ne ferons pas ici cette hypothèse supplémentaire.

Il est clair que l'ensemble E de ces fonctions est un espace vectoriel. On peut le munir de bien des topologies ; par exemple, on peut dire que x_n converge vers x si $x_n(t)$ tend vers $x(t)$ pour chaque valeur de t, ce qui n'utilise pas l'hypothèse de dérivabilité. Nous allons introduire une topologie très forte : $x_n(t)$ est dite converger vers $x(t)$ si : 1) $x_n(t)$ converge uniformément vers $x(t)$ sur tout intervalle fini $[t_1, t_2]$, et si, de plus, 2) toutes les dérivées satisfont à cette même condition : $x_n^{(h)}(t)$ converge uniformément vers $x^{(h)}(t)$ dans tout intervalle fermé de longueur finie, et ceci quel que soit h.

(Notons que la convergence des dérivées entraîne assez généralement la convergence de la fonction, mais l'inverse est exceptionnel).

A l'aide de cette définition de la convergence, on peut définir une topologie en introduisant un système de semi-normes en nombre infini :

Soit K un intervalle de longueur finie $[t_1, t_2]$, c'est-à-dire un compact de R. Notons D un symbole de dérivation d'ordre quelconque ; Dx est la famille d'opérateurs $x \underset{D}{\longrightarrow} x^{(h)} = \mathrm{D}x, \forall\ h$.

Nous définissons une semi-norme relative à K et à D en posant :

$$p_{K,D}(x) = \sup_{t \in K} |\mathrm{D}\,x(t)|. \qquad \text{(maximum de D}x \text{ sur K).}$$

La famille des paramètres α est donc ici la famille des couples K, D. Ces nombres vérifient bien les axiomes des semi-normes, et la convergence que l'on en déduit vérifie bien la condition de convergence forte désirée puisque :

$$\forall K, \forall D,\ p_{K,D}(x_n - x_0) \to 0 \iff x_n^h(t) \to 0 \text{ uniformément.}$$

De nombreux autres exemples peuvent être donnés.

Importance de la notion d'espaces vectoriels topologiques localement compacts.

Esquisse historique : Les théories mathématiques se développent en vue de leur utilisation pour des problèmes précis. La théorie que nous venons d'introduire contient des théorèmes d'une force extrême, mais en petit nombre ; ceci explique leur découverte tardive (vers 1920).

BANACH ne considère d'abord qu'une seule norme ; on nomme *espace*

de Banach un espace vectoriel normé complet (c'est-à-dire où toutes les suites de Cauchy convergent). Vers 1930 sont connus les théorèmes essentiels, une demi-douzaine seulement, mais qui s'appliquent à une foule de situations diverses. En moins de 25 ans, on sut choisir les bons axiomes, c'est-à-dire ceux qui sont vérifiés dans les exemples utiles, et rassembler les théorèmes applicables à ces exemples. Le traité de BANACH (*Théorie des opérations linéaires*, Varsovie, 1932) marque cette étape qui ne fut dépassée qu'une quinzaine d'années plus tard pour répondre au besoin d'inclure dans la théorie l'étude d'ensembles plus généraux, tels que les espaces infiniment dérivables de SCHWARTZ avec l'infinité de semi-normes indispensables. Un article de J. DIEUDONNÉ (*Annales de l'E.N.S.*, 1940) reprend le problème de BANACH en introduisant l'hypothèse que l'espace est localement convexe ; on peut alors obtenir des théorèmes qui ne se réduisent pas aux énoncés de BANACH dans les cas étudiés par celui-ci (G. W. MACKEY, J. DIEUDONNÉ, L. SCHWARTZ pour sa théorie des *Distributions*). Enfin, GROTHENDIECK, par l'importance des résultats obtenus, doit être considéré comme le vrai successeur de BANACH.

Cette théorie est le type même de celles qui ne peuvent être créées et enrichies d'une façon valable sans avoir en vue leurs applications.

Aperçu de quelques théorèmes.

Théorème de Hahn-Banach : Ce théorème a un énoncé si remarquable qu'il a convaincu même les non spécialistes de l'importance de la théorie. Nous n'indiquerons pas sa démonstration qui utilise l'induction transfinie et l'axiome de Zermelo.

PRÉLIMINAIRES : *Applications linéaires continues d'un espace vectoriel topologique sur un autre.*

Parmi les applications linéaires d'un espace vectoriel topologique E sur un autre F, l'on peut considérer celles qui sont continues pour les topologies de E et F. Ces applications sont extrêmement importantes dans de nombreux exemples ; ainsi, dans les espaces de Schwartz, l'application par dérivation, $x(t) \to x^{(h)}(t)$, est linéaire et continue pour la convergence donnée. De même, tous les opérateurs différentiels de la physique sont des applications linéaires continues d'espaces fonctionnels que l'on peut définir, plus ou moins aisément du reste. Il en est de même des opérateurs intégraux.

Un cas particulier fondamental est celui des applications linéaires continues d'un espace vectoriel topologique E dans l'ensemble R des nombres réels $x(t) \longrightarrow u(x) \in \mathrm{R}$, de sorte que :

$u(x + y) = u(x) + u(y)$ est continue en x et y,

$u(\lambda x) = \lambda u(x)$ est continue en x et en λ,

$u(x)$ se nomme alors une *forme linéaire* sur E.

Exemples : Soit E l'ensemble des fonctions $x(t)$ numériques continues sur $[0, 1]$; choisissons un nombre fixe t_0 de cet intervalle. L'application $x(t) \longrightarrow x(t_0)$ qui associe à chaque fonction sa valeur en t_0 est linéaire et continue.

De même, E étant le même, l'application $x(t) \rightarrow \int_0^1 x(t)dt$ est linéaire, et, d'après le théorème de la moyenne, est continue.

Plus généralement, $f(t)$ étant une fonction numérique continue choisie une fois pour toutes, l'application $x(t) \rightarrow \int_0^1 x(t)f(t)dt$ est linéaire et continue.

Il en est de même si $x(t)$ a pour image une intégrale de Lebesgue-Stieljes $x(t) \underset{u}{\rightarrow} \int_0^1 x(t)d\mu(t)$ où $\mu(t)$ est une fonction à variations bornées. Les théorèmes relatifs à ces intégrales et leurs réciproques ont du reste conduit à la définition moderne de ces intégrales comme *formes linéaires sur l'ensemble des fonctions continues, qui sont continues pour la topologie de la convergence uniforme.*

Théorème de Hahn Banach concernant les espaces vectoriels topologiques localement convexes :

Le théorème affirme *l'existence de formes linéaires continues* sur ces espaces, et même en précise des conditions de détermination :

Soit F un sous-espace vectoriel de E (c'est-à-dire un sous-ensemble stable pour les opérations d'addition et de multiplication par un nombre réel). Puisqu'il existe une topologie sur E, l'on peut définir la fermeture (ou adhérence) $\overline{F}$ de F dans E. Ceci dit, un des énoncés de BANACH est le suivant :

Etant donné un sous-espace vectoriel fermé $\overline{F}$ *et un point p non situé dans* $\overline{F}$, *il existe une forme linéaire continue sur* E *qui est nulle en tout point x de l'ensemble* $\overline{F}$ *et non nulle au point p.*

Il est évident que si $u(x)$, application continue, est nulle sur F, elle l'est aussi sur $\overline{F}$, puisque les points de $\overline{F}$ sont limites des points de F, mais on n'en peut rien réduire au dehors de $\overline{F}$. C'est *l'existence* de $u(x)$ qui est l'objet du théorème.

M. G.

II. ESSAIS

GÉOMÉTRIE SUR LE CERCLE

INTRODUCTION. — L'*ordre cyclique* et la *congruence cyclique* jouent en géométrie euclidienne un rôle important (étude des faisceaux de droites ou de plans, théorie des angles ou des dièdres) ; mais ils y demeurent naturellement des notions dérivées, parfois même tardivement définies. On se propose, dans ce qui suit, une introduction directe de ces relations, en construisant axiomatiquement la *géométrie sur le cercle*. Si l'on préfère adopter un autre langage, c'est de l'édification axiomatique de la droite riemanienne qu'il va s'agir.

Nous introduirons nos axiomes en faisant appel à l'intuition, et sans traiter de leur indépendance. A partir de l'image intuitive que nous avons de la ligne fermée (sans point multiple), tous les postulats de la congruence cyclique peuvent être appréhendés expérimentalement, à l'aide d'un compas à pointes sèches, sur la ligne fermée particulière que nous traçons d'abord à l'aide d'un compas dans un plan. Nous montrerons finalement que les axiomes introduits sont compatibles en fournissant un modèle arithmétique du cercle pour lequel ils se trouveront tous vérifiés.

On s'inspirera largement de la méthode exposée ici-même par M. G. CHOQUET (*Bulletin* de l'A.P.M., n° 158, octobre 1953) pour l'édification axiomatique de la droite (euclidienne ou lobatschefskienne) ; c'est ainsi qu'on définira d'abord le *cercle orienté*, de manière qu'une relation ternaire suffise à introduire l'ordre cyclique.

ORDRE CYCLIQUE SUR LE CERCLE ORIENTÉ. — Nous appelons *cercle orienté* un ensemble Γ d'éléments $a, b, c\ldots$ nommés points sur lequel est donnée une relation ternaire, dite *relation d'ordre cyclique* et notée (a, b, c), qui possède les propriétés suivantes :

1° Quels que soient a, b, c, sur Γ, on a (1) :

I-1 $$(a = b \text{ ou } b = c \text{ ou } c = a) \text{ ex } (a, b, c) \text{ ex } (c, b, a).$$

On en tire aussitôt $(a, b, c) \rightarrow \overline{(c, b, a)}$.

2° Quels que soient a, b, c sur Γ, on a

I-2 $$(a, b, c) \rightarrow (b, c, a).$$

On en tire aussitôt $(a, b, c) \rightarrow (b, c, a)$ et (c, a, b) et $\overline{(c, b, a)}$ et $\overline{(a, c, b)}$ et $\overline{(b, a, c)}$.

3° Quels que soient a, b, c, d sur Γ, on a

I-3 $$(a, b, d) \text{ et } (b, c, d) \rightarrow (a, c, d).$$

Compte tenu de I-2 et de I-3 lui-même, les hypothèses de I-3 entraînent aussi (a, b, c), donc entraînent (a, c, d) et (a, b, c) ; la réciproque s'établit d'ailleurs sans peine, de sorte que

$$(a, b, d) \text{ et } (b, c, d) \leftrightarrow (a, c, d) \text{ et } (a, b, c).$$

De manière analogue on obtient

$$(a, b, c) \text{ et } (c, d, a) \leftrightarrow (b, c, d) \text{ et } (d, a, b).$$

Etant donnés a, b distincts, l'ensemble des points m tels qu'on ait (a, m, b) est dit *intervalle ouvert* d'extrémités a, b, noté $]a, b[$.

La relation (a, b, c) ou $(a = b)$ ou $(b = c)$ est dite *relation d'ordre cyclique large* et notée $(a, b, c)^*$.

---

(1) Le symbole ex note l'exclusion réciproque ; pour désigner la négation, nous surlignons. Le signe d'universalité $\forall$ est sous-entendu partout où cette convention est admissible ; le signe d'existence $\exists$ est affecté d'un astérisque lorsqu'il désigne l'existence univoque. Afin d'alléger l'écriture des parenthèses formatives, il est entendu que les signes d'implication et d'implication réciproque dominent tous les autres.

Etant donnés a, b, l'ensemble des points m tels qu'on ait $(a, m. b)^*$ est dit *intervalle fermé* d'extrémités a, b, noté $[a, b]$; lorsque $a = b$, cet ensemble ne contient qu'un seul point.

Relation d'ordre entre points. — Choisissons ω sur Γ ; on dit alors que *a précède b* sur Γ lorsque (ω, a, b) où $(\omega = a \neq b)$, ce qu'on note $a < b$. Il résulte des axiomes précédents que

$$(a = b) \text{ ex } (a < b) \text{ ex } (b < a),$$
$$(a < b) \text{ et } (b < c) \rightarrow (a < c),$$

et il suffit de faire $\omega = a$ dans la définition introduite pour voir que, quel que soit b

$$(\omega < b) \text{ ou } (\omega = b).$$

Ainsi se trouve définie sur Γ *une structure d'ordre total pour laquelle* Γ *admet le point choisi* ω *comme premier élément.*

Relation de localisation entre points. — Choisissons ω_1 et ω_2 distincts sur Γ ; on dit alors que *a localise b* sur Γ lorsque

$$[(\omega_1, a, \omega_2) \text{ et } (\omega_1, b, \omega_2)] \text{ ou } [(\omega_2, a, \omega_1) \text{ et } (\omega_2, b, \omega_1)],$$

ce qu'on note $\{ a, b \}$. On a aussitôt

$$\{ a, b \} \rightarrow \{ b, a \}$$

et, en éliminant les hypothèses incompatibles fournies par les prémisses,

$$\{ a, b \} \text{ et } \{ b, c \} \rightarrow \{ a, c \}.$$

Comme d'autre part $(\omega_1 \neq a \neq \omega_2) \rightarrow \{ a, a \}$,

on voit que la relation de localisation et une *relation d'équivalence* sur l'ensemble obtenu en retranchant de Γ les points ω_1 et ω_2.

Relation de séparation entre couples. — On dit que le couple ordonné (a, a') *sépare* le couple ordonné (b, b') sur Γ lorsque

$$[(a, b, a') \text{ et } (a', b', a)] \text{ ou } [(a', b, a) \text{ et } (a, b', a')]$$

ce qu'on note $(a, a')/(b, b')$. Cette relation donne lieu à une propriété de réciprocité entre les couples

$$(a, a')/(b, b') \rightarrow (b, b')/(a, a')$$

et subsiste, d'autre part, si l'on y permute les deux éléments d'un couple quelconque ; enfin, si a, a', b, b' sont tous distincts, on a

$$[(a, a')/(b, b')] \text{ ex } [(a, b)/(a', b')] \text{ ex } [(a, b')/(b, a')].$$

CONGRUENCE CYCLIQUE SUR LE CERCLE ORIENTÉ. — Sur l'ensemble des couples ordonnés $(a, b)^*$ de points *distincts* de Γ est donnée, par ailleurs, une relation binaire, dite *relation de congruence cyclique* et notée $(a, b)^* \sim (a', b')^*$, qui est d'abord une *relation d'équivalence :*

II-1 $$(a, b)^* \sim (a, b)^*,$$

II-2 $$(a, b)^* \sim (a', b')^* \rightarrow (a', b')^* \sim (a, b)^*,$$

II-3 $$[(a, b)^* \sim (a', b')^*] \text{ et } [(a', b')^* \sim (a'', b'')^*] \rightarrow (a, b)^* \sim (a'', b'')^*.$$

Cette relation d'équivalence peut être étendue à l'ensemble Γ^2 de tous les couples ordonnés (a, b) de points Γ en désignant par $(a, b) \sim (a', b')$ la relation

$$[(a, b)^* \sim (a', b')^*] \text{ ou } (a = b \text{ et } a' = b').$$

Ainsi complétée, elle induit sur l'ensemble des intervalles fermés $[a, b]$ une nouvelle relation d'équivalence, qui détermine une partition de cet ensemble en classes d'équivalence disjointes ; la classe contenant l'intervalle fermé $[a, b]$ sera dite *longueur cyclique* de $[a, b]$; nous la noterons $\delta(a, b)$, de sorte que

$$(a, b) \sim (a', b') \leftrightarrow \delta(a, b) = \delta(a', b').$$

L'extension à laquelle nous avons procédé entraîne $\delta(a, a) = \delta(b, b)$; la classe d'équivalence qui contient tous les intervalles fermés d'extrémités identiques est dite *longueur nulle*, notée o ; on a donc $\delta(a, a) = o$ et aussi $(a = b) \leftrightarrow \delta(a, b) = o$.

La relation de congruence cyclique ainsi introduite possède les propriétés suivantes :

1° A tout point a de Γ et à toute longueur cyclique δ_0 est associé un point unique b de Γ tel que $\delta(a, b) = \delta_0$.

II-4 $$(\exists^* b)\ [\delta(a, b) = \delta_0].$$

Il en résulte qu'à toute longueur cyclique δ_0 on peut associer une application univoque de Γ dans Γ, qu'on nommera un *glissement*.

2° Quels que soient a, b, a', b' sur Γ, on a

II-5 $$(a.\ b) \sim (a', b') \to (a, a') \sim (b, b').$$

Cet axiome exprime qu'un glissement sur le cercle orienté conserve les longueurs cycliques.

3° Quels que soient a, b, c, a', b', c', sur Γ, on a

II-6 $$[(a, b) \sim (a', b')] \text{ et } [(b, c) \sim (b', c')] \sim (a, c)\ (a', c').$$

Cet axiome exprime que, sur le cercle orienté, le produit de deux glissements est un glissement.

Supposons qu'on ait $(a, b) \sim (b', c')$ et $(b, c) \sim (a', b')$ et soit d' le point de Γ défini par $(b, c) \sim (c', d')$, de sorte que $(a', b') \sim (c', d')$; II-5 donne alors $(a', c') \sim (b', d')$; mais II-6 donne par ailleurs $(a, c) \sim (b', d')$, si bien que $(a, c) \sim (a', c')$. L'axiome II-6 se trouve complété par le théorème

$$[(a, b) \sim (b' c')] \text{ et } [(b, c) \sim (a', b')] \to (a, c) \sim (a', c').$$

Si (a, b) et (a', b') sont congruents, (a, a') et (b, b') le sont aussi, d'après II-5 ; comme $(b' a)$ est congruent à lui-même, le théorème précédent montre que (b', a') et (b, a) le sont aussi ; on obtient en fin de compte

$$(a, b) \sim (a', b') \to (b, a) \sim (b', a').$$

Soit a un point de Γ et δ_0 une longueur cyclique ; soit b le point de Γ défini par $\delta(a, b) = \delta_0$. Il existe sur Γ un point b' tel que $\delta(a, b') = \delta(b, a)$, donc tel, d'après la propriété précédente, que $\delta(b', a) = \delta(a, b) = \delta_0$. L'axiome II-4 se trouve complété par le théorème

$$(\exists^* b')\ [\delta(b', a) = \delta_0].$$

De plus, si $\delta_0 \neq 0$, a est distinct à la fois de b et de b', et l'on a, soit (b, a, b'), soit (b', a, b), soit $b = b'$.

Opération d'addition sur les longueurs cycliques. — Définissons une addition sur l'ensemble Γ^2 des couples ordonnés en posant $(a, c) = (a, b) + (b, c)$; nos derniers axiomes permettent alors de construire une addition sur l'ensemble L des longueurs cycliques, telle que $\delta(a, c) = \delta(a, b) + \delta(b, c)$; cette opération, qui admet 0 comme élément neutre, est commutative et associative. Nous pouvons écrire maintenant une série de formules de Chasles

$\delta(a, a) = 0 \quad \delta(a, b) + \delta(b, a) = 0 \quad \delta(a, b) + \delta(b, c) + \delta(c, a) = 0$, etc...

Liaison entre l'ordre cyclique et la congruence cyclique. — *Conservation de l'ordre cyclique par glissement.* — Nous exprimons que la structure d'ordre cyclique définie sur Γ est compatible avec la structure de congruence cyclique définie sur Γ^2 en posant :

Quels que soient a, b, c, a', b', c' sur Γ, on a

III-1 $$(a, b, c) \text{ et } [(a, a') \sim (b, b') \sim (c, c')] \to (a', b', c').$$

Relation d'ordre cyclique entre longueurs cycliques. — Choisissons ω sur Γ et associons à toute longueur cyclique δ_i le point a_i tel que $\delta(\omega, a_i) = \delta_i$; la relation (a_1, a_2, a_3) définit alors entre $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ une relation qui est indépendante du point ω choisi ; on la note $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, et l'on a

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \to (\delta_1 + \delta_0, \delta_2 + \delta_0, \delta_3 + \delta_0).$$

Ainsi la structure d'ordre cyclique définie sur Γ induit sur L *une structure d'ordre cyclique compatible avec l'addition.*

Introduisant ensuite la relation (o, δ_1, δ_2) ou $(o = \delta_1 \neq \delta_2)$, qu'on note $\delta_1 < \delta_2$, on définit sur L *une structure d'ordre total pour laquelle* L *admet* o *comme premier élément.*

Médiation des intervalles. — Tel qu'il se trouve actuellement construit, le cercle orienté peut encore ne contenir qu'un nombre fini de points ; l'axiome que voici va enrichir ses propriétés tout en lui assurant désormais un nombre infini d'éléments :

A tout couple (a, b) de points distincts de Γ est associé un point unique c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $(a, c) \sim (c, b)$,

III-2 $\qquad (a \neq b) \rightarrow (\exists^* c)\ [[(a, c) \sim (c, b)]$ et $(a, c, b)]$.

Ce point c est dit le *milieu* de l'intervalle fermé $[a, b]$ d'extrémités distinctes ; on étend cette définition à tous les intervalles fermés en appelant milieu de l'intervalle fermé $[a, a]$ le point a lui-même.

Rappelons que, dans la construction de M. G. Choquet, la propriété analogue résulte, non pas seulement des axiomes liant l'ordre et la congruence sur la droite orientée, mais aussi des axiomes régissant le plan qu'on associe ultérieurement à la droite.

Opposition des points. — Soit a un point de Γ ; prenons sur Γ un point b_1 distinct de a, et soit b_2 le point de Γ défini par $(b_1, a) \sim (a, b_2)$; considérons alors le point c défini de la manière suivante :

— si $b_1 = b_2$, on pose $c = b_1 = b_2$;
— si (b_1, a, b_2), c est le milieu de $[b_2, b_1]$;
— si (b_2, a, b_1), c est le milieu de $[b_1, b_2]$.

On constate aisément qu'on a, dans tous les cas $(a, c) \sim (c, a)$ et $(a \neq c)$ et on démontre par l'absurde qu'il ne peut exister de point c' distinct de c possédant aussi cette propriété : si, par exemple, (b_1, a, b_2), c' ne saurait, ni se confondre avec b_1 ou b_2, ni appartenir à $[b_1, b_2]$, qui aurait alors deux milieux a et c', ni appartenir à $[b_2, b_1]$, qui aurait alors deux milieux c et c'.

Ainsi, à tout point a de Γ est associé un point unique c distinct de a et tel que $(a, c) \sim (c, a)$; ce point est dit l'*opposé* de a sur Γ ; on le note $\bar{a}$, de sorte que

$$\delta(a, \bar{a}) = \delta(\bar{a}, a) \neq o.$$

Remarquons que ces relations subsistent si l'on y permute a et $\bar{a}$, d'où il résulte que $a = \bar{\bar{a}}$: *l'opposé de l'opposé d'un point est ce point lui-même.*

Soit a, b deux points de Γ, et soit b_1 le point de Γ défini par $(a, \bar{a}) \sim (b, b_1)$; on a alors
$$\delta(b, b_1) + \delta(b, b_1) = o,$$
et comme aussi
$$\delta(b, b_1) + \delta(b_1, b) = o,$$
on en tire $(b, b_1) \sim (b_1, b)$; cette relation, jointe à $b \neq b_1$, montre que $b_1 = \bar{b}$, de sorte que
$$\delta(a, \bar{a}) = \delta(b, \bar{b}).$$

La classe d'équivalence qui contient tous les intervalles fermés d'extrémités opposées est dite *longueur fondamentale*, notée Δ ; on a donc $\delta(a, \bar{a}) = \Delta$ et aussi

$$(b = \bar{a}) \longleftrightarrow \delta(a, b) = \Delta.$$

Remarquons que $\Delta \neq o$: *la longueur nulle et la longueur fondamentale sont distinctes.*

L'addition des longueurs cycliques possède maintenant les propriétés suivantes :

$$o + o = \Delta + \Delta = o,$$
$$o + \Delta = \Delta + o = \Delta,$$

et nous pouvons écrire une nouvelle série de formules de Chasles :

$\delta(a, \overline{a}) = \Delta$, $\quad \delta(a, b) + \delta(b, \overline{a}) = \Delta$, $\quad \delta(a, b) + \delta(b, c) + \delta(c, \overline{a}) = \Delta$, etc...

On obtient aisément $\quad \delta(a, b) = \delta(\overline{a}, \overline{b})$,

et l'axiome III-1 donne $\quad (a, b, c) \longleftrightarrow (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$,

d'où, en particulier $\quad (a, b, \overline{a}) \longleftrightarrow (\overline{a}, \overline{b}, a)$.

Mesure naturelle des longueurs cycliques. — Choisissons ω sur Γ, et soit $\overline{\omega}$ son opposé, de sorte que $\delta(\omega, \overline{\omega}) = \Delta$; rappelons que $\omega \neq \overline{\omega}$. Par application répétée de III-2, on définit le milieu ω_1 de $[\omega, \overline{\omega}]$, puis le milieu ω_2 de $[\omega, \omega_1]$, puis le milieu ω_3 de $[\omega, \omega_2]$, etc... ; la longueur cyclique $\delta(\omega, \omega_n]$ est notée $\frac{\Delta}{2^n}$. Par **addition** répétée de $\frac{\Delta}{2^n}$ sera définie ensuite, quel que soit l'entier naturel k, la longueur cyclique notée $k\frac{\Delta}{2^n}$. Soit alors une longueur cyclique δ_0, et adoptons Δ comme *unité naturelle* sur l'ensemble L. En comparant successivement (pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) la longueur δ_0 aux longueurs de la suite $k\frac{\Delta}{2^n}$, où $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^{n+1} - 1$, **on** construira par le procédé classique, l'opération étant poursuivie indéfiniment au besoin, le nombre réel. rationnel ou irrationnel, compris entre 0 et 2 (2 exclu), qui sera dit la *mesure naturelle* de δ_0.

Ainsi *toute longueur cyclique* δ_0 *a pour mesure naturelle un nombre réel bien déterminé* x_0 *tel que* $0 \leqslant x_0 < 2$.

Continuité sur le cercle orienté. — Soit b un point de Γ et considérons une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de points de Γ tels que, quel que soit l'entier naturel k, on ait $(a_k, a_{k+1}, b)^*$, ce qu'on notera simplement ici $(a_k, a_{k+1}, b)^*_k$. Le cercle orienté est dit *continu* s'il possède la propriété suivante :

IV $\quad (a_k, a_{k+1}, b)^*_k \rightarrow (\exists a')\,[(a_k, a', b)^*_k$ et $(\forall b')\,[a_k, b', b)^*_k \rightarrow (a', b', b)^*]]$

Le point a', nécessairement unique, introduit par cet axiome, s'appelle le *point limite* de la suite a_k.

Dès lors, on pourra établir par le procédé classique que *tout nombre réel* x_0 *tel que* $0 \leqslant x_0 < 2$ *est la mesure naturelle d'une longueur cyclique bien déterminée* δ_0.

En résumé, on aura défini une application biunivoque de l'ensemble L des longueurs cycliques sur l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 2 (2 exclu).

Cercle non orienté. — Au cercle orienté Γ associons le cercle orienté opposé Γ' obtenu :

— en renversant l'ordre cyclique, c'est-à-dire en remplaçant (a, b, c) par (c, b, a), donc aussi $(a, b, c)^*$ par $(c, b, a)^*$;

— en renversant l'ordre des couples, c'est-à-dire en remplaçant (a, b) par (b, a), donc aussi $\delta(a, b)$ par $\delta(b, a)$.

Nous appelons *cercle non orienté* l'ensemble de ces deux cercles orientés opposés.

On notera que les relations de localisation entre points et de séparation entre couples se trouvent définies sur le cercle non orienté, puisque leurs définitions sont invariantes par renversement de l'ordre cyclique.

Consistance de la géométrie sur le cercle. — Considérons l'ensemble Γ des progressions arithmétiques illimitées $a, b, c, \ldots$ de raison 2 ; a contient un terme unique, soit $f(a)$, tel que $0 \leqslant f(a) < 2$. Pour que a et b soient identiques, il faut et il suffit que $f(a) = f(b)$. Soit alors trois progressions, a, b, c, deux à deux distinctes, et désignons par (a, b, c) la relation

$[f(a) < f(b) < f(c)]$ ou $[f(b) < f(c) < f(a)]$ ou $[f(c) < f(a) < f(b)]$.

On s'assure aisément que les trois axiomes I sont vérifiés. L'axiome IV l'est aussi.

La congruence $f(b) - f(a) = f(b') - f(a')$ (mod. 2) définit sur l'ensemble Γ^2 des couples ordonnés (a, b) une relation d'équivalence que nous notons

$$(a, b) \frown (a', b') ;$$

la classe d'équivalence correspondante contenant le couple ordonné (a, b) sera désignée par $\delta(a, b)$. Les six axiomes II se trouvent vérifiés.

En discutant les diverses possibilités offertes par les prémisses, on verra enfin que les deux axiomes III sont également vérifiés, la progression c dont III-2 affirme l'existence étant fournie, tantôt par $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$, tantôt par $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \varepsilon$, où $\varepsilon = \pm 1$ suivant le cas.

En résumé, tous les axiomes que nous avons introduits, se trouvant affirmés pour notre modèle, doivent être tenus pour compatibles ; de manière explicite, *si l'arithmétique est consistante, la géométrie sur le cercle l'est aussi.*

Jean CHAUVINEAU, *professeur au Lycée Henri-IV.*

A PROPOS DU LYCÉE FERMAT

Par Arrêté en date du 15 janvier 1957, le Ministre d'Etat chargé de l'Education Nationale, a décidé que le Lycée de Toulouse porterait désormais le nom de « Lycée Pierre-de-Fermat » avec particule et tirets.

L'illustre mathématicien fut baptisé à Beaumont-de-Lomagne, le 20 août 1601, comme « Pierre, fils de Dominique Fermat, bourgoys et segont consul de la ville de Beaumont ». Le parrain était « Pierre Fermat, marchant et frère dudit Dominique », la marraine Jeanne Cazenuve.

Dans la publication des bans de son mariage avec Louise de Long, en avril 1631, il est encore appelé « Pierre Fermat, advocat ». Mais dans l'acte de mariage, du 1er juin, il est devenu « Monsieur Me Pierre de Fermat, conseiller en la Cour ».

Descartes dira de lui : « Monsieur Fermat est Gascon, moy non ». Tout ceci pour nous étonner de la particule alourdie de tirets, lorsque personne ne parle de Blaise de Pascal, dont la noblesse (petite) est pourtant authentique.

Mais qu'importe ! L'usage prévaudra certainement bientôt d'appeler le Lycée de Toulouse, très simplement, Lycée Fermat.

La bibliothèque municipale de Toulouse, avec la collaboration des Archives départementales de la Haute-Garonne et le concours de la Bibliothèque Nationale, a organisé, à l'occasion de cette nouvelle dénomination, une belle exposition inaugurée le 22 juin.

Un riche catalogue a été édité, contenant un avant-propos du Proviseur du Lycée, Guy LAMÉNARDIE, agrégé de Mathématiques, et d'un Eloge de Fermat, par notre collègue Roger PAINTANDRE, professeur de Spéciales.

En somme, les Mathématiques étaient à l'honneur, et nous nous en réjouissons.

Si tout le monde connaît Fermat, au moins de réputation, il est très difficile de juger de son influence immédiate sur le développement de notre science. Cela n'est d'ailleurs pas un cas isolé. Alors que l'on peut se faire sans trop de difficultés une idée statique de l'œuvre d'un savant — il suffit de lire attentivement ses écrits — il est en général très pénible, il est parfois même à peu près impossible, de s'en faire une représentation dynamique, ou évolutive. Il faut, en effet, pour cela, connaître l'état de la science avant l'auteur étudié, pendant sa vie, après elle, savoir quels furent ses maîtres, ses émules, ses disciples.

Cette connaissance exhaustive, qui n'est possible qu'aux professionnels de l'histoire des sciences, leur coûte un effort considérable, très souvent disproportionné aux résultats qu'ils obtiennent.

Pour donner un exemple, je relève dans l'*Histoire des Mathématiques*, de BECKER et HOFMANN, édition française, au sujet de Viète : « Tout ce qui avait été imprimé... (des œuvres de celui-ci) fut rassemblé par Fr. van Schooten (1646)... c'est seulement alors que les œuvres de Viète, dont les premières éditions étaient dès cette époque des raretés bibliographiques, devinrent accessibles à tous et purent véritablement exercer une influence. »

Or l'influence de Viète atteint son apogée dans les années 30, avec la publication des ouvrages de Harriot, Oughtred, Descartes, et les travaux de Fermat et de Roberval, pour ne citer que les plus illustres des disciples avoués ou inavoués, conscients ou inconscients, du fondateur des Mathématiques modernes.

Encore est-il assez facile de deviner l'influence de Viète qui fit imprimer la plupart de ses mémoires, s'il ne publia jamais aucun ouvrage didactique. Mais le cas Fermat est beaucoup plus difficile. Non quant aux sources — car si nous ignorons tout du cours de ses études, du moins cite-t-il abondamment ses inspirateurs, les Grecs et François Viète — mais quant à l'action qu'il exerça sur ses contemporains. Au contraire, en effet, de son illustre inspirateur, il ne fit à peu près rien imprimer de son vivant. Ses Mémoires ne sont pour la plupart que des esquisses manuscrites, dont il existe parfois plusieurs versions, et qui circulaient entre ses correspondants et leurs amis ou leurs relations. Chacun en copiait ce qui lui plaisait et les éditeurs de ses œuvres complètes, Paul Tannery et Charles Henry, eurent bien du mal à en établir des textes définitifs.

Ses contemporains eux-mêmes s'y perdaient, témoin Wallis, dont il est bon ici de signaler le cas. Né en 1616, il vint assez tard aux Mathématiques, comme il le signale lui-même, ses premiers travaux personnels étant de 1648. Son ouvrage principal est l'*Arithmetica infinitorum*, de 1656. C'est une tentative géniale de fonder un calcul infinitésimal abstrait. Il dit à ce sujet, dans son *Algèbre* de 1685, page 292 :

« This *Abstractio Mathematica* (as the Schools call it), is of great use in all kind of Mathematical considerations, whereby we separate what is the proper Subject of Inquiry, and upon which the Process proceeds, from the impertinences of the matter (accidental to it), appertaining to the present case or particular construction.

« For which reason, whereas I find some others (to make it look, I suppose, the more Geometrical) to affect Lines and Figures ; I choose rather (where such things are accidental) to demonstrate universally from the nature of Proportions, and regular Progressions, because such Arithmetical Demonstrations are more Abstract, and therefore more universally applicable to particular occasions. Which is one main design that I aimed at in this Arithmetick of Infinites. »

Malheureusement Wallis, dans cet ouvrage, utilise à peu près uniquement l'induction incomplète, ce qui ne fut pas bien apprécié par Fermat : « Sa façon de démontrer, écrit ce dernier en 1657, qui est fondée sur l'induction plutôt que sur un raisonnement à la mode d'Archimède, fera quelque peine aux novices, qui veulent des syllogismes démonstratifs depuis le commencement jusqu'à la fin. Ce n'est pas que je ne l'approuve ; mais, toutes ses propositions pouvant être démontrées *viâ ordinariâ, legitimâ et Archimedeâ* en beaucoup moins de paroles que n'en contient son livre, je ne sais pas pourquoi il a préféré cette manière par notes algébriques à l'ancienne, qui est et plus convaincante et plus élégante, ainsi que j'espère lui faire voir à mon premier loisir. »

Or Wallis, qui venait seulement de connaître Fermat et ignorait tout de son œuvre, répond (1) :

« J'aurais certes plutôt attendu des remerciements qu'une accusation, pour avoir indiqué ouvertement et loyalement, non seulement où j'étais arrivé, mais encore

(1) Traduction du latin, par Paul TANNERY.

quelle route j'avais suivie ; pour ne pas avoir été rompre le pont sur lequel j'avais passé le fleuve ; d'autres peuvent le faire, mais on s'en plaint assez... Il n'y a guère, je crois... aucun géomètre un peu exercé (à plus forte raison quelqu'un de tel que lui) qui ne puisse facilement, sur mes démonstrations, en forger d'*apagogiques* et semblables à celles d'Archimède. Aussi, pour sa promesse... ce qu'il annonce devoir faire a déjà été précisément accompli par Cavalieri, dans son *Traité de l'usage des indivisibles dans les puissances cossiques.* »

Fermat dut sourire à cette lecture, car son adversaire le renvoyait, sans le savoir, à lui-même, comme je vais essayer de le montrer.

Mais, que l'on ne s'y trompe pas, je n'accuse pas ici le probe Cavalieri de plagiat. Toute cette histoire est beaucoup plus subtile.

En 1635, le professeur de Bologne avait publié son ouvrage célèbre sur les Indivisibles : *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota,* ouvrage qui, comme tous les travaux de l'époque sur les quadratures et les cubatures, est inspiré par Archimède, mais où se fait sentir, outre l'influence de Képler, une puissante pensée originale, bien que souvent obscure. Ce gros traité en sept livres et de plus de cinq cents pages fut fortement critiqué par le Père Guldin, Jésuite autrichien, dont une proposition célèbre perpétue le nom.

La dernière année de sa vie, en 1647, Cavalieri publie ses *Exercitationes Geometricae Sex,* exercices dont les deux premiers reprennent et résument le thème principal de l'ouvrage de 1635, dont le troisième répond aux attaques de Guldin, et dont le quatrième est celui cité par Wallis.

Cavalieri, comme Torricelli, est un excellent géomètre, mais sa culture d'algébriste est faible, comme celle de la plupart des disciples de Galilée. Ce quatrième exercice, où apparaît, page 268, une intéressante disposition du triangle arithmétique, dit de nos jours triangle de Pascal, est une tentative incomplètement réussie de dépasser la pure intuition géométrique grâce au calcul algébrique et aux « puissances cossiques » (2). Cavalieri a inséré dans cet Exercice des travaux de Jean de Beaugrand, le seul mathématicien français avec qui il ait été en relations.

Mais Beaugrand, bon disciple de Viète, sans grande envolée, est un des premiers correspondants de Fermat dont il s'inspire fort, jusqu'au plagiat inclusivement. Ce dernier avait d'ailleurs en sa possession des méthodes infiniment supérieures à celles du Quatrième Exercice de Cavalieri. Le 4 novembre 1636, il signalait à Roberval la proposition capitale :

« *Ultimum latus in latus proxime majus facit duplum trianguli,*
Ultimum latus in triangulum lateris proxime majoris facit triplum pyramidis,
Ultimum latus in pyramidem lateris proxime majoris facit quadruplum triangulotrianguli,
Et eo in infinitum progressu. »

Et il ajoutait : « Toutes ces propositions, quoique belles de soi, m'ont servi à trouver la quadrature que je suis bien aise que vous estimiez. »

Autrement dit, Fermat avait vingt ans d'avance sur Wallis, sans que le mérite de celui-ci soit en rien diminué. D'ailleurs Pascal, ce rival de Wallis, ce disciple de Roberval, s'y perdait lui aussi.

Il écrit, en effet, dans le Triangle Arithmétique, qui est de la fin de 1654, au « Traité des Ordres numériques », proposition XI : « *Un nombre, de quelque ordre que ce soit, étant multiplié par la racine précédente et divisé par l'exposant de son ordre, donne pour quotient le nombre de l'ordre suivant qui procède de cette racine.* »

C'est là une excellente paraphrase du texte latin de Fermat qui précède. Il suffit de savoir, pour achever de comprendre, que les ordres numériques sont les suivants :

---

(2) Algèbre, Arte della cossa, Puissances cossiques, puissances algébriques ; ici algorithme du binôme de Newton, mais avec la seule récurrence par sommation.

nombres linéraires : $l_n = n$, n entier positif,
nombres triangulaires : $t_n = t_{n-1} + l_n$,
nombres pyramidaux : $p_n = p_{n-1} + t_n$, etc...

Pascal ajoute en commentaire, et ici l'on reconnaîtra la discrétion de Fermat :

« Les manières de tourner une même chose sont infinies : en voici un illustre exemple, et bien glorieux pour moi. Cette même proposition, que je viens de rouler en plusieurs sortes est tombée dans la pensée de notre célèbre conseiller de Toulouse, M. de Fermat, et, ce qui est admirable, sans qu'il m'en eût donné la moindre lumière, ni moi à lui, il écrivait dans sa Province ce que j'inventais à Paris, heure pour heure (3), comme nos lettres écrites et reçues en même temps le témoignent. »

D'ailleurs, qui voudrait connaître mieux l'influence de Fermat sur ses contemporains dans le seul cas examiné ici, celui des sommes itérées d'entiers et leur utilisation dans le calcul intégral, devrait se reporter à la très importante lettre de Roberval à Torricelli, écrite en 1647 et qui n'arriva à Florence qu'après la mort du destinataire. On y remarque en particulier une belle réponse de Fermat, jamais citée, mais admirable. Roberval lui ayant demandé comment il était arrivé aux quadratures de ses spirales, généralisations de celle d'Archimède, il lui écrivit :

« *Ego, ut invenirem laboravi ; labora et ipse : in hoc enim labore præcipuam voluptatis partem consistere deprehendes.* » (4).

Mais, Roberval aussi, fut une de nos gloires. A quand, dans la région parisienne, un Lycée Roberval ? Mais, de grâce, pas un Lycée Gilles-Personnier-de-Roberval !

Jean ITARD.

LE SATELLITE ARTIFICIEL

L'exposé que nous publions ici est le résumé d'une conférence prononcée par M. MICHARD, *Astronome à l'Observatoire de Meudon, lors des journées sur l'enseignement de l'astronomie, organisées par l'A.P.M. en avril 1957. Cet exposé traite de ce qui était alors connu : le projet de satellite américain. Il nous a paru intéressant de fournir à tous nos Collègues et tout de suite une documentation précise sur le sujet. On sait toutefois que le satellite envoyé par les spécialistes russes le 4 octobre 1957 a des caractéristiques un peu différentes : angle de 65° de son orbite avec l'équateur, apogée à 900 km, masse plus grande. Si les renseignements scientifiques manquent encore sur cette extraordinaire réalisation, l'exposé de* M. MICHARD *permet de s'en faire une première idée (et de répondre ainsi aux questions que les élèves nous posent sur ce sujet).*

Le satellite artificiel pose deux problèmes : celui de son lancer, celui de ses applications scientifiques. Dans le développement du projet de lancement d'un satellite artificiel entre, pour une part importante, le gain de prestige dont bénéficieront les réalisateurs de l'opération, mais cet aspect de la question ne sera pas abordé ici.

Le problème du lancer est le suivant : atteindre l'altitude de 500 km et faire décrire une orbite au satellite en lui communiquant une vitesse sensiblement hori-

---

(3) Ne faisons pas trop de critiques à Pascal, mais comme il romance ! Fermat aurait pu dire : « Monsieur Pascal est Gascon, moi non. » Il est vrai que Pascal nuance : Fermat *écrivait*, pendant que lui *inventait*.

(4) Pour trouver, j'ai travaillé. Travaillez-y vous-même, car c'est dans ce travail que réside la plus grande joie de la découverte.

zontale de 7 800 m/s. Le progrès technique à réaliser est considérable, le record d'altitude atteint par une fusée étant de 400 km (la vitesse de l'engin étant alors nulle, puisqu'il est au sommet de sa trajectoire quasi-verticale).

La fusée imaginée est à trois étages. Le premier, mû par un mélange d'essence et d'oxygène liquide, les deuxième et troisième par des propergols solides. Le troisième étage, protégé par un cône pointu de profilage, contient le satellite.

Voici la suite envisagée pour les opérations du lancer : le tube de lancer est installé en Floride méridionale. Le premier étage de la fusée assure la montée verticale de 0 à 80 km d'altitude jusqu'à épuisement de son combustible ; ce premier étage vide se détache et tombe. Le deuxième étage de la fusée entre en fonctionnement et assure le relais en poursuivant la montée verticale accélérée jusqu'à 250 km d'altitude. La vitesse atteint alors la moitié de la vitesse orbitale. Le deuxième étage de la fusée étant épuisé tombe à son tour pendant que le troisième étage continue à monter jusqu'à 500 km grâce à la vitesse acquise. Le cône protecteur étant devenu inutile (à une altitude où la densité de l'atmosphère est très faible) est sectionné. L'ensemble atteint alors une vitesse sensiblement horizontale de 4 000 m/s. C'est à ce moment que le troisième étage de la fusée entre en action pour accélérer le mouvement jusqu'à lui donner la vitesse de 7 800 m/s. La troisième fusée libère alors le satellite et tombe.

La principale difficulté à surmonter est celle du guidage. Pour maintenir la fusée sur la trajectoire prévue et calculée à l'avance, un système de gyroscopes et de servo-mécanismes agira sur des fusées logées dans le deuxième étage. Pendant la troisième phase, le guidage n'est plus utile.

Quel sera le mouvement du satellite en supposant le lancer réussi ? La vitesse de libération ne pouvant pas être exactement celle qui donnerait un mouvement circulaire, l'orbite sera elliptique. On espère que l'apogée sera à 1 100 km d'altitude, le périgée à 350 km.

L'orbite, décrite en une heure et demie environ, se déplacera rapidement par rapport au sol, en raison de la rotation de la Terre. Le lancement aura d'ailleurs lieu vers l'Est pour que le mouvement de rotation de la Terre participe lui-même au lancement. L'orbite se déplacera progressivement vers l'Ouest et comme son plan fera un angle de 40° avec celui de l'équateur, l'orbite balaiera la zone comprise entre les latitudes — 40° et + 40°.

Du fait du ralentissement du satellite, en particulier lors de ses passages au périgée, où il sera freiné par la haute atmosphère, il finira par tomber et se désintégrer. Sa durée est largement imprévisible (de deux heures à deux ans), car on sait trop peu de choses sur l'atmosphère au-delà de 300 km.

Le satellite lui-même est une sphère de 50 cm de diamètre pesant environ 10 kg ; telle serait la limite de la charge possible. On conçoit qu'un problème délicat se trouve donc posé, celui du repérage du satellite (voir une balle de ping-pong à 20 km).

Le premier mode de détection envisagé est radio-électrique. Le satellite contient un émetteur radio sur 110 mégacycles alimenté par une pile et développant quelques milliwatts (l'émission pouvant durer quinze jours). Des stations d'écoute réparties à la surface de la Terre déduiront la position du satellite de mesures interférométriques. L'émission pouvant être reçue pendant quelques dizaines de secondes, on pourra même évaluer de cette façon la vitesse du satellite. Les renseignements recueillis seront aussitôt transmis à un centre de calcul mécanique qui dressera les éphémérides du satellite et les transmettra à tous les intéressés.

Dans le cas où cette détection échouerait, on a prévu une recherche optique avec instruments de grande clarté et à grand champ principalement installés le long du méridien de longitude 75° Ouest.

Des photographies seront prises au crépuscule où le satellite brillera comme un astre de magnitude 5,7 (à la limite de la visibilité à l'œil nu). La vitesse de son déplacement angulaire apparent (qui atteindra 1° par seconde) et la faible luminosité

disponible limiteront les possibilités photographiques. Une chambre de Schmidt a été spécialement perfectionnée à cette fin (ouverture F/1, diamètre de l'objectif 50 cm, champ 20° ; possibilité limite magnitude 8). Une quinzaine de stations recevront cet équipement et auront probablement une occasion par semaine de photographier le satellite.

*
**

Les applications scientifiques du satellite sont de deux sortes. Les premières sont des applications directes de l'existence du satellite lui-même et de son mouvement. Le freinage de ce mouvement fournit en effet des renseignements sur la répartition des pressions dans la très haute atmosphère.

L'orbite du satellite, beaucoup plus proche de la Terre que celle de la Lune, permettra des mesures raffinées du potentiel newtonien. Il fournira par conséquent des précisions sur la répartition des masses dans le géoïde (permettant de déceler les anomalies locales) dont il pourra aussi améliorer la détermination (est-ce un ellipsoïde de révolution ou un ellipsoïde à trois axes comme on a maintenant tendance à le penser). Les observations du satellite entreront dans le cadre de l'opération mondiale des longitudes, car elles permettront de raccorder les réseaux géodésiques distincts des continents (on escompte en ce domaine une précision dix fois supérieure à celle des méthodes classiques de la géodésie).

Les autres applications scientifiques du satellite seront les observations faites et transmises par les instruments du bord. En raison de la faible charge utile, une liste de priorité a dû être établie :

1° Etude du rayonnement solaire, en particulier dans le domaine des radiations ultra-violettes et des rayons X ; cette étude a déjà été faite avec des fusées (aux U.S.A.), mais le long séjour du satellite en très haute atmosphère doit permettre de *suivre l'évolution des phénomènes* dont on sait l'importance (ce rayonnement contrôle la formation de l'ionosphère). L'absorption du rayonnement ultra-violet par les hautes couches de l'atmosphère sera donc mesurée. Les observations seront faites par photomètres et télégraphiées au sol (pour ne pas gaspiller l'énergie disponible, l'émetteur chargé de transmettre les renseignements scientifiques, distinct de l'émetteur de repérage, ne fonctionnera que sur signal envoyé par le récepteur terrestre).

2° Etude du rayonnement cosmique ; à cette altitude, il s'agit de rayons primaires sur lesquels l'action du champ magnétique terrestre n'est pas sensible.

3° Etude de l'ionosphère, le satellite étant « sur place » pour enrichir nos connaissances sur cette région de l'atmosphère dont les phénomènes ont tant d'importance sur les télécommunications.

4° Observations météorologiques : le satellite fournira des renseignements à grande échelle sur la répartition des nuages à la surface du globe (par mesure de l'albedo des régions survolées).

5° On pourra aussi compter les chocs des poussières interplanétaires (de densité évaluée à une tonne pour un volume égal à celui de la Terre) et étudier la corrosion de la surface du satellite sous l'effet du frottement de ces poussières (en mesurant l'éclat du satellite).

*
**

Le lancement du satellite artificiel sera sans doute la plus populaire des opérations de l'Année géophysique internationale. Le bref aperçu précédent suffit à montrer que l'entreprise est d'un intérêt scientifique considérable.

R. Michard, *Astronome à l'Obervatoire de Meudon.*

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

LES MATHÉMATIQUES ET LE CONCRET *

Me sera-t-il possible de m'expliquer si j'avoue ne pas savoir avec précision ce qu'est le concret, et encore moins ce que sont les Mathématiques ? En tout cas je voudrais préciser que je parlerai plutôt de l'activité mathématique elle-même que des Mathématiques comme ensemble de connaissances obtenues au moyen de cette activité, et que je refuse d'opposer le concret et l'abstrait comme deux catégories tranchées, en me rapportant simplement à la disjonction ou à la simple comparaison qui les relativise.

Malgré cette simplification de termes, de sérieux points d'interrogation se présentent : Qu'est-ce que nous devons entendre par activité mathématique ? En quoi consiste la distinction qui permet de situer le concret d'un côté et l'abstrait de l'autre dans chaque cas ?

Comme enseignant, je considère insuffisant de limiter l'activité mathématique à la dynamique opératoire entre concepts purs élaborés, de la réduire au fait de cultiver ses facultés logiques, comme on disait classiquement, en interprétant comme un simple mécanisme déductif le rôle de la logique. Ce point de vue trop exclusif, que chaque génération de professeurs de Mathématiques hérite de la précédente, crée une tendance à l'abstraction prématurée, à la négligence et à l'oubli (mépris implicite) du monde réel. L'enseignement qui en résulte devient en quelque sorte stérile, se développant dans une atmosphère d'autant plus pure qu'elle est plus raréfiée.

Le mécanisme logique n'est qu'une phase intermédiaire dans la résolution des problèmes quantitatifs de la philosophie naturelle, certainement essentielle, mais elle doit être précédée d'une phase de schématisation ou d'abstraction et suivie d'une autre phase de concrétion ou de projection à nouveau sur le plan réel.

On a négligé dans l'enseignement traditionnel des Mathématiques l'exercice simultané de ces deux phases antérieure et postérieure signalées :

Il me semble que cet oubli est une des causes les plus sensibles de l'échec de cet enseignement. Nous oublions trop souvent que les notions et les opérations mathématiques ont eu leur origine dans des processus d'abstraction et de schématisation du monde physique, et que la logique n'a pu mouvoir les pièces de ces schémas qu'une fois les abstractions faites, sans pourtant qu'elle nous apprenne à les faire. Abstraire du monde physique le substratum mathématique des phénomènes n'est pas une question à résoudre en jouant aux syllogismes, mais plutôt en maîtrisant l'intuition de l'essentiel. L'outil logique vient après, ce qui ne diminue pas son importance.

De même, c'est en projetant de nouveau au champ physique d'origine les résultats de cette élaboration abstraite qu'on a pu juger, non seulement la vraisemblance des intuitions hypothétiques, mais aussi la validité des théories qu'on a édifiées sur ses bases. Il est donc également important d'éduquer l'élève, dès le premier instant, à pratiquer aussi cette opération que nous avons appelée concrétion, si nous voulons éveiller ses facultés de contrôle et éviter l'insensibilité (malheureusement si fréquente) aux résultats physiquement absurdes.

Pour la plupart de nos élèves, les Mathématiques ne constituent pas un but en soi-même, mais plutôt un instrument, un moyen d'envisager leurs problèmes vivants futurs. Leur éducation mathématique complète ne consistera donc pas à leur montrer

---

(*) Résumé de la conférence donnée par M. PUIG-ADAM à la séance d'ouverture de la XI[e] Rencontre de la C.I.E.A.E.M. (Madrid, 21 avril 1957).

le mécanisme de cet instrument dans le vide, mais à cultiver parallèlement le sens d'application sous les deux activités d'abstraction et de concrétion qui précèdent et qui suivent ce mécanisme et qui lui fournissent le matériel élaboré et l'interprètent. L'absence de ce souci donne une activité mathématique restreinte dont les dégâts ne peuvent avoir remède *a posteriori* par l'addition des exercices dits d'application. C'est dès l'origine même de l'enseignement qu'il faut prévenir le mal en attaquant le problème génétique de la formation des abstractions et le problème de l'adaptation ultérieure de celles-ci à d'autres champs de réalité.

La perception et l'action semblent constituer le binôme de l'apprentissage. Avec son double jeu, l'enfant, et aussi l'adulte (enfant en somme pendant qu'il apprend), élabore les concepts et les relations qui deviennent valides pour des classes de plus en plus générales. Et si, à l'origine, le concret est le monde perceptible sur lequel on agit pour obtenir les idéalisations premières, c'est sur ces idéalisations que l'on édifie les généralisations ou abstractions suivantes, qui sont à leur tour, la base concrète pour de nouvelles constructions abstraites.

Le concret et l'abstrait ne sont donc pas des termes absolus, mais plutôt relatifs en fonction du saut de chaque stade au suivant. On ne peut donc parler en tout cas que de hiérarchies d'abstraction croissante et de concrétion décroissante.

Dans ces processus d'abstraction mathématique la symbolisation a joué un rôle décisif. C'est la condensation symbolique et la formalisation du raisonnement mathématique qui ont rendu possible la formidable progression d'abstractions et de généralisations qui constituent les Mathématiques depuis Viète jusqu'à nos jours. La forme est devenue à la fin dominante sur le concept. La science mathématique qui commença en dépouillant le monde physique de ses attributs sensoriels pour en édifier les premiers contenus, a fini en se dépouillant elle-même, et se trouve réduite aux squelettes structurels pragmatiques qui les relationnent. Nous ignorons l'origine et la fin de tout ce processus d'abstractions croissantes. Nous savons quand même que le monde physique et social qui évolue parallèlement, stimule de temps en temps ce processus en suggérant des notions abstraites nouvelles, notions que le mathématicien élabore en concepts et combine en en créant de nouveaux ; nous savons aussi que ce même monde physique bénéficie *a posteriori* des créations abstraites en leur trouvant de nouvelles adaptations insoupçonnées. Aucun professeur de Mathématiques ne doit oublier cette monumentale symbiose entre les Mathématiques et la philosophie naturelle.

*
**

Nous commençons aujourd'hui les tâches de notre onzième rencontre dont le thème est l'étude du matériel moderne de l'enseignement des Mathématiques. Ce matériel, vu par le mathématicien situé du côté le plus abstrait de la chaîne, ne sera considéré que comme un ensemble de simples illustrations concrètes, comme des vêtements convenables pour faciliter momentanément une compréhension malaisée. mais pour l'éducateur qui n'oublie pas la perspective des processus initiaux d'abstraction, ce matériel est beaucoup plus, il représente quelque chose de substantiel dans sa fonction éducative. Ce matériel structuré sous forme de modèles a, non seulement l'objet de traduire occasionnellement des idées mathématiques, mais aussi de les suggérer, et d'être à leur origine. Il faudra étudier les modèles les plus convenables à cet objet et aussi les matériaux les plus ductiles pour sa réalisation. Mais puisque la perception et l'action sont fondamentales dans toute éducation mathématique, il faudra faire en sorte que les modèles soient capables de provoquer l'une et l'autre, de façon à traduire ou à suggérer en créant des situations actives d'apprentissage. L'ancien modèle de vitrine, passivement contemplé par les élèves, devra faire place à du matériel multivalent de conception nouvelle, matériel qui puisse être manipulé par les élèves en déterminant une activité créatrice de la connaissance qu'ils doivent

acquérir. Dans la vie même, dans les jouets, on peut trouver souvent des modèles mathématiques d'une efficacité insoupçonnée. Et tant mieux si cette activité se manifeste par la création de nouveaux modèles imaginés par l'élève lui-même, car il exercera ainsi, non seulement la concrétion de l'idée mathématique qu'il veut illustrer, mais aussi, en présentant son modèle à ses compagnons d'étude, il devra penser à ce qu'il soit capable de suggérer chez eux l'abstraction dont il est parti. Voici comment la confection de modèles peut être le véhicule naturel et efficient pour la pratique heureuse des deux activités d'abstraction et de concrétion que nous venons de signaler comme parties intégrantes d'une activité mathématique éducative complète.

Et, maintenant, à notre tâche avec foi ! Pensons au bonheur possible qu'elle peut apporter à des milliers d'enfants qui souffrent encore en étudiant les Mathématiques. L'espoir de leur libération encouragera notre effort.

Pedro PUIG-ADAM,
(*Membre de l'Académie des Sciences d'Espagne*).

XI[e] Rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques

Au soir du 21 avril, une quarantaine de professeurs de Mathématiques : Allemands, Anglais, Autrichiens, Belges, Français, Italiens, Portugais, Suisses, Uruguayens, Yougoslaves, se réunissaient sous la présidence de M. G. CHOQUET, professeur à la Sorbonne, et de M. C. GATTEGNO, de l'Université de Londres, à l'Institut San Isidro de Madrid, et y étaient accueillis par le professeur P. PUIG-ADAM. Celui-ci, en une Conférence inaugurale, prononcée successivement en espagnol et en français, indiquait l'objet de la rencontre : Comment redonner au concret et aux méthodes intuitives dans l'enseignement des Mathématiques la place qu'ils ont eue et ont toujours dans le développement historique des Mathématiques et dans la pensée individuelle du chercheur, et redonner du même coup à l'abstraction sa vraie signification, celle d'une activité mentale qui s'exerce à partir d'une situation concrète, la schématise, en prolonge les virtualités, en extrait des structures générales qui permettent la prévision et le projet de nouvelles réalisations concrètes.

Dès le lendemain, les participants, auxquels s'étaient joints en nombre à peu près égal des Collègues espagnols, se répartissaient, non sans regrets, en groupes de travail et les équipes ainsi formées devaient se retrouver chaque jour, de 10 heures à 12 heures, et de 17 heures à 19 heures, pour un travail commun.

Un groupe, sous la direction de MM. FLETCHER et HARRIS, s'initiait à la fabrication de films mathématiques. Après un exposé de M. FLETCHER sur les principes de la réalisation de dessin animé par deux méthodes : dessin à l'encre de Chine sur cellophane, et photographie d'un dessin découpé que l'on déplace, cinq sous-groupes de travail de cinq à six personnes furent constitués : trois correspondants aux réalisations possibles pour des enfants de moins de 14 ans, de 14 à 18 ans, et à un niveau supérieur sous les directions respectives d'un Collègue espagnol, de Mlle FÉLIX, et de M. CHOQUET ; un quatrième sous-groupe, sous la direction de M. WALUSINSKI, étudia la réalisation d'un film en couleurs sur les ensembles, et un cinquième, avec M. DELMOTTE (Belgique), l'animation d'une partie découpée. Le travail réalisé au cours des séances aboutit à l'invention d'un scénario, à l'étude précise des difficultés techniques de sa réalisation, et, pour les groupes 1, 2, 5, à un début de réalisation effective sur cellophane. On ne pouvait espérer mieux en si peu de temps d'équipes internationales qui avaient à vaincre la difficulté de se comprendre. Avec une opportunité remarquable, M. FLETCHER apparaissait dans chacun des groupes au moment précis où celui-ci venait de buter devant une difficulté technique dont il

l'aidait à sortir. Une séance de conclusions permit aux participants de constater qu'ils avaient compris le but à atteindre et avaient des idées précises sur sa réalisation technique. Le groupe belge pense essayer ces réalisations.

Pour l'ensemble des Congressistes, auxquels se joignaient alors une centaine de Collègues espagnols, des présentations de films eurent lieu d'ailleurs presque chaque jour à midi et à 18 heures. Films très différents dans leurs buts comme dans leurs réalisations. Mr. PAULS (Wurtemberg), en filmant quelques séances de travail de ses élèves, a pu nous montrer comment, avec les moyens habituels de la craie et du tableau, quelques ventouses, une ficelle, une tige de fer mobile, on peut animer de figures au tableau et réaliser la génération des coniques, le tracé de familles d'ellipses homofocales, une développante de cercle et une étude du déplacement de l'image d'un objet dans une lentille. Des films réalisés par la Direction de l'Enseignement Technique français : Engrenages, Fraiseuse universelle, apparurent comme un moyen de choix pour aider des techniciens à comprendre les relations géométriques réalisées dans un mécanisme industriel, et inversement, aux mathématiciens trop théoriques, à retrouver leurs connaissances abstraites dans ces réalisations.

M. J.-L. NICOLLET, de Lausanne, qui a consacré 20 ans de sa vie à la conception et à la réalisation de films d'enseignement utilisés et commentés en classe, présentait des films sur la génération des coniques, sur la Section d'Or et sur la Strophoïde Une telle impression de beauté se dégageait de ce dernier, que certains spectateurs évoquèrent à son propos un choral de Bach, tandis que les élèves de M. SERVAIS, à qui il a été présenté, ont cherché et trouvé un Prélude de Lizst, dont la correspondance avec le film comblait leur joie esthétique.

Trois films de M. FLETCHER, passés sans commentaires ni sous-titrages : Cordes vibrantes, Droite de Simson, Cardioïde, sont de véritables études de problèmes et réclament du spectateur un travail de réflexion très sérieux pour lequel l'expérience montre que les élèves ont plus d'aptitude que les professeurs...

Après tous ceux-là, les films de M. JACQUEMARD font d'autant plus regretter leur défaut : trop de « texte » sous forme de lettres mobiles que la beauté des formes, si elles étaient laissées à leur pureté, égale par la perfection de l'animation, celle des films de M. NICOLLET.

Une autre partie des Congressistes, elle-même divisée en deux groupes, participa à une étude de l'emploi des modèles. Sous la direction de M. SERVAIS (Belgique), les « débutants » furent initiés à la confection de modèles matériels à partir de matériaux très simples : aiguilles à tricoter, pâte à modeler, élastique, bouchons, ou de matière plus riche : acétophane, tiges de fer, soudure. Il ne s'agissait pas évidemment d'un cours de bricolage, mais, tout d'abord, de montrer aux professeurs la possibilité de fabriquer des modèles pour qu'ils n'hésitent plus à le conseiller à leurs élèves, et surtout, de leur faire découvrir par eux-mêmes, au cours de cette fabrication, son intérêt pédagogique, les problèmes théoriques que posent à l'élève, par exemple, les différentes façons de construire le développement d'un cube ou le pavage d'un plan à l'aide de triangles réguliers ou quelconques. L'autre sous-groupe, dirigé par le professeur PUIG-ADAM, assisté de M. IBARRA de Valladolid et M. GALLI, inspecteur à Montevideo, avait reçu pour tâche, après avoir visité à fond la très belle exposition installée dans une des galeries de l'Institut, de dégager les leçons et les orientations d'avenir de l'expérience de l'utilisation des modèles concrets, faite par des Collègues des différents pays. Donner en quelques lignes une idée de la richesse de cette exposition est impossible. Ceux de nos Collègues qui ont vu, à Sèvres, en novembre 1956, le matériel belge, se souviennent, non seulement de la beauté des réalisations, mais surtout des possibilités d'utilisation pédagogique des matériels mobiles destinés à illustrer, ou, mieux, à suggérer des problèmes de lieux, de générations de surfaces réglées, de compositions de transformations, de logique, et leur résolution. Mr. PAULS exposait une sphère armillaire partiellement démontable et dont

la richesse d'utilisation pour l'étude de la trigonométrie sphérique, puis de la cosmographie, n'a d'égale que la modicité de son prix de revient. M. SCHILT (Suisse), présentait une règle à calcul à spirale et des modèles de petites machines à calculer dont l'intérêt pédagogique consiste dans le fait que son emploi réclame une réflexion analogue à celle que nécessitent le calcul mental et l'utilisation des propriétés des opérations. La participation britannique offrait des réalisations aussi originales que simples de cartonnages mobiles pour l'enrichissement de l'expérience de l'espace. La France, et son Enseignement Technique, était représentée par la riche collection de M. BIGUENET, déjà familière aux participants des stages de Sèvres. Certains de ces modèles ont inspiré à M. FLETCHER et M. HARRIS des scénarios de films. Particulièrement abondante et instructive était la participation espagnole. Nous ne pouvons que citer trop vite et avec des lacunes les dispositifs d'illustrations des variations de fonction trigonométriques, et pour résoudre les systèmes du premier degré, de M. DIEGUEZ (Galicie), le matériel si simple pour une initiation à la similitude des triangles de M. IBARRA. Et surtout les modèles et les récits d'expériences si variés et si riches du professeur PUIG-ADAM, depuis le spectaculaire icosaèdre géant suspendu au-dessus de la cour d'honneur de l'Institut par de grands élèves à qui furent posés pour cela des problèmes de statique et de topologie, jusqu'aux exemples d'utilisation multivalente de matériels déjà connus : bâtonnets Cuisenaire, par exemple, ou tout simplement du matériel offert par tous les objets de la vie courante : parapluie, lutrin, espagnolette, à qui sait y voir les structures mathématiques sous-jacentes. D'une telle visite on revient convaincu que l'utilisation d'un matériel n'est pas un bricolage, mais un constant appel à l'activité mentale de l'enfant qui, pour s'exprimer d'abord par un geste, une activité manuelle réfléchie, n'en est pas moins pensée authentique ; le passage à l'expression orale puis écrite, élaborée à partir de situations concrètes étant d'autant plus aisé que le vocabulaire recouvrira alors des notions assimilées par tout l'être. Par cette méthode active et intuitive l'enfant peut être amené aisément à l'expérience des notions de relations et structures qui sont à la base de l'algèbre moderne. L'intérêt de modèles bien conçus pour susciter la pensée et l'effort créateur est tel que, souvent, un matériel préparé dans un but déterminé, révèle par la suite des possibilités insoupçonnées. L'expérience des pionniers montre que le meilleur matériel pédagogique est celui qui est le moins spécialisé, le plus dépouillé, donc le plus riche de possibilités de toutes sortes, le plus apte aussi à révéler la simplicité des idées abstraites. Le matériel est ainsi une première étape vers l'abstraction avant celle qui s'exprimera en un langage de symboles. Il y a d'ailleurs toute une pédagogie du modèle : il n'est pas bon de rester plus longtemps qu'il n'est nécessaire à une étape donnée ; le plus vite possible, au concret réel, doit se substituer le concret imaginé, puis au-delà de l'imaginé, le pensé « passage du réel au possible, de l'actuel présent à toutes les virtualités », comme le disait M. SERVAIS au cours de la discussion clôturant, le 26 avril, le compte rendu des travaux des différentes équipes.

D'ailleurs, des classes expérimentales faites avec des élèves des écoles de Madrid et des lycées italien et français, par Mlle CASTELNUOVO, M. GALLI, M. GATTEGNO, M. PUIG-ADAM et M. SERVAIS, permirent de voir à l'œuvre, avec des élèves d'âges différents (8 à 17 ans), et vécue par des tempéraments divers, cette pédagogie du modèle, et d'en discuter. Et n'est-il pas vrai, pour ceux qui eurent la joie de l'entendre, que la Conférence de M. CHOQUET, devant l'Académie des Sciences de Madrid, sur la « Théorie moderne du potentiel », fut un exemple magnifique, sinon de l'emploi de modèles, du moins de celui de la métaphore pour une initiation intuitive aux théories les plus abstraites ? Si le professeur est lui-même convaincu que son contenu mathématique est la loi de la beauté du monde, et que ce contenu doit être senti, vécu et agi avant d'être proféré dans un langage, puis devenir créateur dans la technique et dans l'art, il saura, à travers son propre tempérament et celui de chacun de ses élèves, trouver à chaque instant la juste attitude pédagogique. C'est à

ce beau travail, créateur à sa manière, qui n'est pas celle du chercheur, que nous conviait M. SERVAIS dans sa dernière intervention.

Si nous ajoutons qu'à la richesse de tels échanges de vues se sont ajoutées des excursions à l'Escurial, à Tolède, des visites au Musée du Prado et, par-dessus tout, la joie d'échanges amicaux au cours des conversations, des chants, des soirées en commun, la rencontre de personnalités originales et riches autant que simples dans leur accueil, si nous disons surtout la chaleur, la délicatesse de l'accueil de nos Collègues espagnols, du professeur PUIG-ADAM, surtout, dont la bonté souriante alla jusqu'à transformer le dernier soir le pédagogue en brillant prestidigitateur, si nous disons l'expérience que nous avons tous faite que notre beau métier d'enseignants et les Mathématiques créent par-dessus les frontières une internationale de la pensée et du cœur, comme le dit M. WALUSINSKI à la séance d'adieu, nous aurons du même coup dit notre gratitude à la Commission internationale et à son Secrétaire, M. GATTEGNO, dont le dévouement nous a préparé et fait vivre de si belles vacances.

T. VERVAECKE (Lille, *Fénelon*).

TRAVAUX PRATIQUES ET TRAVAIL DIRIGÉ

(suite)

Depuis la publication, sous ce titre, d'une note dans notre *Bulletin* de juin 1957, de nouvelles instructions ont été publiées (cf. p. 65). En même temps, le débat ouvert entre nous sur la formule *travail dirigé*, et l'idée des *travaux pratiques* s'est élargi. Je remercie les Collègues qui ont bien voulu nous envoyer leurs témoignages sur la question.

Je me contenterai ici de quelques brèves remarques :

1° Qu'il s'agisse d'individualiser la direction de travail que comporte toute classe active ou de susciter l'activité libre des élèves pour qu'ils se posent eux-mêmes les problèmes qui motiveront ensuite leur travail mathématique, il faut souhaiter qu'un jour ces méthodes puissent être mises en jeu réellement, c'est-à-dire avec des classes de 25 élèves (et non 40 au plus). Mais il serait utopique d'attendre cela pour demain.

2° Il faut donc aménager horaires et locaux actuels pour profiter au mieux des conditions qui nous sont laissées. La souplesse des instructions doit permettre, à mon avis, à chaque professeur, d'adapter ses méthodes à ses propres possibilités. L'inspiration des travaux pratiques motivant l'introduction d'une notion nouvelle ou exploitant de nouvelles connaissances sera donc adaptée aux élèves et aux professeurs. Les témoignages présentés ici montrent déjà cette diversité. Nous continuerons la publication d'autres exemples, car nous entendons prouver qu'il existe une variété inépuisable de façons de susciter chez nos élèves l'ardeur mathématisante...

3° Je rectifie quelque peu ce que j'écrivais dans le *Bulletin* 185 sur l'avantage de l'expression « T.P. » pour obtenir à leur fin un horaire spécial. A la réflexion, et en considérant quels efforts il nous a déjà fallu dépenser pour obtenir... trois heures hebdomadaires, je me demande si nous ne devons pas montrer que l'amélioration globale de l'horaire permettra d'insérer, aux moments bien choisis, les exercices pratiques dont on a toujours dit qu'ils étaient à deux fins : préparation motivée de l'abstraction, et application des connaissances théoriques à la réalité.

Mais je ne supprime rien de ce qui a pu être dit ou écrit quant au matériel et à des locaux spécialisés. La réunion des essais, des initiatives de tous, emportera la conviction des sceptiques. Continuez, chers Collègues, à transmettre vos idées et

suggestions ; notre dossier est déjà trop riche pour que nous ne fassions pas un choix. Mais toutes les idées utiles finiront par servir. Merci à tous nos correspondants.

G. W.

Le travail dirigé en mathématiques dans les classes de 6e et de 5e

Le travail dirigé est une des innovations les plus heureuses et les plus fructueuses par lesquelles se sont caractérisées les classes nouvelles, puis les classes pilotes. En une dizaine d'années de pratique, nous n'avons sans doute découvert qu'une partie des buts qu'on peut lui assigner et des méthodes que l'on peut suivre ; le problème le plus embarrassant est d'exposer ces découvertes, non seulement parce qu'elles sont incomplètes, mais surtout parce que la forme du travail dirigé en Mathématiques varie d'une année à l'autre, d'une partie de programme à l'autre, et, sur les mêmes points du programme, d'une classe à l'autre, car la direction de travail est essentiellement une adaptation de chaque élève à l'enseignement qu'il reçoit.

Nous ne pouvons ici que nous limiter à l'essentiel en présentant, plus comme illustration que comme documents exemplaires quelques-uns des exercices que nous avons pu faire au cours des deux dernières années dans les classes de 6e et 5e du Lycée de Toulouse-Bellevue. Le lecteur voudra bien nous excuser de « l'exposé des motifs » que nous lui infligeons tout d'abord, ainsi que des indications très générales que nous avons données avant les exemples précis : ces derniers ne prennent leur véritable sens que si on peut les replacer dans une vue d'ensemble du travail dirigé en Mathématiques. C'est pourquoi nous en exposerons successivement :

Les buts.

L'organisation matérielle.

Les diverses formes.

La variété de ces formes en fonction du déroulement du programme au cours d'une année scolaire.

Enfin, quelques exemples.

Tout ceci n'est, bien entendu, que l'exposé d'un point de vue personnel, et non pas une interprétation officielle des instructions qui laissent à chaque professeur la plus grande liberté dans l'organisation et l'utilisation de cette activité.

Buts du travail dirigé.

1° Donner une méthode de travail aux élèves.

2° Surveiller, contrôler, diriger et aider l'assimilation des notions nouvelles et leur mise en œuvre dans les problèmes.

3° Déceler assez tôt les difficultés rencontrées par chaque élève et l'aider à les surmonter.

4° Parallèlement, information du professeur :

a) sur les aptitudes, les conditions de travail et le caractère de chaque élève (connaissance très utile pour l'élaboration des dossiers scolaires) ;

b) sur les réactions de la classe à l'enseignement reçu ; le travail dirigé permet ainsi au professeur un auto-contrôle et une régulation de sa propre activité.

5° Eviter les « naufrages » lors d'un changement d'établissement ou après une absence en donnant à l'élève retardé des exercices correspondant à son niveau actuel et des explications destinées à accélérer le rattrapage.

LES GROUPES D'ÉLÈVES.

Le travail dirigé se fait par demi-classes ; le plus souvent une moitié des élèves est en T.D. mathématiques pendant que l'autre est en T.D. français, la permutation se faisant à l'heure suivante.

Deux possibilités pour la répartition des élèves :

A) Groupes de niveau homogène (gr. fort, gr. faible), avec révision mensuelle de la répartition.

B) Groupes d'élèves de niveau différent.

Les deux ont leurs avantages et leurs inconvénients :

A) Les groupes homogènes permettent un travail plus unifié. Le groupe des forts fait en général plus d'exercices que l'autre ; on peut aborder avec lui des exercices plus délicats et souvent plus formateurs. Avec le groupe des faibles, on peut reprendre certaines explications sous forme collective et ainsi gagner du temps ; on peut passer plus de temps au montage des automatismes sans crainte de retarder les mieux doués.

Mais le classement en forts et faibles ne correspond pas nécessairement d'une discipline à l'autre ; il peut aussi gêner certains collègues d'autres disciplines qui tiennent à des groupes de niveaux variés ; en outre, on peut, si l'on n'y prend garder, accentuer le décalage entre forts et faibles.

B) Dans les groupes non homogènes, les faibles sont souvent stimulés, voire entraînés par les forts. On peut consacrer plus de temps par séance à chacun des élèves faibles, l'intervention auprès des forts se bornant le plus souvent à un simple contrôle ou une brève explication. La discrimination entre forts et faibles n'étant plus publique, on ne risque pas de provoquer certains découragements ou certaines blessures d'amour-propre. Cependant, l'action du professeur est plus complexe et demande plus de temps. On n'a plus guère la possibilité de recourir à des explications collectives : les élèves forts risquent de piétiner. Ce dernier inconvénient est évité si on prend soin de proposer des séries d'exercices de difficulté croissante. Chaque élève va alors jusqu'où ses possibilités lui permettent d'aller. Il n'en reste pas moins que les meilleurs ont souvent à traiter des exercices qu'ils jugent trop faciles pour eux ; mais est-ce vraiment un inconvénient ?

LES DIVERS TYPES D'EXERCICES.

1) Exercices à forme de tests destinés à nous renseigner en début d'année :

a) sur les connaissances ;

b) sur les aptitudes de chacun.

2) Exercices de rattrapage destinés à revoir une question mal assimilée et que la classe a dépassée depuis longtemps.

3) Exercices de réflexion et de raisonnement sur des notions nouvelles entraînant le maniement de relations simples (ex. poids spécifique, mouvement uniforme, problèmes sur les fractions).

Ces exercices se font sur fiches (trois ou quatre exemplaires pour chacun).

4) Résolution de problèmes en commun, ou simplement analyse de l'énoncé, en commun (énoncés tirés du livre).

5) Montage d'un automatisme nouveau : dans une première séance nous laissons, soit la règle, soit un exercice type à la disposition des élèves. Pour les autres séances, ils n'ont aucun document à leur disposition (ex. conversion grades-degrés, opérations sur les fractions).

QUELQUES EXEMPLES (*) :

I. (Classe de 6e). Exercices de révision et d'approfondissement des notions vues en 7e et destinés à entraîner les enfants à l'utilisation d'un brouillon, à la disposition du travail à la lecture de l'énoncé, à la construction et à l'utilisation de croquis, graphiques, figures géométriques simples (dans les cas difficiles, construction en commun), à la rédaction des solutions. A cette occasion, recherche des lacunes en calcul, surtout multiplication et division des nombres décimaux.

Exercices de réflexion et de raisonnement sur la reversibilité des relations ; passage de $P = V.D$ à $V = P/D$ et $D = P/V$ sans utilisation de formules, mais par raisonnement à partir de la définition du poids spécifique.

II. *Exercices à valeur de tests* (Classe de 5e).

1) Soient les nombres a, b, c, x ; on a $c = x$; $a < b$; $b < c$. Que peut-on dire de a et x.

2) Soient les nombres a, b, c, e. On a : $a < b$; $b > c$; $a > c$; $e < c$. Classer ces nombres dans l'ordre croissant.

3) a, b, c, sont des nombres entiers. On a : $a < 9$; $b > 5$; $a > b$; $c < a$; $b < c$. Quelle est la valeur de c ?

4) Soit le nombre 3825. On intercale un zéro entre le chiffre des unités et celui des dizaines et un zéro entre celui des centaines et celui des unités de mille. Quels sont les chiffres dont la valeur relative a changé ? Indiquer l'ancienne et la nouvelle valeur relative.

III. Exercices sur fiches pour plusieurs séances. Exemple (classe de 6e). Le treuil cylindrique où s'enroule la corde d'un puits a 0,3 m de diamètre. Il faut 20 tours pour que la corde atteigne l'eau et 25 pour qu'elle touche le fond. Quelle est la hauteur de l'eau contenue dans le puits ?

IV. Exercices destinés au montage d'automatisme par application de propriétés qui viennent d'être étudiées (classe de 5e ; préparation au calcul algébrique).

L. NOT (Toulouse, *Bellevue*).

Deux exemples en classe de 6e

Sur l'aire du triangle, traitée dans une leçon récente :

1° Dessiner sur feuille volante un triangle ABC à angles aigus, la base BC étant disposée le long des lignes horizontales de la feuille. Tracer la hauteur AH correspondante. Exprimer l'aire.

— Découper, puis faire tourner le triangle de façon à disposer CA le long des lignes horizontales de la feuille. On est amené à tracer la hauteur relative à CA. Nouvelle expression de l'aire.

— Même opération en prenant le troisième côté comme base.

1re conclusion : les trois expressions possibles de l'aire.

2e conclusion : rôle équivalent joué par chacun des trois côtés.

2° Essayer de retrouver les mêmes conclusions sans découper le triangle, en traçant les trois hauteurs sur la même figure (exercice difficile pour la majorité des élèves).

3° Les meilleurs élèves, qui auront réussi le 2°, pourront aborder le cas où le triangle a un angle obtus, vu dans diverses positions ; puis le cas limite de l'angle droit.

(*) La rédaction s'excuse d'avoir dû faire un choix (très arbitraire), dans la longue suite d'exemples présentés par notre Collègue.

(On peut imaginer une leçon du même genre sur le parallélogramme, pris de diverses formes et dans diverses positions).

Sur les unités de temps.

— Question du professeur : Quelles sont toutes les manières possibles d'exprimer une heure et demie ?

— Réponses : 1 h 30 mn ; 90 mn.

— Q. : Et en nombre décimal ?

— R. (peut-être) : 1,5 h.

A ce moment des élèves réagissent toujours : Le maître nous a appris à ne *jamais* employer de virgules dans les nombres exprimant des temps.

Réponse du professeur : Le maître avait bien raison, vous auriez fait des confusions. Mais l'étape suivante consiste à utiliser les nombres décimaux.

Exercices de passage des nombres en h et mn aux nombres décimaux et passage inverse dans les cas simples suivants :

1er cas : les demies, quarts et trois quarts.

2e cas : les nombres de 6 mn en 6 mn comportant un seul chiffre décimal.

3e cas général : multiplication ou division par 60.

4e. On peut donner une idée des 1/3 et 1/12 d'h, utiles pour les classes suivantes, mais à la limite du programme.

Malgré cette leçon, une partie importante des élèves (la moitié) continue à préférer l'emploi des minutes, même dans les cas simples, je les laisse faire en attendant qu'ils aient acquis un peu plus de matûrité.

Mme Snyders (Lille, *Faidherbe*).

Le sport au service des mathématiques

(*Classe de 6e*)

1er *exemple :* La course de 400 mètres.

A la suite de la projection d'un film sur le sport, j'ai été amenée à faire étudier à mes élèves la façon de calculer les *handicaps* à donner à des coureurs se déplaçant sur une piste (longueur de la ligne droite, 100 m ; diamètre intérieur du virage, 70 m ; largeur de la piste 1,5 m).

Texte : La figure représente les lignes suivies sur une piste de course par deux coureurs A et B (A se déplaçant sur la ligne intérieure). La course est de *400 m.*

1° Le coureur A part de la position appelée A. En quel point terminera-t-il la course ?

2° On veut que le coureur B arrive sur la même « ligne d'arrivée » que A. Quel handicap faut-il lui donner au départ ? marquer sur la figure son point de départ.

3° Calculer les handicaps pour un troisième coureur, un quatrième, etc... Quelle remarque fait-on ? Ne peut-on en déduire une façon simple de calculer, une fois pour toutes, les handicaps, étant données les dimensions de la piste ?

(On peut compliquer le problème, et le rapprocher de la réalité, en remarquant qu'à chaque coureur est affecté un *couloir* (et non une ligne) dans lequel il parcourt théoriquement la ligne équidistante des bords.

2e *exemple :* Sur une photographie, un joueur de volley-ball est surpris au moment où il saute et frappe le ballon :

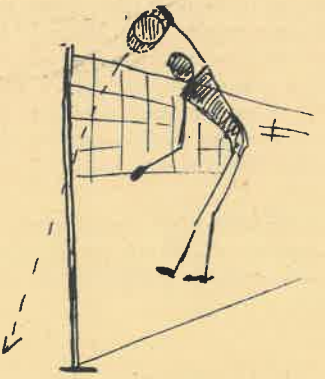
1) Observer sur la photo la forme de l'image de la balle. En chercher une explication (on voit un ovale à peu près net, prolongé de part et d'autre par un « flou »).

2) Mesurer sur la photo la « largeur » de cet ovale, puis sa « longueur » (y compris le flou).

3) Mesurer le vrai diamètre de la balle (pied à coulisse, ou, cette approximation suffira, projection sur le tableau noir).

4) Peut-on en déduire la distance parcourue par la balle pendant la durée de la prise de vue, soit 1/250 de seconde ?

5) Calculer en m/sec la vitesse de la balle (vitesse supposée constante), puis le temps mis par la balle pour toucher le sol, son trajet étant évalué à 3 m (hauteur du filet 2 m 43).



Pour des exercices de ce type, il peut être demandé aux élèves de rechercher eux-mêmes les données numériques nécessaires à la solution. On confronte les renseignements recueillis ; on les critique avant d'adopter, avec l'accord de tous, ceux qui seront finalement retenus.

Mme Dufau (*Mende*).

Puzzle logique

Travail donné en 4e ; durée 1 heure. — Les élèves reçoivent chacun six papiers conformes au modèle ci-dessous, numérotés arbitrairement de 1 à 6 et représentant la solution d'un problème, mais découpée en phrases mêlées dans un ordre quelconque.

(1) Pour les mêmes raisons, dans le triangle ADC : PN//DC et $PN = \frac{DC}{2}$.

(2) Enfin $PM = PN + NM = \frac{AB + CD}{2}$ et $QN = PN - PQ = \frac{CD - AB.}{2}$

(3) De même, dans le triangle ABD, PQ joint les milieux de DA et DB, donc PQMAB et $PQ = \frac{AB}{2}$.

(4) Comme AB//DC, MN et PN sont en prolongement l'un de l'autre, P, N, M sont donc sur une même droite parallèle à AB.

(5) Dans le triangle ABC, MN joint les milieux des côtés CB et CA donc PQ//AB et $PQ = \frac{AB}{2}$.

(6) PQ//AB est porté par la droite PNM ; autrement dit, les quatre points PQNM sont alignés.

Il s'agit :

— de remettre les phrases dans l'ordre logique ;

— de faire la figure correspondante ;
— de composer le texte du problème.

RÉSULTATS :

L'ordre logique (5-3-1-4-6-2). est trouvé *rapidement* par la plupart des élèves en s'aidant des « mots de liaison » (on se dit bien que « enfin » ou « de même » ne peuvent pas occuper la première place).

La figure offre de sérieuses difficultés ; les élèves partant de la phrase 1 tracent le triangle ABC, mais ils placent ensuite D au hasard ; les plus réfléchis disent qu'ils ne savent où le placer ; les plus imaginatifs dessinent tout de suite un parallélogramme ABCD. Enfin, peu à peu, ils se décident à *relire* toute la solution et la phrase 4 les éclaire. Mais D a encore deux positions possibles par rapport à C, la plupart essayent les deux positions et confrontent les deux figures avec la suite de la solution. Seuls, quelques-uns étudient avec assez de soin la phrase 2, pour s'apercevoir qu'elle exige CD $>$ AB.

Le texte est ce qui semble présenter pour certains d'entre eux la plus grande difficulté. Beaucoup se contentent de suivre pas à pas la solution et de poser les questions correspondantes ; très peu parviennent à ne retenir que l'essentiel. Quelques exemples de textes recueillis :

Un des meilleurs :

« On trace un trapèze ABCD, AB est la petite base et CD la grande. On prend les milieux des côtés obliques et des diagonales. Démontrer que ces quatre points sont en ligne droite sur une même parallèle aux bases. Comparer les segments formés à la somme et à la différence des bases. »

Un des plus longs :

« Tracer un trapèze ABCD et ses diagonales, prendre les milieux N de AB, M de BC, P de AD et Q de BD.

1) Comparer MN et PQ à AB.
2) Dans le triangle ACD étudier le segment PN.
3) Démontrer que PNM est une droite // à DC.
4) Démontrer que PQNM sont alignés.
5) Quelles sont les valeurs de QN et PM en fonction de AB et CD ? »

M. CLAVIER (*Sèvres*).

LES MÉTHODES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ASTRONOMIE AU LYCÉE

par le Professeur M.-E. NABOKOV

Traduit du russe par V. KOURGANOFF,
professeur d'astronomie à la Faculté des Sciences de Lille

INTRODUCTION

Le texte ci-dessous représente une traduction abrégée d'une partie du remarquable livre du professeur NABOKOV, *sur la pédagogie de l'enseignement de l'astronomie dans les Lycées et Collèges. Cet ouvrage, qui en est à sa seconde édition, en 15.000 exemplaires, est le fruit d'une très longue expérience. Il se distingue par l'ingéniosité des méthodes proposées et par la simplicité des moyens matériels qu'il s'agit de mettre en œuvre. Comme tel, il se recommande à ceux de nos Collègues français qui désireraient rendre l'enseignement de l'astronomie plus concret, sans pour autant passer tout leur temps à « bricoler » des appareils compliqués.*

Les suggestions du professeur NABOKOV *sont parfois si simples qu'elles pourraient paraître naïves à certains lecteurs inexpérimentés. Mais en y regardant de plus près, on s'apercevra, je l'espère, que cette apparente naïveté cache un excellent esprit pratique, et une psychologie très fine des élèves et des professeurs. J'y ai appris personnellement beaucoup de choses très précieuses, et, le professeur* MINNAERT, *Directeur de l'Observatoire d'Utrecht, grand spécialiste de la pédagogie astronomique, qui avait attiré mon attention sur cet ouvrage, pense comme moi qu'il est unique en son genre* (1).

La partie qui n'a pas encore été traduite se rapporte à la construction, par des moyens de fortune, du matériel d'enseignement d'astronomie et à la pédagogie d'une série de questions particulières. Nous espérons pouvoir en donner également la traduction dans un avenir pas trop lointain.

Dans notre résumé, nous avons laissé de côté toutes sortes de considérations politiques, parfois fort intéressantes, de l'auteur, et nous n'avons retenu que les conseils pédagogiques, et nous bornant à ce qui nous semblait pouvoir intéresser un lecteur français. C'est ainsi que nous avons laissé de côté un historique du développement de l'astronomie en général, et plus particulièrement du développement de l'astronomie en Russie, depuis l'époque de Pierre le Grand jusqu'à nos jours. Par contre, nous avons conservé parfois des indications sur quelques particularités de la pédagogie soviétique, dont certaines sont assez caractéristiques.

V. KOURGANOFF.

I. — GENERALITES

NABOKOV rappelle d'abord que l'enseignement de l'astronomie a pour but de donner aux élèves une première notion du mouvement et de la nature des corps célestes, de la structure de l'Univers et de la place que l'homme y occupe. On doit aussi faire connaître aux élèves les méthodes de l'astronomie et les principales acquisitions de cette science.

L'astronomie est essentiellement une science d'observation. La source de nos connaissances sur les astres est constituée par les radiations captées par les instruments astronomiques. Autrefois on considérait les rayons lumineux uniquement comme une ligne géométrique qui donnait la possibilité de déterminer la direction

(1) C'est le seul livre consacré, au cours des 40 dernières années, à la pédagogie de l'enseignement de l'astronomie.

de l'astre. Le développement des connaissances concernant la nature de la lumière a permis, plus tard, non seulement de déterminer la position et le mouvement des corps célestes, mais aussi d'étudier leur état physique, leur composition chimique et divers processus de phénomènes qui s'y déroulent.

Alors que la méthode fondamentale de la physique réside dans l'expérience, en astronomie, la méthode fondamentale est l'observation. Ce n'est qu'au moyen de l'observation que l'on peut expliquer les faits, les relations causales entre les faits et que l'on peut arriver à faire la théorie des phénomènes. Dans l'Enseignement Secondaire, on ne saurait songer à exposer les méthodes de cette science dans tous leurs détails. Cependant, l'exposé des fondements d'une science ne saurait être entièrement étranger à la description de la méthode employée par la science considérée. Cette exigence est particulièrement fondamentale en ce qui concerne l'enseignement de l'astronomie dans l'Enseignement Secondaire.

Dans la plupart des matières enseignées à l'école, telles que la botanique, la zoologie, etc..., on étudie des objets suffisamment familiers aux élèves, par des observations quotidiennes, ou du moins faciles à montrer au moyen d'appareils usuels, comme cela se passe, par exemple, pour l'examen des micro-organismes au moyen du microscope. Il en est tout autrement des objets de l'astronomie qui, pour la plupart, sont insuffisamment connus des élèves et les moyens d'observation de l'astronomie leur sont généralement inaccessibles. Montrer toutes sortes de dessins et de photographies ne suffit pas. L'élève ne sera convaincu que s'il a une idée tout à fait claire de la méthode au moyen de laquelle ont été obtenus ces dessins et ces photographies. Montrer des résultats sans expliquer clairement les méthodes au moyen desquelles ces résultats ont été obtenus risque de rendre l'enseignement dogmatique et l'acceptation des vues du professeur risquerait de devenir, pour l'élève, un acte de foi.

Il faut expliquer les méthodes de l'astronomie, non seulement à l'occasion des différents documents, mais aussi lors de l'observation des astres par les élèves eux-mêmes. Il faut s'efforcer de reproduire, même dans les observations les plus élémentaires, les méthodes fondamentales de l'astronomie. Les observations scolaires permettront alors, non seulement de comprendre mieux les méthodes, mais aussi donneront de précieux renseignements sur l'application de la théorie à la pratique et, en particulier, apprendront aux élèves à s'orienter au moyen des étoiles.

Bien entendu, il faut profiter de toutes les occasions pour souligner l'héroïsme des représentants d'avant-garde de la Science dans leur lutte contre toutes sortes de superstitions, notamment à propos des grands génies de la Renaissance : Copernic, Bruno et Galilée.

Les méthodes d'enseignement de l'astronomie.

L'enseignement de l'astronomie se compose du cours du professeur, des observations qui accompagnent ou précèdent ce cours, de la résolution de problèmes et de l'exécution de travaux pratiques, de la consolidation du savoir au moyen d'un manuel et de la vérification de l'état des connaissances des élèves par le professeur.

Tous ces procédés pédagogiques sont communs à toutes les disciplines physico-mathématiques. Il faut insister, une fois de plus, sur le fait qu'en plus du contenu de l'astronomie, les méthodes de cette science doivent se refléter dans le cours du professeur. Cela veut dire que les conclusions, basées sur des faits et déduites des observations étant l'origine des principales conclusions, l'exposé de l'astronomie doit toujours partir des faits observés par les élèves eux-mêmes, ou des observations effectuées dans des observations astronomiques lorsque les observations par les élèves sont impossibles. Mais, même dans ce dernier cas, il faut expliquer aux étudiants les fondements de la méthode scientifique en s'appuyant sur l'approfondissement des observations effectuées par les étudiants eux-mêmes. Quand les étudiants ont effectué

des observations, le cours devra commencer par une brève interrogation sur les résultats des observations, par leur explication, par la correction des principales erreurs et se poursuivre par la généralisation qui pourra servir au professeur comme base de son exposé.

Si les élèves n'ont pas pu effectuer d'observations, et si l'exposé doit s'appuyer sur des données d'observations, il faudra les communiquer aux élèves de la manière la plus concrète possible, et si possible en indiquant la méthode par laquelle ces données ont été obtenues. C'est ainsi, par exemple, qu'en parlant du mouvement apparent du Soleil sur l'écliptique, il faut commencer par des notions élémentaires, telles que la grande hauteur du Soleil en été et la faible hauteur du Soleil en hiver, mais en précisant les idées par la description des observations plus précises et plus détaillées au moyen des instruments astronomiques.

Une telle introduction, dans chaque chapitre du programme, donne l'occasion, dans certains cas, d'utiliser des méthodes heuristiques d'exposition, d'activer les élèves, de donner une impulsion à leur pensée. Dans tous les cas, la leçon doit être construite sur le schéma : *observation-théorie-application de la théorie*. Il est évident que, dans les différents chapitres, les applications se présentent de manières très différentes. C'est dans l'astronomie sphérique que l'on trouve le plus grand nombre d'occasions pour expliquer la relation entre la théorie et la pratique. Pour que ces exemples soient réellement assimilés par les élèves, il faut qu'ils se présentent comme une pratique contemporaine et non un procédé pédagogique. C'est ainsi, par exemple, qu'en parlant de la détermination des latitudes au moyen des observations, on ne se bornera pas à la description d'instruments désuets, mais l'on expliquera que la détermination de la latitude peut se faire au moyen des observations de n'importe quelle étoile au moment de sa culmination, ce qui donnera l'occasion de montrer aux étudiants, ne serait-ce qu'un modèle de théodolite, de sextant, etc... c'est-à-dire des instruments modernes dont on se sert pour ce genre d'opération. De même, il faudra expliquer à cette occasion que la détermination des coordonnées équatoriales sert, non seulement à l'établissement de la structure du système stellaire, mais aussi sert de fondement à la détermination des latitudes.

Dans l'astronomie théorique, il n'est pas toujours possible, et il n'est même pas toujours nécessaire, de trouver de tels exemples. Dans cette partie de l'astronomie, on peut montrer comment l'application de la théorie à l'objet même de l'étude, permet une connaissance plus approfondie qui se traduit par des relations quantitatives. C'est ainsi, par exemple, qu'après avoir exposé la théorie de Copernic, on pourra montrer, à propos de la distance relative de Vénus au Soleil, comment la théorie de Copernic a permis de remplacer le schéma ancien de Ptolémée par un système, exclusivement fondé comme lui sur des mesures angulaires, mais dans lequel les rapports des distances des planètes au Soleil étaient facilement mis en évidence et devenaient directement mesurables. Cet avantage a d'ailleurs milité en faveur de la théorie de Copernic, ne serait-ce qu'en permettant les recherches de Képler (1). Il faut s'inspirer de la même méthode, même dans la partie astrophysique du cours. Ainsi, par exemple, si l'on est en train de décrire la structure de la Galaxie, et l'existence de son noyau central, il faut immédiatement expliquer que, de là, on pourra déduire la nécessité de la révolution de toutes les étoiles autour du centre et, par conséquent, la possibilité de déterminer la période de rotation du Soleil autour de ce centre.

---

(1) Dans le texte même de Nabokov, le système de Copernic est qualifié de « réellement matériel » et la facilité avec laquelle il permet l'évaluation des rapports des distances des planètes est qualifiée de preuve en sa faveur. Nous avons cru plus exact de substituer une autre interprétation. (*N. du T.*).

Une telle méthode d'exposition correspond également au besoin intellectuel des élèves qui veulent savoir « d'où ça sort » et « à quoi cela sert ». C'est pourquoi la séparation de la théorie et de la pratique, qui consiste à rejeter les applications pratiques vers la fin du cours, est absolument inadmissible ; ce serait tout à fait contraire à l'esprit de l'astronomie et à sa méthode.

Les considérations ci-dessus montrent que ce n'est pas seulement l'astrophysique, mais toute l'astronomie, convenablement exposée, qui peut être importante pour l'éducation des élèves, à condition que l'exposition ne soit, ni formelle, ni abstraite, mais toujours reliée à l'expérience et à la pratique.

L'histoire de l'astronomie, dans la mesure où on peut l'introduire dans le cours, est importante dans la mesure où elle montre le progrès des approximations successives vers la vérité et vers une précision de plus en plus grande de certaines caractéristiques numériques (par exemple, la parallaxe solaire). Il ne suffit pas de se borner à évoquer les noms des astronomes, il faut encore expliquer la signification de leurs découvertes. Il faut expliquer quel était le problème général qui se posait à telle ou telle époque, par qui et comment ce problème a été résolu et quelle a été l'influence de cette solution sur le développement général de la science.

La partie astrophysique du cours doit avoir pour but d'expliquer les lois de développement des corps célestes. Cette explication doit être basée sur les résultats des observations et sur les lois de la nature. On peut évidemment réunir un grand nombre d'observations, de descriptions, de photographies, mais il ne suffit pas de montrer aux élèves un grand nombre de dessins et de descriptions. Des diapositives disponibles il faut sélectionner un minimum qui correspond à la structure logique de l'exposé, qui devrait conduire par des arguments bien déterminés vers une conclusion nécessaire. Cela se rapporte également aux « tables astronomiques » qui peuvent aider considérablement dans l'exposé.

C'est ainsi qu'en parlant de la Lune, il est rationnel de montrer d'abord l'aspect de la Lune au premier quartier, puis la pleine Lune ; la carte de la surface lunaire et (avec un très fort grossissement) la région lunaire la plus caractéristique (par exemple la Mer des Pluies avec des cirques et des chaînes de montagnes), en particulier des cirques. Les données sur l'intensité du champ de gravitation sur la Lune, serviront de base pour l'explication de l'origine des formations de la surface lunaire. Il est extrêmement souhaitable que les faits énumérés devant les élèves soient, ne serait-ce que partiellement, conformes à leurs observations personnelles.

Importance des observations astronomiques effectuées par les élèves.

Les observations servent aux conclusions et aux généralisations. Ce sont des matériaux pour des déductions théoriques. Les observations sont donc nécessaires, non seulement pour rendre le cours plus vivant, elles sont nécessaires avant tout pour comprendre les méthodes fondamentales de l'astronomie et, en même temps, pour comprendre les applications pratiques de l'astronomie.

Les observations astronomiques jouent le même rôle dans le cours d'astronomie que les démonstrations et les travaux de laboratoire en physique. Cependant, les observations astronomiques ont des particularités qui les distinguent considérablement des expériences de physique. Tout d'abord, les observations (à quelques exceptions près) ne peuvent pas être effectuées au cours de la leçon, tant à cause de l'heure de la leçon qu'à cause de la position défavorable de certains astres, ou enfin à cause des conditions météorologiques défavorables. Cela introduit des difficultés d'organisation. En plus de ces difficultés, le professeur d'astronomie se heurte à la nécessité de faire appel à la mémoire des élèves en invoquant des perceptions fugitives ressenties par les étudiants au cours des observations. Cette circonstance exige des précautions toutes particulières dans l'organisation et l'exécution des observations, de manière à assurer une mémorisation exacte des résultats de ces observations. Le

professeur doit s'efforcer de trouver, pour chaque sorte d'observation, la forme la plus adéquate, celle qui permet de dégager ce qui est essentiel pour une leçon déterminée.

Démonstration des modèles.

Dans le matériel d'enseignement de l'astronomie existe un grand nombre de particularités qui découlent de l'essence même de l'astronomie. Alors que, dans certaines disciplines, telles que la physique et la chimie, le professeur peut montrer aux étudiants sur une table, ou au cours des travaux pratiques, le phénomène étudié, le professeur d'astronomie est généralement privé de cette possibilité. Il peut faire connaître aux élèves les phénomènes célestes, mais il n'a aucune possibilité, ni de les répéter, ni de modifier la vitesse de leur déroulement. Or, l'observation des phénomènes célestes constitue la source des connaissances, mais ne donne pas par elle-même la compréhension de la signification de ces faits. C'est pourquoi, après avoir montré ou exposé les faits, le professeur doit montrer aux élèves le modèle du phénomène.

Ainsi, une maquette astronomique, montrée au cours de la leçon, prend la signification d'une expérience faite en classe. Le choix ou la construction de telle maquette est une des tâches les plus importantes du maître. Une maquette astronomique doit satisfaire à une condition importante : elle doit exprimer l'essence du phénomène sans entrer dans des détails inutiles. Elle doit être aussi simple que possible, elle ne doit pas chercher à être décorative.

Evidemment, on ne peut reproduire aucun phénomène astronomique au moyen d'une maquette en observant scrupuleusement tous les détails du phénomène (par exemple, les rapports des distances, des dimensions et des vitesses). Dans ce cas, il faut savoir choisir l'essentiel, le plus important. La maquette ne doit pas être compliquée, elle ne doit pas être étouffée par des détails inutiles.

Prenons l'exemple bien connu de la nécessité de montrer le mouvement de la Terre autour du Soleil. Ce qui est essentiel ici, c'est la translation de la Terre autour du Soleil, l'inclinaison de l'axe terrestre sur le plan de l'orbite terrestre et la constance de la direction de l'axe. Au fond, pour montrer ces trois phénomènes on n'a pas besoin de dispositifs spéciaux. Il suffit de disposer d'une lampe et d'un globe géographique.

L'usage des maquettes et des modèles concrets dans l'astronomie sphérique et dans l'astronomie théorique est absolument indispensable.

D'ailleurs, en montrant le modèle et en basant son explication sur celui-ci, le professeur doit en même temps faire des dessins au tableau, en suivant certaines règles qui seront indiquées plus loin. En même temps, il faut montrer des modèles des principaux instruments astronomiques et expliquer les principales méthodes d'observation au moyen des maquettes correspondantes.

Les modèles sont utiles, non seulement dans l'astronomie sphérique, mais aussi en astrophysique, car on se trouve ici devant un grand nombre de notions mal assimilées par des élèves, sans le secours de modèles. Ici sont particulièrement utiles des modèles qui montrent des rapports des distances et des rapports de dimensions des corps célestes.

Démonstration des dessins et des schémas.

Dans le cours de l'astronomie, les schémas et les dessins sont d'autant plus indispensables que le professeur a souvent besoin de citer des objets que l'on ne peut pas montrer aux élèves, soit parce que l'étudiant n'a pas encore fait l'observation correspondante, soit parce que la connaissance de ces objets résulte du travail avec des instruments rares et puissants.

La plupart des schémas relatifs à l'astronomie sphérique représentent, ou bien un objet spatial, telle que la sphère céleste, ou bien une de ses sections par un plan. Le schéma de la sphère céleste se conçoit par les étudiants avec une certaine difficulté, et c'est pourquoi il faut les habituer et les préparer à un tel schéma en commençant par la démonstration d'un modèle, et en montrant comment ce modèle se projette sur un écran. Le procédé le plus simple consiste à projeter sur un écran blanc l'ombre d'un ballon sphérique à moitié rempli d'eau. La représentation de la sphère céleste sur le tableau doit être faite avec exactitude et soin. Pour cela, il faut utiliser le compas scolaire et la règle et habituer les étudiants à en faire autant.

Il faut se méfier de l'utilisation de diapositives représentant de tels schémas. L'apparition sur l'écran d'un dessin tout préparé et complet ne donne pas la possibilité de montrer aux élèves le développement progressif de l'ensemble du dessin, et l'attention des élèves se disperse. Le schéma est perçu dans son ensemble et non pas dans son développement. Par contre, en dessinant au tableau, le professeur a la possibilité d'introduire des parties du dessin qui se rapportent à l'évolution de son exposé. En effectuant de tels dessins au tableau, il est très utile d'utiliser des craies de couleur, cela permet de faire ressortir certaines lignes et on évite ainsi que l'essentiel ne soit noyé dans la complexité du dessin.

Des dessins de certains objets stellaires doivent être montrés sur l'écran au moyen d'un épidiascope ou d'un appareil de projection. Lorsque l'on ne dispose pas d'un bon choix de diapositives, l'épidiascope est particulièrement indispensable. Il faut donc que l'enseignement de l'astronomie se fasse dans une pièce où l'on peut faire l'obscurité. La quantité de dessins montrés doit être rigoureusement coordonnée avec le thème de l'exposé et le temps dont on dispose. Il faut se méfier d'une surabondance inutile de dessins, car il ne faut pas oublier que chaque dessin exige une explication particulière.

Les photographies astronomiques, du fait qu'elles sont dépourvues de perspective, peuvent donner une idée tout à fait fausse sur les dimensions de l'objet dont on a pris la photographie. C'est pourquoi, en montrant des photographies d'objets astronomiques, il ne faut jamais manquer d'indiquer aux étudiants quel est le grossissement angulaire qui correspond à chaque photographie, et donner en même temps des précisions sur les dimensions angulaires de l'objet. Ce n'est qu'au moyen de ces données que l'étudiant pourra avoir une compréhension exacte du dessin.

Il faut que les étudiants puissent examiner en grand détail certaines diapositives et certaines photographies. Il faut donc installer dans le laboratoire de physique une visionneuse spéciale, en utilisant, soit la lumière de la fenêtre, soit la lumière électrique, et certaines diapositives pourraient être ainsi laissées en exposition dans ce cadre d'une leçon à la leçon suivante.

Actuellement, on a publié en Russie un certain nombre de panneaux astronomiques. Quand la classe est peu nombreuse, et que l'on ne dispose pas d'appareil de projection, on peut se servir de tels panneaux. Il faut d'ailleurs veiller à ce que ces panneaux soient aussi proches que possible des élèves. On peut, bien entendu, pendre un tel tableau dans la classe, mais il est très peu rationnel de le faire avant la leçon correspondante, car l'élève finit par être saturé de la vue correspondante et n'y fait plus attention.

On peut utiliser, avec succès, des films cinématographiques, mais il faut tenir compte du fait que l'on ne dispose pas encore de films d'enseignement en nombre suffisant. C'est pourquoi l'on est obligé parfois de projeter des films de vulgarisation qui contiennent certaines parties qui ne sont pas indipensables et qui consomment le temps précieux pour l'enseignement proprement dit. Lorsque l'on projette un film de vulgarisation, il faut absolument s'arranger pour pouvoir arrêter le film de temps en temps et pouvoir commenter, au moment même où on les voit, certaines images.

Utilisation du manuel d'astronomie et des livres de vulgarisation.

Après l'exposé du professeur, celui-ci peut indiquer aux élèves ce qu'ils doivent lire chez eux dans leur manuel, et quels sont les problèmes qu'ils doivent faire, et quelles sont les observations souhaitables.

Il faut bien faire attention à ce que le manuel peut avoir parfois un ordre d'exposition différent de celui du professeur et, dans ce cas, le professeur doit mettre les élèves en garde et leur indiquer l'ordre dans lequel ils doivent faire leurs lectures.

En plus du manuel, les élèves doivent apprendre à se servir du calendrier astronomique, et des cartes célestes. A chaque leçon, le professeur indique comment l'élève pourra utiliser son manuel et les différents dispositifs auxiliaires. Il le fait en partie au cours de la leçon, en partie à titre d'illustration de ce qu'il a exposé.

Le problème de l'utilisation des livres de vulgarisation par les élèves qui s'intéressent plus particulièrement à l'astronomie, est beaucoup plus délicat. Le professeur doit tout d'abord bien connaître lui-même ces publications afin d'être prêt, non seulement à indiquer aux élèves les meilleurs ouvrages, mais également à indiquer ce qui doit y être lu et ce qui doit être laissé de côté, de manière à pouvoir prévenir les élèves des endroits difficiles et peu compréhensibles.

Les livres de vulgarisation et les brochures consacrés à l'astronomie sont très nombreux. Il faut donc faire une sélection extrêmement sévère et choisir toujours les ouvrages qui permettent d'approfondir et d'élargir ce qui a déjà été exposé dans le manuel et qui soit tout à fait correct du point de vue du contenu et du style. Il faut évidemment veiller à recommander des livres qui n'ont pas encore vieilli.

Dans certains cas, on peut même admettre l'utilisation d'une vieille édition, mais en indiquant qu'il existe peut-être des exposés moins détaillés qui, cependant, tiennent compte des progrès récents du problème.

Problèmes et contrôle du travail des élèves. Olympiades astronomiques.

Le peu d'heures accordées par les programmes au professeur d'astronomie rend le problème du contrôle du travail des élèves particulièrement difficile. On y parvient, quand même, en procédant de la manière suivante :

On utilisera les interrogations orales comme principale forme de contrôle. On pourra également proposer aux élèves quelques problèmes sous la forme de devoirs écrits. D'autre part, on leur fera décrire par écrit les observations effectuées, et leurs travaux pratiques. Enfin, on pourra utiliser comme travaux de contrôle des explications de dessins et des tableaux qui résument des données astronomiques importantes.

Il serait tout à fait inadmissible de juger des élèves en astronomie uniquement par des devoirs. Malgré le peu d'heures que le professeur d'astronomie a à sa disposition, il doit, comme le professeur de physique, connaître ses élèves, non seulement d'après leurs devoirs, mais aussi par un contact direct et quotidien. A chaque leçon, on doit interroger au moins un élève, et poser quelques « questions volantes » à plusieurs autres.

Ainsi le professeur évitera de se faire des idées fausses sur la réaction des élèves à son enseignement, et saura apprécier à leur juste valeur les connaissances acquises par ses élèves.

Il est important et commode de poser aux élèves les questions proposées dans le chapitre des « exercices » de leur manuel. Cela incitera les élèves à faire ces exercices en vue d'une interrogation éventuelle et à faire ainsi de « l'auto-contrôle » de leur savoir. Pour gagner du temps, on peut utiliser la technique qui consiste à interroger simultanément deux élèves en proposant à l'un un problème et à un autre une question relativement courte. Pendant que le second expose sa question, le premier prépare les calculs et les dessins, qui interviennent dans son problème.

La résolution des problèmes d'astronomie est particulièrement importante, elle

donne l'occasion d'approfondir les idées du cours, montre comment le cours s'applique dans la pratique et permet le contrôle du savoir. On peut toujours associer les problèmes d'astronomie avec l'usage des cartes célestes, des annuaires, des dessins ; cela rend le problème plus vivant et élargit les modalités de l'application de la théorie à la pratique. Par « problème », nous entendons ici n'importe quelle application de la théorie à la pratique et à l'explication des phénomènes ; l'examen des causes des phénomènes (par exemple : lever du Soleil) ; le calcul des circonstances précises dans lesquelles va se dérouler le phénomène ; le choix des instruments et des méthodes les plus adéquates, pour l'exécution des observations ; la recherche des valeurs numériques qui caractérisent le phénomène observé ; l'art de se servir des annuaires, des éphémérides, des catalogues, des tables diverses, des cartes célestes, et des atlas astronomiques. Ces problèmes ne peuvent pas être isolés les uns des autres, ils sont tous intimement liés.

La résolution du problème n'a pas nécessairement une forme mathématique. Il faut se garder de la tentation d'une mathématisation excessive et prématurée d'un problème donné, ce qui aurait pour conséquence fatale le remplacement de l'analyse de l'essence et des conséquences d'un phénomène naturel par une description sèche et abstraite dont le formalisme pourrait donner l'illusion seulement de la compréhension du sens physique du phénomène. Les problèmes ne doivent comporter une partie mathématique que dans le cas où leur nature l'exige impérieusement.

Il faut être encore plus prudent en ce qui concerne les calculs numériques. Ces derniers doivent être assez simples pour apprendre à l'élève comment on détermine les caractéristiques numériques des différents phénomènes importants pour la vie pratique (par exemple calcul de la hauteur du Soleil à midi), mais ne doivent pas être une fin en soi. Chaque calcul sera conduit avec une précision qui correspond à celle des observations qu'on se propose d'effectuer. Par exemple, si l'on recherche la hauteur du Soleil à midi, il est parfaitement inutile d'utiliser la déclinaison du Soleil avec une précision de la seconde d'arc, une précision de l'ordre du degré suffira largement.

On ne proposera jamais de problèmes purement abstraits, dépourvus de données numériques concrètes. Quand un problème conduit à l'établissement d'une formule sans aucun contenu concret, l'élève reste insatisfait.

En attaquant la solution d'un problème, on commencera par examiner la signification astronomique du problème, on discutera de la formule qu'il convient d'utiliser et surtout on expliquera et illustrera le résultat de manière concrète. Les étudiants s'habitueront à procéder de même, au moment où ils font leurs devoirs chez eux. Il faut s'efforcer, en guise de préparation, à la solution de problèmes plus complexes, de résoudre « de tête » une multitude de « petits exercices ».

Dans la troisième édition et dans les éditions suivantes du manuel d'astronomie de Vorontzoff-Velyaminov, on trouve des problèmes qui peuvent servir, tant pour des travaux en classe que pour des devoirs à faire chez l'élève. Mais en choisissant les problèmes, il faut veiller à ne prendre que ceux qui permettent d'approfondir la compréhension du cours. Il faut commencer par de petits exercices, qu'on peut faire de « tête », passer ensuite aux problèmes qui comportent des calculs mathématiques, mais se rapportent aux applications pratiques, et ne donner qu'à la fin un ou deux problèmes plus difficiles qui réunissent les deux conditions. On trouvera des problèmes particulièrement utiles, parmi ceux du « Recueil de problèmes et exercices », de Vorontzoff-Velyaminov, qui consistent en calculs d'après dessins et photographies.

Il est facile de puiser des problèmes et exercices faciles dans la vie courante. De tels problèmes, s'ils correspondent vraiment à la réalité, seront d'une énorme fécondité en donnant aux élèves une illustration vivante de la manière dont la théorie s'applique à la pratique. De très précieux matériaux de cette nature peuvent être puisés de récits de voyages (par exemple l'expédition du « Tcheluskin », ou le travail

des « stations flottantes », telles que « Le Pôle Nord », ou des raids à grande distance des aviateurs soviétiques, l'expédition du « Sédov », etc...). On pourra également étudier les conditions d'éclairement aux différentes latitudes, ou des questions liées au plan quinquennal en cours... (*).

Les problèmes et les travaux pratiques sont utiles, non seulement pour permettre au professeur de juger ses élèves, mais aussi et surtout pour lui permettre de juger l'efficacité de ses propres méthodes d'enseignement. C'est en faisant des problèmes que l'on décèle une compréhension insuffisante ou même erronée des questions.

La nature des « questions » posées lors des interrogations est aussi très importante. Des questions « standard », qui n'exigent que l'exposition des définitions verbales et des formules du manuel ne pourront révéler, dans le cas le plus favorable, que la présence de l'application et de la mémoire chez l'élève. Elles ne montreront pas s'il possède des connaissances réelles. Evidemment l'élève doit connaître les principales définitions et il faut contrôler qu'il en est bien ainsi, mais en formulant la question de telle manière que, sans dérouter l'élève, la réponse puisse révéler une connaissance sûre, claire et non purement verbale. Toute question relative aux définitions doit donc être immédiatement suivie d'une seconde question qui « développe » cette définition.

En général, dans les « travaux de contrôle », les définitions doivent occuper une place aussi petite que possible. Les principales questions sont celles qui, sans exiger de calcul, permettent de mettre en évidence la compréhension de l'essence du phénomène astronomique, ou d'une certaine notion. De même, il faut se garder de poser trop de questions d'astronomie sphérique. La proportion de problèmes et exercices de différentes sortes doit correspondre à l'importance réelle des différentes parties du programme. Les questions « à calcul » doivent être réduites au minimum, et ne comporter que des calculs très simples. Quelques questions permettront de s'assurer que l'élève sait se servir d'une carte céleste mobile, et d'un calendrier astronomique, pour la détermination de la « visibilité » de telle ou telle étoile ou planète à un moment donné.

Dans la deuxième partie du cours d'astronomie on propose quelquefois aux élèves des rédactions sur des sujets astronomiques. De telles rédactions devraient être toujours facultatives. Seuls, des étudiants spécialement passionnés d'astronomie feront de telles rédactions.

Des rédactions d'astronomie devraient avoir pour thème des sujets qui permettent à l'élève d'approfondir sa connaissance des idées et des méthodes de l'astronomie contemporaine, et des travaux des astronomes soviétiques. De telles rédactions, utiles pour juger de la maturité d'esprit de l'élève, sont de peu de valeur en tant que test des connaissances de l'élève. Il est bon de faire accompagner une telle rédaction de la fabrication de quelque « dispositif de démonstration », qui restera à l'école et servira au cours des années suivantes à stimuler le zèle des générations ultérieures d'élèves, et pourra servir utilement en classe. Ne pas oublier de mentionner, en utilisant plus tard, tel ou tel dispositif, le nom de l'élève qui l'a fabriqué et à quelle promotion il appartenait.

Depuis 1947 on organise en U.R.S.S. des « Olympiades astronomiques », sous l'égide de l'Université de Moscou, de la Société Astronomique de l'U.R.S.S., du Planétarium de Moscou et de la section de Moscou du Ministère de l'Instruction Publique. Ces Olympiades sont censées stimuler les élèves et les professeurs. Les problèmes mis au concours dans ces « Olympiades » sont proposés par des équipes dépendant des organismes mentionnés ci-dessus. Il est utile que les professeurs les aient entre leurs mains. Les questions et les solutions publiées après coup par les

(*) Tout cela est hors de question en France. Mais nous gardons ces indications à titre de curiosité.

auteurs peuvent donner aux professeurs des matériaux très précieux pour l'étude en classe. Les résultats de ces Olympiades ne peuvent évidemment caractériser que le nombre et la qualité des élèves qui s'intéressent particulièrement à l'astronomie. Il serait à souhaiter que de telles Olympiades soient organisées dans d'autres villes que Moscou. Le Recueil de tous les problèmes proposés au cours des six premières Olympiades a été publié dans la brochure intitulée : « 1-6 Olympiades Astronomiques de Moscou, 1947-1952 », éditée par l'Université de Moscou, en coopération avec MOBAGO et le Planétarium de Moscou. On trouve également leur texte dans les « Matériaux destinés aux conférences d'astronomie du Planétarium de Moscou », publiés en 1952 et 1953. Le périodique « La Physique à l'Ecole » (U.R.S.S.) donne des informations sur la conduite de ces « Olympiades ».

Les Cercles astronomiques à l'Ecole.

Il est très souhaitable d'organiser des « Cercles astronomiques » groupant les élèves des classes supérieures du Lycée ou Collège. Il incombe évidemment au professeur chargé de l'enseignement de l'astronomie de diriger un tel Cercle.

La tâche du directeur du Cercle consistera principalement à élaborer le programme des travaux du Cercle, en tenant compte des intérêts individuels des élèves et de leurs propositions. Ce programme doit être conçu de manière à éveiller un intérêt durable, et à procurer une certaine satisfaction aux participants. L'expérience montre que l'on atteint ce but, en faisant appel au travail actif des membres, autour d'*appareils, de modèles* et d'*installations*. Faute d'une activité de cette sorte, les jeunes membres du Cercle, après avoir entendu une série de conférences, finissent par se désintéresser des réunions du cercle.

Les thèmes autour desquels doivent s'organiser les programmes doivent être principalement du type historique et astrophysique, et accorder un poids relativement faible à l'astronomie sphérique. Pour cette dernière, seuls des éléments ayant une portée pratique évidente : navigation aérienne et maritime, mesure du temps, seront retenus.

Parmi les thèmes historiques, ceux qui possèdent la plus grande valeur éducative sont ceux qui se rapportent à la vie et à l'activité des grands astronomes qui se sont distingués dans la lutte pour l'établissement d'une conception du monde compatible avec la Science (Copernic, Bruno, Galilée), et pour chaque pays, les vies des grands astronomes nationaux (pour l'U.R.S.S. ce sera Lomonosov).

Comme objet d'activité pratique, les membres du Cercle pourraient se fixer pour but la construction d'une « plate-forme astronomique », d'un cadran solaire, d'une lunette (avec les lentilles disponibles), etc...

Le directeur du Cercle s'occupera également de guider les membres dans le choix des lectures de vulgarisation, tant pour lecture individuelle que pour analyse critique ou pour la préparation d'une conférence.

Il faut que tous les exposés et toutes les communications des élèves soient accompagnés d'un « matériel de démonstration » : diapositives, films cinématographiques, etc... Certaines diapositives, par exemple celles qui représentent différentes constellations ou différentes régions du Ciel, pourront être confectionnées par les élèves eux-mêmes, avec du papier noir, où ils perceront des trous de différents diamètres.

Il faut surtout éviter que l'activité du Cercle ne devienne une révision du cours d'astronomie normal de la classe supérieure, ou un exposé anticipé de celui-ci. Rien de tel pour dégoûter les élèves et pour condamner l'entreprise à un échec certain.

On trouve, dans la littérature pédagogique soviétique, de nombreuses descriptions d'expériences de Cercles astronomiques dans les écoles de Moscou, Kouybichev, Simféropol, et autres villes de l'Union.

Dans les villes où il existe un grand nombre de Lycées et Collèges on pourra réunir dans un même Cercle des élèves d'établissements différents. Cela est particulièrement indiqué dans les villes où il existe déjà un Planétarium. L'expérience tentée autour du Planétarium de Moscou a montré qu'il n'y a aucun inconvénient à réunir dans un même Cercle des élèves d'âges différents. Mais l'établissement du programme doit, dans ce cas, tenir compte des suggestions des différents professeurs des établissements intéressés, et avec leur participation directe.

Il est particulièrement important de ne pas « dessécher » le travail du Cercle par un excès de théorie et de conférences. Les conférences et la théorie doivent toujours être étroitement liés aux observations effectuées. Cette liaison ne doit pas toujours s'exercer à sens unique : tantôt les observations précéderont, tantôt elles suivront les explications théoriques. Au cours des observations les Cercles des « jeunes » et les Cercles des « plus âgés » seront réunis, les plus expérimentés guidant les moins expérimentés.

M. E. Nabokov. Traduction : V. Kourganoff.

(*à suivre*).

LES ACTIVITÉS DU CLUB ASTRONOMIQUE DU LYCÉE DE SÈVRES EN 1956-1957

La question des clubs scientifiques est à l'ordre du jour. Puisse la belle réussite du club astronomique de Sèvres susciter une ardente compétition d'imitateurs !

Le club astronomique du lycée de Sèvres, fondé il y a trois ans, a réuni cette année une quinzaine d'élèves. La plupart provenaient de Seconde C et Moderne, deux de Seconde AB, quatre de Première C (dont deux « vétérans » de la première heure).

Les activités sont conditionnées chaque année par le niveau des élèves ; c'est ainsi que la première année un groupe important d'élèves de Mathématiques Elémentaires s'était consacré à la fabrication de lunettes d'amateur, tandis que le reste des membres du club, composé essentiellement d'élèves de Troisième, se livrait à des activités moins savantes.

Cette année, au contraire, le groupe était très homogène : majorité d'élèves de Seconde, tous débutants, il n'a donc pas été nécessaire de le scinder en deux.

Les séances, de deux heures chacune, ont eu lieu toutes les trois semaines environ, le soir entre 4 h 1/2 et 6 h 1/2 au Lycée, à partir du milieu d'octobre.

La séance de rentrée, accompagnée de projections, était comme chaque année largement ouverte à tous ceux qui désirent venir voir ce que c'est que le club astronomique. Dans cette séance j'explique les buts du club :

— apprendre à observer les phénomènes célestes et se procurer les moyens de le faire bien ;

— mettre en commun les observations que chacun peut faire chez soi ;

— se poser des questions à partir de ces observations ;

— essayer de donner les explications correspondantes (dans la mesure où elles sont compatibles avec le niveau mathématique des élèves).

Le premier instrument de travail, dont nos astronomes en herbe ont besoin, est une carte du ciel. On en trouve dans le commerce de très simples comme de très compliquées, mais, à mon avis, rien ne vaut, pour un débutant, la carte qu'il dessine lui-même, d'abord parce qu'elle lui est bien plus familière, ensuite parce qu'elle l'amène

à se poser le problème des coordonnées célestes et de la représentation plane d'une sphère (le cours de géographie générale de Seconde est ici un collaborateur précieux).

Deux séances au moins ont été consacrées aux coordonnées célestes, locales et équatoriales, une sphère armillaire (objet que tout professeur peut facilement se fabriquer lui-même) rend les explications plus concrètes et permet de pallier l'ignorance des élèves en ce qui concerne la géométrie dans l'espace. Il a fallu ensuite expliquer le mieux possible la projection stéréographique.

En deux ou trois séances, chacun a construit sa carte. Pour cela, une carte-modèle a été projetée sur un écran avec un système de coordonnées que les élèves ont reproduit sur leur papier. Les principales constellations ont alors été repérées par les coordonnées de leurs étoiles les plus brillantes. Les « alignements » ont été soigneusement indiqués, car ce sont eux qui aident nos élèves à reconnaître de proche en proche dans le ciel les constellations.

Chacun fut alors invité à observer le ciel carte en main, chez soi, les soirs de beau temps. Nos séances au Lycée finissant vers 6 h 1/2, nous avons pu, une ou deux fois cet hiver utiliser les cartes, le temps étant assez clair pour permettre des observations...

Les élèves se sont rapidement rendu compte du mouvement diurne des étoiles ; du reste, des photos du ciel nocturne, prises avec un appareil fixe et une longue pose, mettent aisément en évidence les lois du mouvement diurne.

La notion de coordonnées célestes nous a conduit à parler de leur mesure et en particulier du théodolite. Un instrument schématique (fabriqué jadis sur mes indications par un membre du club) ayant été montré au cours d'une réunion, l'un des élèves a réalisé seul, chez lui, un autre modèle simple et l'a montré dans une séance ultérieure.

Ceci nous a entraînés à parler des lunettes méridiennes et équatoriales, du travail qui se fait dans un observatoire. Nous avons alors consacré une de nos séances à la visite de l'Observatoire de Paris (visite qui a lieu tous les premiers samedis du mois).

L'actualité astronomique a fourni le programme de nos autres séances : il y a eu en effet, cette année, trois éclipses, deux de lune et une de soleil, visibles à Paris (au mauvais temps près !), et la comète a fait parler d'elle dans tous les journaux.

Nous avons essayé d'expliquer, avec expérience de laboratoire à l'appui, le mécanisme des éclipses. L'éclipse de lune du 13 mai, ayant eu lieu par temps clair, a été observée par presque tous les membres du club, et l'un d'eux, plus habile et mieux équipé que les autres : J.-F. MANIGAULT, élève de Seconde Moderne, a obtenu de remarquables photos prises à Sèvres, c'est-à-dire en banlieue, un peu à l'abri des lumières de Paris. L'appareil était un « rectaflex », 24×36, muni d'un téléobjectif de 300 mm. de focale et reposant sur un pied fixe. La pellicule était une agfa 23 % din., ouverture F 3,5. Les temps de pose ont varié de 1/100e à 1/50e de seconde. Ces photos ont naturellement été projetées à une de nos séances.

Le passage de la comète Arend-Roland a suscité de nombreuses questions et a conduit à un exposé succinct sur le système solaire. Etant visible pendant les vacances de Pâques, elle a pu être observée par ceux qui, partis à la campagne, n'étaient pas gênés par les lumières de Paris. Notre même photographe amateur, J.-F. MANIGAULT, en a pris quelques belles photos. L'appareil était cette fois un « rolleflex » 6×6. Même pellicule que pour l'éclipse. Grande ouverture. Pose assez longue (une dizaine de minutes).

Les deux dernières séances de l'année ont été consacrées à un peu d'histoire de l'astronomie, de l'Antiquité à l'époque de Newton environ.

Un programme d'observations a été donné aux membres du club pour les vacances, signalant les phénomènes les plus intéressants.

M. CLAVIER (*Lycée mixte de Sèvres*).

LA RÉALISATION DES FILMS DE MATHÉMATIQUES

Nous sommes heureux de publier ici, pour la première fois en français, un article de M. T. J. FLETCHER, *paru dans* The University Film Journal (n° 5, *été 1954*) *et nous remercions l'auteur de nous y avoir autorisé. Les Collègues qui ont participé aux journées de Sèvres (novembre 1956) ont vu les films de* M. FLETCHER *sur la* Droite de Simson *et la* Cardioïde : *ils ont apprécié les hautes qualités mathématiques et techniques de ces réalisations. Les Collègues qui ont participé à la rencontre de Madrid (Pâques 1957) ont eu la bonne fortune de faire personnellement connaissance de l'auteur ; ils peuvent dire avec quelle gentillesse et quel dévouement* M. FLETCHER *a mis sa compétence de spécialiste à la disposition des apprentis bien maladroits et bien ignorants que nous étions (c'était tout au moins mon cas). On retrouve, dans l'article que nous publions, ce désir d'aider les professeurs de bonne volonté et cette modestie souriante que permettent la maîtrise du sujet et la passion des choses de l'enseignement.*

Je remercie mon Collègue LABAT, *professeur agrégé d'anglais au Lycée de Saint-Cloud, d'avoir bien voulu revoir ma traduction et corriger mes fautes. Sa double compétence d'angliciste et de spécialiste des techniques audio-visuelles, le désignait pour ce travail ; qu'il ait tout de suite accepté de le faire avec le sourire prouve que la coopération des linguistes et des scientifiques est en marche.*

G. W.

⁂

Les problèmes que doit affronter l'auteur d'un film de Mathématiques sont inhabituels à bien des égards. Jusqu'ici, bien peu de sujets ont été exploités par le cinéma, et il y a si peu de réalisations antérieures que ce domaine reste pratiquement inexploré De nos jours, il n'y a peut-être pas d'autre type de film dans lequel un individu puisse atteindre une réussite qui n'a même pas été recherchée par les grandes compagnies commerciales et il est tout à fait certain qu'il n'y a pas d'autre type de film dans lequel un homme seul ait un contrôle aussi complet sur la réalisation entière. Le sujet d'un film de Mathématiques est tiré de la plus exacte des sciences, mais il doit être mis en forme d'une manière comparable à celle qu'exige la composition musicale. Le moyen d'expression utilisé est de ceux où l'art et la science se rejoignent et à tous les problèmes qu'ils présentent tous deux dans le domaine des idées, s'ajoutent les problèmes pratiques du dessin et de la technique cinématographique.

Avant la guerre, quelque six films seulement constitués uniquement de schémas animés mathématiques avaient été réalisés en Angleterre. quelques autres ont été réalisés depuis sur le continent, principalement pour un public scolaire et, récemment, le Collège Sir John Cass a commencé à produire une série de films se rapportant à certains chapitres des programmes universitaires. Dans le présent article, nous décrivons la méthode que nous avons été amenés à adopter pour faire des films de cette espèce : une méthode fondée sur un travail d'amateur pour le scénario et le dessin avec l'aide de professionnels pour la photographie et le travail technique ultérieur.

Il est assez facile de penser à des sujets possibles pour les films de Mathématiques, puisque toutes les fois que dans un système un paramètre peut être rendu variable, nous avons quelque chose à montrer en schéma animé. Toutefois, beaucoup d'idées doivent être rejetées lors d'un examen plus attentif ; le travail de réalisation d'un film est très important et il ne vaut pas la peine d'être entrepris si les idées peuvent être exprimées efficacement par d'autres moyens. Les tout premiers films de

Mathématiques n'utilisaient pas la liberté de mouvement offerte par le cinéma et les propriétés qu'ils illustraient auraient tout aussi bien pu être montrées, et à moindres frais, par un film fixe. Si, dans un film, on doit seulement avoir affaire à des mouvements de corps solides, une maquette mobile (ou modèle) éclairera souvent les idées plus commodément. Le coût mis à part, un modèle présente l'avantage qu'il peut être animé à n'importe quelle vitesse et que l'élève peut le faire fonctionner lui-même. Par contre, le film permet aux éléments géométriques du schéma d'être vus sans qu'aucun détail de construction ne vienne distraire l'esprit et il est possible de faire disparaître ou apparaître des parties de la figure en « fondu » à la volonté du dessinateur. Quand cela peut être fait, l'attrait artistique en est augmenté, ce n'est pas douteux, mais pour démontrer d'une manière concluante la valeur mathématique réelle du film, il faudra l'utiliser pour dépeindre des mouvements qui ne peuvent pas être produits mécaniquement, comme, par exemple, le mouvement d'un système de coniques passant par quatre points lorsque le paramètre *e* varie. Jusqu'ici, il y a eu très peu de travaux de cette espèce et c'est le grand problème qui se pose maintenant aux réalisateurs.

Avant de commencer le scénario détaillé d'un film de Mathématiques, il est donc nécessaire de réserver un temps à la maturation des premières idées et à la recherche des moyens qui rendraient inutile tout traitement cinématographique. Quand il a été reconnu qu'un film était réellement nécessaire, on passe à l'élaboration du scénario, à la division de l'action en scènes et à la séparation de celles-ci jusqu'à ce que chaque mouvement distinct ait été prévu. L'auteur devra prendre l'habitude de « penser » son scénario en fonction des nécessités de la technique d'animation à employer car, ce faisant, non seulement il évitera de faire appel à un trop grand nombre de dessins, mais il s'apercevra aussi que des propriétés mathématiques nouvelles sont suggérées par les procédés de l'animation eux-mêmes et par la manière dont ils sont utilisés.

Il y a deux méthodes fondamentales pour animer un schéma dans un film : « peg animation » (1) et l'utilisation d'une maquette. La méthode consiste à faire un grand nombre de dessins, chacun étant décalé par rapport à son voisin et à les photographier l'un après l'autre. Tout le monde a entendu parler de cette méthode et la plupart des gens s'imaginent que c'est la seule qu'on utilise, alors que les professionnels de l'animation l'évitent chaque fois que cela est possible, parce que d'autres méthodes entraînent souvent moins de travail. La plupart de ces autres méthodes viennent sous la rubrique : utilisation d'une maquette. Par maquette, le technicien du dessin animé entend tout système en bois ou en carton qui peut être rendu mobile sous la caméra entre les vues successives du film. Il est généralement utile que ces maquettes soient aussi plates que possible, car elles peuvent ainsi se placer aisément sous la caméra ; leur construction requiert un talent spécial et de l'ingéniosité. Une autre méthode, qui est riche de possibilités pour les films de Mathématiques, mais qui paraît avoir été peu utilisée par l'industrie, est d'utiliser une abaque : chaque partie du dessin qui doit effectuer un mouvement sans se déformer, peut être tracée sur une feuille séparée en matière transparente, puis déplacée sur les échelles d'une abaque en dehors du champ de la caméra. Cette technique a été utilisée dans les dernières séquences de « *La Droite de Simson* ». Sans aucun doute, elle rend les choses plus faciles pour le dessinateur, mais elle impose une responsabilité supplémentaire à l'opérateur, alors qu'on ne peut attendre de sa part une connaissance avancée des Mathématiques s'ajoutant à son habileté professionnelle comme photographe. La tâche de l'opérateur

---

(1) « Peg animation » est expliqué plus loin dans le texte ; l'anglais « peg » pourrait se traduire par cheville. Sur une planche un décor est fixé par deux chevilles ; des feuilles transparentes amovibles, cellulos sur lesquels sont dessinées les phases successives de la séquence animée, se trouvent exactement placées sur le décor fixe grâce à deux trous ménagés dans la feuille de cellulo pour les chevilles. (*N. du T.*).

est, dans tous les cas, des plus compliquées, et il doit être attentif à beaucoup de facteurs pendant le tournage. Par conséquent, il peut être sage pour un mathématicien qui va faire un film, de prendre la peine d'utiliser la « peg animation » plutôt que le système des abaques, car le repérage est alors assuré dans l'atelier de dessin et l'on soulage l'opérateur d'une responsabilité supplémentaire.

Nous considérons maintenant la « peg animation » d'une manière plus détaillée. Le film muet passe à la vitesse de 16 images par seconde, ce qui signifie qu'une minute d'action exige près d'un millier de photographies. Quand cette méthode d'animation est employée, le travail de dessin est réduit à des proportions raisonnables en filmant un phénomène périodique et en dessinant sur des feuilles transparentes de cellophane (appelées « cellulos ») qui sont percées de trous de telle sorte qu'elles peuvent être « enfilées » avec précision sur les chevilles, d'abord sur la planche à dessin, puis sous la caméra. Puisque les feuilles sont transparentes, il suffit de faire un nouveau dessin chaque fois qu'il y a une partie mobile dans le schéma ; le fond fixe peut être laissé sur les chevilles aussi longtemps qu'il est utile. Il est possible de dessiner sur les cellulos avec de l'encre ordinaire et d'utiliser les instruments de dessin habituels. Les cellulos ont sur le papier le grand avantage que les lignes peuvent être grattées sans laisser aucune trace. De nouvelles possibilités se font jour en superposant un certain nombre de cellulos. De cette façon, deux scènes peuvent être montrées, d'abord séparément, puis simultanément, et ce procédé peut être étendu encore plus loin. Nous sommes en train de produire un film intitulé « *La Cardioïde* », qui est basé sur quatre décors fixes et six séquences animées. Le décor fixe comprend comme matériaux, la cardioïde elle-même, sa développée, son cercle des rebroussements et son cercle orthoptique. Les séquences particulières d'animation ne furent choisies qu'après mûre réflexion et consistent en les deux cercles-roulettes qui engendrent la courbe comme lieu, les deux cercles-roulettes dont les diamètres engendrent la courbe comme enveloppe, les normales et la corde focale. Toutes les séquences d'animation ont été dessinées avec précision, à raison de 180 dessins pour chacune, de telle façon qu'en principe plusieurs d'entre elles puissent être utilisées ensemble dans une combinaison quelconque. Cela signifie que des six séries de dessins, 63 schémas animés différents peuvent être construits. En pratique, il ne faut pas superposer plus de cinq cellulos, y compris le fond fixe, mais à titre d'expérience technique, dans la scène finale du film, nous avons superposé toutes les six séquences animées sur un décor fixe en utilisant une surimpression.

La superposition des différentes séquences a un charme particulier parce que la situation est suffisamment complexe pour que des propriétés puissent apparaître sans que l'animateur lui-même les ait prévues. La situation est la même que celle qui se présente avec un calculateur électronique. La machine seule se comporte d'une manière strictement déterminée à l'avance ; néanmoins, elle fait des choses trop compliquées pour que le « programmeur » les prévoie complètement. Dans le film en question, il est assez facile de se représenter le mouvement des six séquences animées séparément, mais il faudrait qu'un homme soit bien téméraire pour déclarer qu'il peut se représenter les 57 autres combinaisons et énumérer leurs propriétés géométriques. Il est évidemment hors de question d'essayer de montrer toutes ces combinaisons et beaucoup d'entre elles ne seraient pas très instructives, mais il appartient au technicien du dessin animé de choisir celles qui seront les plus révélatrices et les plus frappantes. Il travaille un peu comme un organiste jouant des registres de ses orgues.

Quand on fait un film de cette façon, il est souhaitable que le technicien du dessin animé joue un grand rôle dans la construction réelle du scénario et ne suive pas seulement de façon servile les instructions que quelqu'un d'autre lui donnerait. Si, comme dans les films que nous avons entrepris, c'est le même homme qui est le scénariste et le dessinateur, il devra consacrer des semaines à un travail ingrat et monotone, mais les dessins obtenus ainsi « rendent » plus qu'il ne feraient autrement. En

effet, alors que je réalisais un film antérieur, *La Droite de Simson,* ce sont presque les dessins qui prirent la situation en main et décidèrent du cours que l'action du film pourrait prendre, car les idées des scènes finales apparurent seulement au cours du travail sur les premiers dessins ; ces idées auraient pu ne pas apparaître du tout si un dessinateur professionnel avait simplement produit des dessins en série suivant des prescriptions données. Exactement comme un compositeur gagne une connaissance profonde de la composition à la dure école de l'orchestre, l'auteur d'un film peut apprendre les subtilités pratiques de son art à la grande planche du dessinateur.

Quand le technicien du schéma animé a terminé les dessins, il lui faut les numéroter systématiquement et établir à l'intention de l'opérateur des instructions détaillées pour la prise de vues. Ceci est compliqué du fait qu'il est souvent meilleur de prendre les vues d'un film de Mathématiques à l'envers, de la fin au début, parce que les lieux qui sont vus se dessinant eux-mêmes dans le film sont plus aisément filmés en allant à l'envers et en effaçant progressivement le trait. Un film peut contenir trois ou quatre séquences de cette sorte, et il est beaucoup plus facile de prendre toutes les vues dans le même sens. Les instructions destinées à l'opérateur doivent donc être établies avec grand soin, en inversant jusqu'aux moindres détails, chaque « ouverture en fondu » devenant une « fermeture en fondu » et ainsi de suite. Les instructions pour un film de douze minutes couvrent environ sept pages et sont écrites suivant un code que seuls l'opérateur et le technicien du schéma animé comprennent. Quand elles ont été établies, le dessinateur n'a plus rien à faire, en principe, jusqu'à ce qu'il voie le film, mais en réalité quelques erreurs sont presque inévitables dans un millier de dessins ou plus et il faut les corriger. Des dessins peuvent aussi se détériorer, avoir besoin de retouches et le dessinateur aura de la chance s'il n'est pas rappelé durant les quelques semaines du tournage pour réparer un ou deux accrocs de ce genre.

Le montage final de ces films présente très peu de difficultés ; si les effets ont été convenablement calculés, le film apparaîtra exactement comme l'auteur le souhaitait au départ. Dans certains cas, si un passage ne donne pas satisfaction, la seule chose à faire d'ordinaire, est de refaire cette partie en la reprenant depuis le début.

D'aucuns se sont demandés si des auteurs pouvaient faire eux-mêmes les photographies. Cela n'est pas impossible, mais si l'on vise à l'efficacité maximum, il est nécessaire d'avoir une réalisation photographique de haute tenue ; autrement, les spectateurs sont distraits par des aspects techniques mineurs et ne peuvent se concentrer pleinement sur les Mathématiques. Quelques-uns de nos premiers ouvrages ont été faits sur films de 16 mm., mais nous avons eu tôt fait d'abandonner cette solution et nous travaillons maintenant exclusivement sur film de 35 mm., car de cette façon une qualité bien meilleure peut être obtenue. Les « Polytechnic Films » ont déployé un zèle fanatique en essayant de produire des ouvrages qui ne peuvent être pris en défaut dans le moindre détail et il est douteux qu'aucune installation d'amateur puisse rivaliser avec la qualité qui peut être obtenue sur un banc d'animation professionnelle, avec le contrôle très précis de l'éclairage, du temps de pose et de toutes les phases suivantes que la somme énorme des capitaux d'équipement d'un studio professionnel peut assurer.

Par contre, il est douteux que quelqu'un possédant la connaissance approfondie de ce qu'il faut faire soit trouvé dans l'industrie pour concevoir les films et produire les dessins à un prix qui soit tant soit peu abordable, et cette partie du travail est probablement mieux faite par les mathématiciens eux-mêmes. Cette heureuse combinaison de l'amateur et du professionnel a très bien fonctionné dans nos récentes productions et nous espérons que cela continuera. Car chaque film heureusement mené à son terme ne donne à ses producteurs qu'une courte période de satisfaction et il commence, sitôt après, à poser de nouveaux problèmes.

T. J. Fletcher.

A PROPOS DES RADICAUX

1. On relève souvent, en Première, en Mathématiques Elémentaires et... au-delà, les erreurs suivantes (et leurs variantes) :

$$\sqrt{a^2} = a, \qquad \sqrt{a^2} = \pm a.$$

Elles sont facilitées, peut-être même engendrées, par le vocabulaire habituel : on dit couramment : « 25 a deux racines, qui sont 5 et -5 », et, d'autre part, « $\sqrt{25}$ » se lit : « racine de 25 ». Le débutant n'est-il pas alors tenté d'en déduire : $\sqrt{25} = \pm 5$?

En somme, le mot « racine » est employé pour désigner deux notions différentes.

2. Aussi serait-il peut-être préférable d'adopter la terminologie suivante :

1° Le symbole $\sqrt[n]{\ }$ se lit « radical $n^{ième}$ de ».

2° On appelle « racine arithmétique $n^{ième}$ » d'un nombre arithmétique A le nombre, unique, dont la puissance n^{me} est A. On le note : $\sqrt[n]{A}$.

Jusqu'ici, la distinction entre « racine » et « radical » n'est pas indispensable. Mais :

3° On appelle « racines relatives n^{mes} » d'un nombre relatif a les nombres, s'il en existe, dont la puissance n^{me} est a. Leur nombre et leurs notations se résument de la façon suivante :

	a positif	a négatif
n impair	Une : $\sqrt[n]{a}$	Une : $-\sqrt[n]{-a}$
n pair	Deux : $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$	Aucune

($a = 0$: une seule, qui est zéro).

(Il faut enfin distinguer de ces notions celle de « racine approchée » ; pourquoi ne pas employer plus systématiquement le symbole $\simeq$, par exemple dans :

$$\sqrt{2} \simeq 1,41 \text{ ?}).$$

3. Il en résulte que :

1° Un radicande (c'est-à-dire ce qui est sous un radical) ne peut être que positif ou nul.

2° Un radical est essentiellement positif ou nul.

Ces deux faits *distincts* sont souvent mélangés dans l'esprit des élèves ; la phrase suivante le révèle :

« $\sqrt{x^6}$ est positif ou nul parce que x^6 est positif ou nul » ; en fait : 1° $\sqrt{x^6}$ existe parce que x^6 est positif ou nul ; 2° Une fois son existence assurée, $\sqrt{x^6}$ est positif ou nul parce que c'est un radical.

4. Autre conséquence : $\sqrt{a^2} \equiv |a|$, que a soit un nombre ou une fonction. (Il importe de vérifier d'abord que la notion de valeur absolue est bien comprise...). Cette identité mériterait d'être présentée comme aussi « remarquable » que $(a+b)^2$... etc... Quitte à voir, dans les débuts, tel élève scrupuleux écrire $\sqrt{25} = |5|$, ce qui n'est pas inexact...

$$\text{De même } \sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}},$$

$$\sqrt{a^2b} = |a|\cdot\sqrt{b}, \quad \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|, \text{ etc...}$$

5. Bien souvent, après avoir commis « $\sqrt{a^2} = a$ », l'élève espère se racheter grâce à « $\sqrt{a^2} = \pm a$ », ce qui est une réponse de Normand...

Peut-être avons-nous tort d'utiliser ou d'accepter le signe $\pm$. L'emploi en est malheureusement bien ancré en Première à propos des formules de résolution de l'équation du second degré ; il n'y est pas illogique, car $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ désigne l'ensemble de deux nombres (encore que le $\pm$ camoufle parfois une petite difficulté : $m \pm \sqrt{(m-1)^2}$ sont bien, dans leur ensemble, égaux à $m \pm (m-1)$, mais il y a « chassé-croisé » quand m traverse la valeur 1). Néanmoins, l'habitude me paraît mauvaise. Si on se refuse à l'effort d'écrire les deux solutions (ou les deux... racines !) sur deux lignes différentes, ne vaudrait-il pas mieux initier dès la Première à l'usage du symbole ε ?

6. Si on adopte les conditions du paragraphe 2, il faut s'interdire $\sqrt[3]{-8}$ (la racine cubique de -8 devant s'écrire : $-\sqrt[3]{8}$).

D'ailleurs, même du point de vue théorique, l'écriture $\sqrt[3]{-8}$ présente des inconvénients ; par exemple, $\sqrt[3]{-8}$ n'est pas égal à $\sqrt[6]{(-8)^2}$. L'emploi de $a^{p/q}$, y compris pour a négatif à condition que q soit impair, lève la difficulté ; en effet, $(-8)^{1/3}$ ne peut être remplacé par $(-8)^{2/6}$ qui n'existe pas puisque 6 est pair ; mais à quel niveau peut-on introduire ces conventions ?

La même interdiction s'étend au cas où le radicande est une fonction. Si on appelle $g(x)$ la fonction « racine cubique relative de la fonction $f(x)$ », il faut l'exprimer ainsi :

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt[3]{f(x)} \text{ pour les valeurs de } x \text{ telles que } f(x) \geqslant 0, \\ g(x) = -\sqrt[3]{-f(x)} \text{ pour les valeurs de } x \text{ telles que } f(x) < 0, \end{cases}$$

ou bien : $$g(x) = [f(x)]^{1/3}.$$

7. On a proposé le symbole $\sqrt[n]{z}$ pour désigner l'une quelconque des racines n^{mes} complexes de z : il me paraît dangereux. $\sqrt{25} = \pm 5$, qui serait correct, dévierait vite en $\sqrt{25} = \pm 5$, et tout serait à recommencer. A ce propos, regrettons le « $\sqrt{-1} = i$ », tarte à la crème des mauvais vulgarisateurs...

Il ne s'agit là que de problèmes pédagogiques. Une fois immunisé, l'étudiant pourra, sans grand inconvénient lire « racine » au lieu de « radical », écrire « $\sqrt[3]{-8}$ », utiliser $\pm$. Mais cette immunité n'est pas naturelle ; elle est acquise, et parfois péniblement...

L. Duvert (Lyon, *Ampère*).

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE

La logique moderne, par Jean CHAUVINEAU, Collection « Que sais-je ? », Presses Universitaires de France, 108, boulevard Saint-Germain, Paris, 1957.

Il est bien que cette initiation, efficace et concise, soit écrite par un professeur de Mathématiques et nul, plus que M. J. CHAUVINEAU, n'est qualifié pour réaliser ce travail de précision.

Dès l'introduction, le but et le plan de l'ouvrage apparaissent nettement. La logique qui « s'applique à découvrir et à formuler les lois de la pensée claire » fit porter ses premières recherches sur le langage ; puis, réagissant contre l'illusion dangereuse et pressante d'une corrélation trop étroite entre l'ordre logique et l'ordre grammatical, elle en est venue à se créer un langage symbolique. C'est cette « algèbre de la logique », outil indispensable du théoricien qui se trouve explorée dans le livre de M. J. CHAUVINEAU.

L'étude se compose de quatre chapitres :

I. Logique propositionnelle.
II. Logique fonctionnelle.
III. Logique propositionnelle déductive.
IV. Logique fonctionnelle déductive.

Les deux premiers chapitres constituent « une description de la logique », les deux derniers s'attachent à dégager « l'organisation déductive » de celle-ci. En voici une brève analyse.

CHAPITRE PREMIER : *Logique propositionnelle.* — Dans ce chapitre une proposition est considérée comme un énoncé pris en bloc, susceptible de recevoir deux valeurs logiques que nous nommons le vrai (noté 1) et le faux (noté 0). Le référentiel étant ainsi présenté, on peut définir dans celui-ci des opérations, une opération logique étant une loi de composition des propositions définie par une loi de composition de leurs valeurs logiques ; autrement dit, la valeur logique de la proposition résultante est une fonction des valeurs logiques des propositions composantes : une telle fonction est explicitée par une table : table des opérations logiques d'ordre un (tautologie, affirmation, négation, contradiction), table des 16 opérations logiques d'ordre deux (parmi lesquelles la disjonction, la conjonction, l'implication, l'implication réciproque, l'incompatibilité, l'exclusion réciproque). De la notion d'opération on s'élève à celle d'*expression logique.*

Le chapitre se termine par une étude des *groupes de transformations logiques* et plus particulièrement du « *Groupe de Piaget* » * dont on sait toute l'importance pédagogique ; « selon J. PIAGET, nous rappelle M. CHAUVINEAU, la prise de conscience de ce groupe, qui s'opérerait chez l'enfant vers l'âge de 11 ou 12 ans, jouerait un rôle décisif dans l'élaboration des structures de l'intelligence, destinées à se manifester en Mathématiques sous le triple aspect des structures algébriques, des structures d'ordre et des structures topologiques ».

CHAPITRE II : *Logique fonctionnelle.* — La proposition a une structure interne que la logique doit examiner ; on y distingue :

a) Des êtres logiques susceptibles d'être liés dans la proposition, on les nomme « *termes* » (ou objets ou individus).

(*) En ce qui concerne le « groupe de Piaget », il convient de recommander la lecture du chapitre premier de l'ouvrage collectif intitulé « L'Enseignement des Mathématiques », publié par Delachaux et Niestlé, 32, rue de Grenelle, Paris, 7e.

b) Des êtres logiques susceptibles de lier les précédents dans la proposition, on les nomme « *prédicats* ».

En désignant les termes par x, y, z, les prédicats par f, g, h, et leurs assemblages par $f(x)$, $g(x, y)$, $h(x, y, z)$ on atteint, au prix de deux abstractions successives, la notion de « *fonction propositionnelle* », $f(x)$ est une propriété ; $g(x, y)$ est une relation binaire ; $h(x, y, z)$ est une relation ternaire et ainsi de suite.

D'une fonction propositionnelle on peut en déduire d'autres, soit en donnant aux lettres x, y, z des valeurs objectives (*spécialisation*), soit en faisant participer le domaine d'existence au processus constructif (*quantification*) ; suit une étude précise des signes $\forall$ (quantificateur universel) et $\exists$ (quantificateur existentiel).

On peut enfin associer à chaque fonction propositionnelle la classe des objets (ou des collections d'objets) qui la vérifient ; puis, étudiant conjointement les opérations sur les fonctions et les opérations sur les classes, on peut établir un isomorphisme entre l'ensemble $\mathcal{F}_m$ des fonctions propositionnelles et l'ensemble $\mathcal{C}_m$ des classes définies sur un même domaine m-dimensionnel $\mathcal{D}$.

Ainsi se trouve réalisée la synthèse dialectique de la *logique de compréhension* et de la *logique d'extension*.

Chapitres III et IV : *Logique déductive*. — Son but : « affirmer, selon des procédés déterminés une fois pour toutes et dont la mise en œuvre constitue ses *démonstrations*, des expressions qu'elle a préalablement construites ; elle y parvient en conférant à certaines expressions le privilège d'être d'abord conventionnellement affirmées, ces expressions s'appellent les *axiomes* de la théorie. Les expressions qu'on réussit à affirmer par voie démonstrative à partir des définitions et des axiomes sont les *théorèmes* de la théorie ; axiomes et théorèmes en constituent les *thèses* ».

Ses moyens : un matériel expressif (expressions primitives ou atomes, expressions élaborées ou molécules), des signes (opérateurs, quantificateurs), des règles précises seules autorisées (*critères de formation, critères de substitution, critères de déduction*). Dans ces deux chapitres, rapides et incisifs, tous les critères sont parfaitement dégagés et les démonstrations présentées sont complètement analysées.

En résumé, le livre de M. J. Chauvineau est une œuvre de haute précision. Dans ce cadre restreint, il est certes impossible de multiplier les modèles, mais les structures essentielles y sont dessinées avec une telle netteté que les exemples se présentent d'eux-mêmes en abondance à l'imagination du lecteur. C'est un des privilèges des ouvrages de la collection « Que sais-je ? », d'offrir avec sobriété la matière d'une ample réflexion.

Y. C.

Comment poser et résoudre un problème, par G. Polya. Traduit par Mme C. Mesnage, avec une préface de M. G. Darmois. Edité par Dunod, 1957. L'édition originale a été publiée sous le titre « How to solve it », Princeton University Press, Princeton, N.-Y. (U.S.A.).

Voici un livre sur la Méthode de Redécouverte, cette méthode est certes bien connue en France où elle est pratiquée par les professeurs de Mathématiques depuis une trentaine d'années. C'est donc à un public particulièrement averti que s'adresse l'édition française de l'ouvrage de M. G. Polya.

Le livre s'ouvre sur un double tableau ; la page de gauche comporte quatre grands titres :

I. Comprendre le problème.
II. Concevoir un plan.
III. Mettre le plan à exécution.
IV. Examiner la solution obtenue.

La page de droite comporte quatre plans partiels détaillés, homologues des quatre grands titres ci-dessus.

Voici une démarche bien naturelle, pensons-nous, n'est-ce pas ainsi que nous procédons d'habitude ? Sans doute, mais entrons dans le détail.

La première partie place le professeur et ses élèves dans la salle de classe et leur propose un problème très classique : le calcul de la diagonale du parallélépipède rectangle. Ce problème est traité, à la redécouverte, le tableau initial fournissant le fil d'Ariane. Après ce premier exemple profondément analysé, d'autres suivent, toujours conduits à la redécouverte, mais sur un rythme plus alerte.

La seconde partie, très courte, intitulée « résoudre », est un dialogue à la manière socratique. « D'où faut-il partir ? Que puis-je faire ? Comment une idée peut-elle servir ? », demande le néophyte, et l'auteur de répondre par maints conseils judicieux.

La troisième partie, la plus importante et la plus originale, est un « petit dictionnaire d'Heuristique ». D'après la définition même de l'auteur, l'Heuristique moderne s'efforce de comprendre la méthode conduisant à la solution des problèmes ; elle étudie en particulier les opérations mentales typiquement utiles à l'application de cette méthode.

Parcourant ce dictionnaire nous rencontrons les termes familiers de notre langage, — condition, définition, figure... — mais nous nous trouvons aussi en présence d'articles inattendus. Citons-en deux à titre d'exemples :

« Qu'est-ce qu'une *Idée lumineuse ?* — C'est une transformation brusque et essentielle de notre point de vue, une réorganisation soudaine de notre façon de concevoir le problème, une précision des étapes qui nous mèneront à la solution. »

Et voici la présentation du *Futur Mathématicien :*

« Le *Futur Mathématicien* s'instruit comme tout le monde par l'imitation et la pratique. Il cherche un modèle à imiter, observe un professeur qui le stimule, rivalise avec un ami capable. Ensuite, et c'est peut-être le plus important, il lit non seulement des manuels courants, mais aussi de bons auteurs, jusqu'à ce qu'il en trouve un dont il est naturellement porté à imiter le style, il ajoute et recherche ce qui lui paraît simple, instructif et beau. »

Après de séduisantes variations enrichies de nombreux problèmes, le grand tableau en quatre titres offre une conclusion très simple à cet ouvrage spirituel et profond.

Y. C.

L'aspect moderne des Mathématiques, par Mlle Lucienne FÉLIX, avec préface et commentaires de M. G. BOULIGAND. Un volume de 172 pages, Blanchard, édit.

Puisque tous les lecteurs du *Bulletin* de l'A.P.M. connaissent Mlle Lucienne FÉLIX, ils seront certainement d'accord avec moi pour penser que personne n'était plus qualifié que notre Collègue pour tenter de présenter, dans un nombre réduit de pages et sous la forme la plus élémentaire, les idées modernes et les tendances actuelles des Mathématiques. La réussite me paraît complète.

Entendons-nous. Mlle FÉLIX, dès son premier mot, précise : « Ceci n'est pas un livre *de* Mathématiques ; c'est un livre *autour* des Mathématiques. » Et c'est un livre réussi, car il donne envie au lecteur de pénétrer *dans* les Mathématiques. Il ne décrit pas par le menu les mille et une merveilles de ce domaine mystérieux, de ce « Paradou » des esprits abstraits, de ce riche atelier où se forge la civilisation de l'avenir. En si peu de pages et en restant à ce niveau élémentaire, on pense bien que c'est impossible. Mais, beaucoup mieux, Mlle FÉLIX ouvre les grandes perspec-

tives, nous fait comprendre les richesses en profondeur de ce monde du silence à peine exploré et plus coloré, plus vivant encore peut-être que celui que nous avons admiré au cinéma.

Que l'auteur me pardonne ces métaphores risquées : son enthousiasme si sympathique les justifie tout aussi bien que sa vision très large de l'évolution des idées. Les deux premiers chapitres, sur la révision des valeurs au début du XX^e siècle, rapprochent les idées sur la musique et sur la peinture abstraite, sur les sciences de la nature et enfin sur les Mathématiques. Le chapitre sur les nouvelles tendances mathématiques a le mérite, en situant celles-ci dans le contexte historique, de montrer que si elles sont nouvelles par leur contenu et certains de leurs aspects elles sont un aboutissement de certaines idées anciennes tout autant qu'un départ vers de nouvelles conquêtes. Perpétuel balancement entre l'organisation axiomatique du domaine exploré et l'invention libre vers les domaines inexplorés, tel est le climat général de la science vivante.

Avant d'en arriver à la *description* des Mathématiques modernes, Mlle FÉLIX traite de la question des fondements en exposant quelques aspects de métamathématique. Le chapitre « Logique et symbolisme », en quelques pages fort suggestives, souligne l'intérêt d'un travail comme celui de notre Collègue CHAUVINEAU, dont il est rendu compte par ailleurs. La conclusion de ces préliminaires permet à Mlle FÉLIX d'expliquer la signification de l'œuvre de Bourbaki.

Sous le titre modeste « Quelques pas dans les Mathématiques », l'auteur décrit les deux piliers du temple mathématique : l'Algèbre et la Topologie générales. On ne peut résumer un exposé si dense et si brillant, on y renvoie le lecteur. Pas de meilleure introduction aux études toujours à recommencer par le professeur de Mathématiques, qui veut rester en contact assez étroit avec la science de son temps (et non pas celle de sa jeunesse). Quelques aperçus des grandes théories suggèrent enfin au lecteur le moins averti que nous en sommes restés aux paroles de bienvenue, sur le seuil, et que pour pénétrer plus avant, pour connaître toutes les richesses du domaine ou pour l'enrichir, il faut une étude plus profonde.

Mais nous voilà déjà suffisamment avertis pour nous poser quelques questions sur l'aspect pédagogique. Mlle FÉLIX a réuni dans ce chapitre le fruit de son expérience. Personnellement, je regrette que notre Collègue n'ait pas ici multiplié les exemples ; la place lui manquait. Mais en conclusion elle insiste justement sur la nécessité pour tous ceux qui enseignent de faire l'effort de suivre, ne serait-ce que de loin, les progrès de la science qu'ils enseignent.

Ce livre aura le mérite particulier d'y aider. Les heureuses citations dont il fourmille renvoient à des ouvrages parfois difficiles à retrouver (*Les entretiens de Zurich*, par exemple). Une page de renseignements bibliographiques, un index final n'auraient pas été superflus. Mais ce sont minces reproches qui ne comptent pas devant ce qu'un tel livre apporte à qui aime les Mathématiques et souhaite les faire aimer.

G. W.

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS

ARRÊTÉ DU 12 AOUT 1957

RÉFLEXIONS SUR LES PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ

Les instructions concernant l'enseignement des Mathématiques, publiées dans la brochure éditée en janvier 1957 par la Direction de l'Enseignement du Second Degré, laissaient prévoir une révision prochaine des programmes. L'intensité du mouvement scientifique contemporain, l'extraordinaire développement et la rapide évolution des techniques ne peuvent manquer d'avoir une influence sur les conditions mêmes de notre enseignement ; car, s'il ne peut être question de modifier l'essence et la nature des éléments dont la présentation méthodique est la mission de nos professeurs, il n'en reste pas moins que les moyens d'accès aux notions de base, ainsi que l'apprentissage de leur mise en œuvre, peuvent et doivent être révisées, en essayant de les mettre en harmonie avec le rythme de la vie moderne, puisqu'il s'agit pour nous de préparer les jeunes à comprendre, et, si possible, à dominer les grands problèmes qui se poseront à eux dans un très proche avenir.

Il convient, à cet égard, de remarquer que l'école n'a plus, comme elle pouvait paraître l'avoir naguère, le privilège de *tout* révéler à l'enfant et à l'adolescent. A tous les âges, l'élève arrive en classe avec un bagage, souvent fort important, de connaissances enregistrées (parfois même bien assimilées) hors des manuels scolaires et des « leçons » du maître : la lecture de livres, de revues, de journaux, les voyages, la « radio », la télévision, le cinéma, le théâtre, les disques constituent des sources d'information dont l'influence et la portée ne peuvent être méconnues. Le professeur doit à tous les niveaux, tenir compte d'un tel état de fait, et doit, loin de le considérer comme négligeable ou désastreux, s'en servir habilement, en procédant aux contrôles et aux mises au point indispensables.

Dans le cadre actuel de l'organisation de l'Enseignement du Second Degré, il a semblé que la division en deux cycles devait être conservée.

Au cours des quatre premières années, un enseignement d'initiation, commun à tous, partant des domaines de l'observation et de l'expérience accessibles aux enfants, est destiné, d'une part, à dégager une présentation de quelques êtres et de quelques notions mathématiques, dont le caractère abstrait ne doit pas faire oublier l'origine concrète, d'autre part, à préparer l'accès aux formes logiques de la pensée et à leur mise en œuvre à l'occasion de problèmes simples.

Sans doute, la matière des programmes des quatre classes de ce premier cycle ne paraît guère, dans son fond, pouvoir différer de ce qu'elle est aujourd'hui, car il s'agit, en liaison très étroite avec les acquisitions déjà réalisées pendant la scolarité du Premier Degré, de préparer le terrain, d'apporter et de rassembler les premiers matériaux pour le futur édifice. Pourtant, il a paru nécessaire d'attirer l'attention sur quelques aspects, parfois oubliés, parfois négligés, de cette initiation à l'abstrait et aux représentations symboliques, qui n'a quelque chance d'être efficace et de retenir l'intérêt que si elle prend véritablement racine dans le réel familier à l'enfant, et si, de plus, elle apporte manifestement des moyens pratiques, utilisables, pour « résoudre » certaines difficultés, pour répondre à certaines questions naturellement posées, pour aller plus loin dans l'exploration du monde environnant.

C'est pourquoi le libellé des nouveaux programmes de Sixième et de Cinquième comporte une rubrique « travaux pratiques » ; on marque par là que cet enseignement d'initiation ne doit point se borner à une simple présentation théorique (même active, même vivante) des notions énumérées dans les divers paragraphes : chaque acquisition nouvelle, qu'il s'agisse d'une définition ou d'une propriété, doit être précédée, ou accompagnée, d'une prise de contact avec un fait, ou un événement réel, ou réalisable, ou observable.

Il va de soi que ces « travaux pratiques » ne peuvent être dissociés, mis à part de l'enseignement même ; ils lui sont intimément liés, ils en sont partie intégrante. Il est peut-être utile, à ce sujet, de préciser qu'il ne faut pas établir de confusion entre ces « travaux pratiques », inséparables de l'enseignement, et des séances de « direction de travail » organisées par groupes assez restreints pour que l'action du maître puisse s'exercer sur *chacun*, directement, et aussi longtemps qu'il est nécessaire. Bien entendu, de telles séances de « direction de travail » prévues d'ailleurs par les « instructions générales » d'avril 1947 restent indispensables.

Pour le second cycle, la séparation actuellement marquée, dans le domaine des Mathématiques, entre sections « littéraires » et « scientifiques » si elle ne peut être totalement évitée, devrait être sensiblement atténuée, en ce qui concerne les classes de Seconde et de Première. Car il convient d'amoindrir, sinon de faire disparaître, les graves difficultés que rencontrent aujourd'hui nombre de jeunes gens qui, engagés au sortir de la Troisième dans les actuelles sections A et B, se trouvent, au moment du choix terminal, dans une sorte d'impasse, et sont pratiquement obligés, à moins de procéder à une « conversion » qui peut être difficile à réaliser, ne serait-ce que par le temps qu'elle exige, de renoncer à certaines carrières où un minimum de connaissances scientifiques est indispensable.

Il ne s'agit point d'ailleurs de revenir à « l'égalité scientifique » qui avait été instituée par la réforme de 1925 ; à côté d'avantages indéniables, des inconvénients sérieux s'étaient révélés, dont l'un des plus graves était sans doute un alourdissement considérable du programme de la classe de Mathématiques. Sans apporter de bouleversements à la structure actuelle des classes du second cycle, il paraît possible de prévoir, pour les sections A et B, un enseignement mathématique, sensiblement allégé par rapport à celui des sections C et moderne, mais apportant les connaissances essentielles qui permettraient aux élèves de poursuivre, sans difficulté majeure, des études scientifiques du niveau des classes de Mathématiques ou de Sciences Expérimentales. La seule condition préalable à réaliser concerne les horaires, mais la mesure à prendre est déjà préparée dans l'organisation présente : il suffirait en effet de rendre obligatoire l'heure et demie « facultative » prévue actuellement pour la section B, en étendant cette disposition à la section A (en laissant naturellement subsister, pour les meilleurs, la section A'), ce qui porterait à trois heures l'horaire de Mathématiques des sections « littéraires ».

Dans le même ordre d'idées, il paraît désirable que l'horaire de Mathématiques, dans la classe de philosophie, comporte deux heures, au lieu d'une heure et demie, sans qu'il soit question, bien entendu, d'accroître le programme, qui est essentiellement constitué par des notions d'algèbre et des notions d'astronomie, dont l'étude offre des thèmes de réflexions trop évidemment liés aux préoccupations des apprentis-philosophes pour que l'on ne s'efforce pas d'améliorer quelque peu les conditions dans lesquelles est donné cet enseignement.

Quant aux programmes du second cycle, il convient d'abord d'observer qu'ils doivent être établis en liaison avec ceux du premier cycle, bien que la classe de Seconde puisse être considérée comme constituant, dans le déroulement des études, un seuil nouveau, correspondant à l'âge des élèves et aux acquisitions déjà réalisées.

Diverses tendances se sont manifestées depuis quelque temps, concernant l'aménagement des programmes de Mathématiques des années terminales ; ce n'est pas ici le lieu de les examiner en détail ; elles méritent une étude approfondie qui sera l'œuvre des prochains mois. Il va sans dire que la coordination avec les autres disciplines, et particulièrement avec les Sciences Physiques, ne devra pas, à cette occasion, être oubliée, comme elle l'a été parfois, car il s'agit là d'un aspect, et non des moindres, du souci de vraie culture qui est la marque dominante de notre Enseignement Secondaire.

CLASSE DE SIXIEME

Indications préliminaires

L'entrée en Sixième marque le début d'une étape nouvelle dans la formation intellectuelle de l'enfant, mais il importe, évidemment, qu'une liaison soit solidement établie entre la base essentielle constituée par certaines des acquisitions réalisées au cours de la scolarité du Premier Degré et l'enseignement qu'il va recevoir désormais.

C'est pourquoi le programme de cette classe n'apporte, formellement, aucune connaissance nouvelle, mais il ne s'agit ni d'une répétition ni d'une révision plus ou moins détaillée du programme du « cours moyen ».

Il conviendra d'abord, à l'occasion de chacun des chapitres, de procéder à l'inventaire de ce qui est déjà connu et correctement assimilé afin d'éviter de fastidieuses redites. Puis, les diverses questions seront reprises et étudiées non en imposant aux élèves quelques formules et quelques règles impératives, mais en s'efforçant de leur apprendre à regarder et à réfléchir. En restant dans le domaine familier aux enfants, on dégagera de l'observation, et parfois de l'expérience, quelques notions claires, quelques définitions précises, qui seront

mises en jeu dans des problèmes simples dont la recherche permettra de faire comprendre ce qu'est une solution complète, soigneusement exposée et correctement rédigée.

A cet égard, il importe de ne pas proposer des exercices ayant un caractère artificiel, bien propre à rebuter de jeunes esprits. Le choix de quelques « *centres d'intérêt* », liés à la vie courante, mettant en œuvre des connaissances diverses, permettra souvent de faire naître des thèmes de travail variés, ne relevant pas de l'application de quelques recettes préfabriquées, mais au contraire, susceptibles de retenir l'attention, de susciter le goût de découvrir par un effort personnel, de mettre au point et de parfaire.

Bien entendu, on saisira toute occasion de vérifier la bonne possession des mécanismes du calcul arithmétique élémentaire, et d'entretenir, en la rendant de plus en plus sûre, la pratique des opérations usuelles portant sur des nombres entiers, décimaux et sur quelques fractions simples. Le « calcul mental » sera souvent mis à contribution ; en obligeant à rompre certaines routines, il constitue une bonne gymnastique d'esprit. D'autre part, il sera fréquemment possible de présenter et d'utiliser sur des exemples, les notions importantes, et très accessibles d'approximation d'ordre de grandeur, d'encadrement d'un résultat entre des valeurs approchées, le travail de prévision et de recherche intervenant à ce propos ne se réduit pas à un banal exercice de calcul, car il exige une attitude de réflexion active dont l'acquisition, dès ce niveau, est tout à fait souhaitable.

Une autre idée, également importante, peut être dégagée dans l'étude de bon nombre de problèmes que l'on sera amené à traiter dans cette classe : celle de *correspondance*, établie entre deux grandeurs variables ; on se bornera, bien entendu, à des exemples concrets, relatifs à des grandeurs usuelles, bien déterminées ; il va sans dire qu'il ne s'agit en aucune façon d'une théorie générale et abstraite. Il semble que cette idée peut apparaître clairement en dressant des tableaux de correspondance entre deux suites de nombres représentant respectivement les mesures de divers « états » de deux grandeurs liées. On peut remarquer, à ce propos, que dans le cas de grandeurs variant proportionnellement, la considération de telles suites de nombres pourra parfois rendre inutile le recours à « la règle de trois » et à son automatisme non exempt de dangers ; la notion de pourcentage trouvera ici sa place naturelle. D'ailleurs, il est indispensable, et il sera facile de mettre en évidence qu'il existe d'autres types de correspondance que la proportionnalité.

L'étude des divers chapitres du programme sera rendue plus efficace et plus attrayante si elle est accompagnée et, dans bien des cas, précédée par des travaux pratiques. De tels exercices, bien choisis et bien conduits, tout en familiarisant les enfants avec l'emploi d'instruments usuels, permettront, d'une part, de leur faire réaliser des tracés, des modèles, des combinaisons de figures, illustrant certaines définitions ou certaines propriétés, et, d'autre part, de faire procéder à des comparaisons et à des mesures qui pourront constituer une vérification de quelque résultat ou de quelque formule, ou qui conduiront à des constatations numériques susceptibles de suggérer une relation entre certains des éléments mis en jeu. Il va de soi que l'interprétation de faits ainsi découverts « expérimentalement » devra toujours faire ressortir leur caractère particulier et restreint qui n'autorise pas la généralisation, mais qui peut suggérer ou orienter une recherche.

La rubrique « travaux pratiques » qui accompagne le programme de la classe n'a d'autre objet que de donner les indications dont le caractère n'est pas limitatif. Mais il importe de préciser qu'une séance de travaux pratiques ne doit jamais être utilisée pour faire faire quelque « devoir surveillé en temps limité », ou quelque autre exercice de contrôle ; il convient, au contraire, de la considérer comme une classe de pleine activité, qui requiert la présence du maître pour guider, conseiller, faire réfléchir.

Quelques notions d'astronomie figurent sous la rubrique des « travaux pratiques ». Elles seront présentées, dans toute la mesure du possible, à partir, ou à propos, d'observations réelles, portant sur l'aspect local de quelques phénomènes permanents (mouvement diurne, mouvements apparents du Soleil et de la Lune), ou exceptionnels (éclipses, comètes), on apprendra à en noter quelques caractères et quelques particularités (heure, durée, position dans le ciel), afin de pouvoir les analyser, les décrire correctement, parfois même établir certains rapprochements utiles pour préparer les explications à venir. Tout en satisfaisant la grande curiosité des enfants pour les choses de la nature, cette étude fournira la matière de nombreux exercices de Mathématiques, et apportera une aide appréciable à l'enseignement de la géographie.

La tenue d'un cahier d'observations relatives aux phénomènes qu'il aura été possible d'étudier directement, est particulièrement recommandée ; un tel travail, exigeant la mise en jeu de qualités d'ordre, de précision, de clarté, de sincérité, ne manquera pas d'intéresser

les élèves, car il portera sur des événements et des faits dont la recherche ou la découverte auront nécessité un effort personnel.

Dans les commentaires qui précèdent, il n'a pas paru utile de rappeler les recommandations déjà faites au sujet des *devoirs* donnés aux élèves, et, en particulier, celles qui concernent la nécessité bien évidente, surtout lorsqu'il s'agit des années d'initiation, d'une « période d'apprentissage », au cours de laquelle, à l'occasion de chaque devoir, on doit procéder, *en classe*, à une étude préparatoire, méthodiquement conduite à partir d'une lecture attentive du texte, des diverses questions posées, la recherche dirigée par le maître étant poussée plus ou moins loin, selon les circonstances. Les « Instructions générales » d'avril 1947 ont insisté longuement sur cette partie essentielle de notre enseignement.

Programme de la classe

I. — Segments de droite, droite, demi-droite. Egalité des segments. Addition ; Multiples et sous-multiples d'un segment.

Mesures des longueurs ; unités.

II. — Angles (première étude). Définition ; égalité ; addition, multiples et sous-multiples d'un angle

Mesure des angles ; unités. Opérations élémentaires sur les nombres représentant des mesures d'angles en degrés, minutes et secondes.

III. — Cercle (première étude). Centre, rayon, diamètre. Arcs ; angles au centre. Mesures des arcs sur un cercle de rayon donné ; unités.

Mesure expérimentale de la longueur d'un arc de cercle ; comparaison expérimentale des nombres mesurant un arc (en degrés, par exemple) et la longueur de cet arc (en centimètres, par exemple).

Formule donnant la longueur de la circonférence.

IV. — Sphère (étude expérimentale, en vue de la liaison avec la géographie, d'une sphère considérée comme surface de révolution). Méridien, équateur, parallèle. Longitude et latitude.

V. — Mesures du temps ; unités.

Opérations élémentaires sur les nombres représentant des durées exprimées en heures, minutes et secondes.

VI. — Définitions relatives aux polygones ; triangles ; rectangles, carrés, trapèzes. Notions sur la mesure des aires ; unités. Aire du rectangle, du triangle, du trapèze. Formule donnant l'aire du cercle.

(La présentation des polygones peut naturellement être faite en liaison avec l'étude expérimentale de quelques solides usuels, mentionnés au paragraphe VII).

VII. — Définitions relatives à quelques solides : cubes, parallélépipèdes rectangles ; prismes droits ; cylindres de révolution ; pyramides ; cônes de révolution.

Surfaces latérales ; développement. Aire latérale d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution, d'une pyramide régulière.

Notions sur la mesure des volumes et des capacités ; unités. Volume d'un parallélépipède rectangle, d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution. Formules donnant les volumes d'une pyramide régulière, d'un cône de révolution.

Formules donnant l'aire et le volume de la sphère.

VIII. — Mesures des poids ; balance. Poids spécifique.

IX. — Mouvements uniformes. Vitesse.

Travaux pratiques

A l'étude de chacun des chapitres du programme se lient très naturellement des travaux pratiques qui serviront à présenter une notion, à préparer ou à utiliser une définition, à découvrir une relation entre certains faits ou certains êtres, à vérifier un résultat ou une formule, à suggérer quelque problème nouveau.

Pour réaliser ces travaux, les élèves auront à utiliser, d'une part, des instruments de dessin usuels : règles, équerres, compas papier calque, papier millimétré ou quadrillé, — d'autre part, des instruments ou appareils de mesure tels que mètres, décimètres, pieds à coulisse, palmers, curvimètres, rapporteurs, balances, montres. L'emploi de ces instruments

doit être soigneusement expliqué et attentivement contrôlé, afin que leur maniement par les enfants ne se réduise pas à de simples gestes d'imitation, mais devienne un acte réfléchi, adapté à l'exécution de tel ou tel travail.

La notion d'échelle d'un dessin ou d'un plan sera introduite à l'occasion d'exercices de représentation de figures ou d'objets.

L'étude des solides simples sera faite à partir de modèles préfabriqués, ou construits par les élèves, à cet effet, on utilisera au mieux les ressources que peuvent offrir les laboratoires de sciences de l'établissement.

La comparaison et la mesure de poids à l'aide de la balance trouveront des applications variées dans le domaine de la géométrie pratique : comparaison et mesures de longueurs, d'aires, de volumes, de capacités. Diverses déterminations expérimentales de valeurs approchées du nombre π peuvent donner lieu à d'intéressantes réflexions.

A ces travaux, comportant le maniement de certains instruments, la réalisation d'un dessin, la manipulation d'un modèle ou d'un appareil de mesure, s'adjoindront très directement des exercices pratiques d'arithmétique tels que des constructions de tables de valeurs numériques, ou de tables de correspondance entre des mesures de grandeurs variables liées, les nombres mis en jeu provenant soit d'opérations pratiques effectivement réalisées (mesures de longueurs, pesées, repérages d'une durée...), soit de calculs faits à partir d'une formule littérale, dans laquelle on a donné aux lettres diverses valeurs numériques.

Remarquons enfin que le programme ne mentionne pas explicitement les notions sur les monnaies, sur les prix, ou sur les intérêts simples ; mais il va de soi que ces notions devront être revues à l'occasion d'exercices pratiques et de problèmes liés à la vie courante.

Notions d'astronomie. Il a déjà été précisé dans quel esprit devaient être présentées ces notions. Les titres ci-dessous ne constituent pas un programme, mais un cadre dans lequel pourront être puisés les sujets d'observation et d'étude, adaptés au niveau des élèves, aux goûts qu'ils manifestent, et aux moyens matériels dont on disposera.

Observation du mouvement diurne. Orientation. Plan méridien local. Description et identification de quelques constellations.

Lever et coucher du Soleil (heures et directions). Inégalité des jours et des nuits, saisons.

Lune : phases (horaire de visibilité).

Identification des planètes visibles. (Il s'agit uniquement de phénomènes observés et décrits *localement*).

CLASSE DE CINQUIEME

Indications préliminaires

L'enseignement de la classe de Sixième a préparé les voies d'accès à une initiation méthodique aux notions mathématiques, initiation qui doit se poursuivre, d'année en année, jusqu'à la fin des études secondaires, en adaptant progressivement, avec beaucoup de prudence, ses exigences de logique et de rigueur au développement intellectuel des élèves. En Cinquième, ces exigenes seront encore très modestes ; elles n'apparaitront que peu à peu, lorsque leur intérêt et leur nécessité se seront en quelque sorte imposés, en conclusion d'études posément conduites, partant toujours des domaines familiers et accessibles aux enfants. C'est dire qu'il ne s'agit point de rompre avec un passé encore tout proche ; au contraire, il est indispensable d'établir, en toute occasion, des liaisons précises avec les acquisitions de l'année précédente, qui, presque toujours, pourront servir de point de départ pour la présentation de notions plus précises ou plus complètes.

Le commentaire qui accompagne le programme de Sixième, et les indications données pour les travaux pratiques dans cette classe, restent, dans leur ensemble, applicables pour la Cinquième ; quelques remarques suffiront pour les compléter.

D'abord, il convient d'attirer l'attention sur l'importance de la partie du programme d'arithmétique qui concerne la construction progressive des nombres, les définitions relatives à leur comparaison et à leurs combinaisons par les opérations élémentaires, ainsi que la présentation de leurs propriétés fondamentales. C'est sur cette base que s'édifiera, un peu plus tard, l'algèbre ; elle doit donc être établie avec beaucoup de soin, en partant naturellement de ce qui est accessible aux jeunes élèves, et en les guidant avec précaution dans la voie de la généralisation et de l'abstraction, afin d'arriver à une correcte compré-

hension du sens des symboles de relations et d'opérations, avec leurs propriétés essentielles (fort peu nombreuses, du reste), qui, après la mise au point de leurs énoncés, pourront être traduites en quelques formules littérales.

Quant au programme de géométrie, il correspond à un enseignement d'initiation qui doit naturellement s'appuyer sur l'observation et l'expérience. Une fois les premières notions acquises, apparaîtront les questions dont l'étude mettra en jeu les idées de raisonnement et de déduction. Les difficultés éprouvées par les débutants lors de ce premier contact avec les exigences logiques proviennent souvent du vocabulaire, de quelque mot mal compris, peut-être parce qu'il a été hâtivement ou incomplètement expliqué. Ces difficultés seront sans toute sensiblement atténuées si, à l'occasion de chaque problème (y compris les problèmes donnés en devoir), l'on prend soin de s'assurer que l'énoncé est parfaitement clair dans l'esprit de l'élève, qu'il évoque en lui des images précises et correctes, tant pour les éléments donnés que pour les éléments inconnus, et si, d'autre part, la recherche de la solution est préparée par une sorte de recensement, et par une mise au point des notions qui vont être mises en œuvre.

Si, dans l'exposé de certains chapitres, l'on est conduit à admettre quelque propriété dont la démonstration paraît trop difficile, ou inopportune, il convient que les élèves en soient informés nettement. Cette remarque est d'ailleurs valable à tous les niveaux de l'enseignement.

Programme de la classe

Arithmétique.

I. — *Nombres entiers*

1° Notion de nombre entier ; suite naturelle des entiers. Nombres égaux, nombres inégaux.

Notation décimale.

2° Addition, somme ; propriétés de l'addition. Multiplication, produit ; propriétés de la multiplication. Définitions du carré, du cube, de la puissance *n*ième.

Conventions d'écriture relatives aux signes opératoires dans une suite d'additions et de multiplications ; usage des parenthèses.

Produit d'une somme par un nombre ; mise en facteur ; produit de deux sommes.

Pratique de l'addition et de la multiplication.

3° Problème de la soustraction ; différence.

Opérations sur les sommes, les différences et les produits.

Pratique de la soustraction.

4° Multiples d'un nombre ; diviseurs d'un nombre.

Problème de la division ; quotient exact, quotient à une unité près et reste.

Pratique de la division.

5° Caractères de divisibilité par 2, 5, 4, 25, 9, 3.

Notions de diviseurs communs et de multiples communs déduites de la comparaison de tables de diviseurs et de multiples.

II. — *Nombres fractionnaires*

1° Fractions de grandeurs (segments, angles, arcs d'un même cercle...). Notion de fraction. Fractions égales, fractions inégales.

Simplification ; réduction à un même dénominateur.

2° Opérations sur les fractions (présentées en liaison avec des problèmes concrets).

Multiplication, produit, propriétés de la multiplication ; définitions du carré, du cube, de la puissance *n*ième.

Problème de la division ; quotient exact ; inverse d'un nombre. Propriétés du quotient exact.

Addition, somme ; propriétés de l'addition.

Problème de la soustraction ; différence.

Comparaison des nombres fractionnaires.

Extension aux nombres fractionnaires des propriétés des sommes des différences et des produits de nombres entiers. Produit et quotient de deux puissances entières d'un même nombre.

3° Fractions décimales ; nombres décimaux.

Pratique de l'addition, de la soustraction, de la multiplication des nombres décimaux.

Division d'un nombre par un autre (nombres entiers, fractionnaires, décimaux) ; quotient exact ; quotients approchés à une unité près, à un dixième près, à un centième près... Pratique de l'opération.

Note. — L'étude des diverses questions concernant les nombres entiers et les nombres fractionnaires a donné lieu, bien entendu, à une introduction progressive de l'emploi des lettres (*arithmétique littérale*). Il est recommandé, à la fin de cette étude, de faire le bilan des résultats essentiels ainsi acquis, de les énoncer avec précision, et de les résumer en quelques formules, accompagnées d'une légende rappelant la signification des lettres qui y figurent.

III. — *Application*

Résolution de problèmes concrets, dont les données sont numériques, et dont l'inconnue est représentée par une lettre. (Il s'agit seulement de problèmes au sujet desquels ne doit point se poser pratiquement la question de l'existence des éléments que l'on recherche et dont la solution peut être calculée par l'application des propriétés des opérations élémentaires de l'arithmétique).

GÉOMÉTRIE.

1° Notions de droite, de segment de droite, de demi-droite. Segments égaux, segments inégaux. Notion de plan.

2° Angles ; angle saillant, angle rentrant, angle plat. Angles égaux, angles inégaux. Somme de deux angles. Angles supplémentaires.

Bissectrice d'un angle. Angle droit ; angles complémentaires.

Angles opposés par le sommet. Angles formés par deux droites sécantes.

Droites perpendiculaires. Définition de la médiatrice d'un segment et de points symétriques par rapport à une droite.

3° Cercle. Cercles égaux. Arc de cercle, angle au centre. Comparaison de deux arcs sur un même cercle ou sur des cercles égaux.

(Les notions sur la mesure des segments, des angles et des arcs de cercle ont été présentées en Sixième ; elles seront rappelées à l'occasion d'exercices et de travaux pratiques).

4° Triangle. Triangles égaux. Triangles particuliers.

Nomenclature de quelques droites remarquables d'un triangle.

Les deux premiers cas d'égalité des triangles.

Triangle isocèle. Propriétés de la médiatrice d'un segment.

Le troisième cas d'égalité des triangles.

Cas d'égalité des triangles rectangles.

Travaux pratiques

La présentation des notions d'arithmétique et de géométrie du programme de Cinquième trouve ses points de départ dans le domaine concret ; elle doit être fondée sur des observations et des expériences, dont certaines auront pu déjà être rencontrées l'année précédente, et mériteront d'être reprises soit pour les compléter, soit pour en dégager quelques aspects nouveaux.

De nombreux exercices de dessin accompagneront l'étude des divers chapitres de la géométrie ; ils comporteront notamment des constructions de figures, des comparaisons, des vérifications expérimentales, des mesures dont on ne manquera pas de faire ressortir le caractère limité et restreint, afin de faire peu à peu saisir la différence entre la constatation, même répétée, d'un fait particulier et une démonstration générale.

La construction de tables de valeurs numériques et de tables de correspondance, l'utilisation pratique de telles tables, dont il a été fait mention pour la classe de Sixième, trouvent naturellement leur place en Cinquième, à l'occasion de diverses questions du pro-

gramme : tables de carrés, tables de cubes, listes de diviseurs et de multiples conduisant à la recherche de diviseurs communs et de multiples communs à deux ou plusieurs nombres...

Le repérage d'un point sur une demi-droite à l'aide d'un nombre, le repérage d'un point dans un quadrant à l'aide de deux nombres « rangés » peuvent être présentés en liaison avec les notions d'arithmétique ; on pourra ainsi donner une première idée précise, sur des exemples simples, de la représentation graphique de certaines correspondances.

Notions d'astronomie. — Les recommandations faites pour la classe de Sixième conservent ici toute leur valeur, et les titres qui suivent constituent un cadre très large et non un « programme » dont il s'agirait de traiter intégralement tous les chapitres :

Complément sur le mouvement diurne ; constellations circompolaires ; coordonnées horizontales.

Mouvement apparent du Soleil ; passage au méridien ; jour solaire vrai ; heure solaire vraie. Cadran solaire.

Phases de la Lune ; lunaison.

La Terre et les fuseaux horaires.

RAPPORT SUR L'AGREGATION FÉMININE DE MATHÉMATIQUES (session de 1956) *

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL
(M. VILLAT)

La question proposée consistait en l'étude de la généralisation d'un problème d'analyse tout à fait élémentaire.

Lorsqu'une circonférence reste tangente à l'axe $x'Ox$ du plan (xOy), son centre décrivant une courbe S définie par l'équation $y = f(x)$ dans le plan, elle enveloppe, en dehors de la droite $x'Ox$, une autre courbe Σ, les points de contact étant M sur $x'Ox$ et P sur Σ. Pour que les points M et P parcourent constamment, sur leurs lieux respectifs, des arcs égaux, il est nécessaire et suffisant que la courbe S soit une chaînette ayant pour base $x'Ox$, — mis à part le cas particulier et trivial où S serait une droite.

On demandait tout d'abord de donner une démonstration simple de ce résultat, et c'est ce qui a été fait à peu près correctement dans la quasi-totalité des copies : tout revenait à l'intégration de l'équation $yy'' - 1 - y'^2 = 0$ (mis à part le cas où $y'' = 0$).

Dans la partie II, on abordait la généralisation de ce qui précède en considérant, dans l'espace $(Oxyz)$, une sphère variable, tangente au plan xOy, son centre décrivant la surface S définie par l'équation $z = f(x, y)$, les axes de coordonnées étant, bien entendu, comme dans le plan, rectangulaires. Cette sphère touche son enveloppe d'abord en un point M du plan xOy, et en un point P décrivant la seconde nappe Σ de ladite enveloppe. Est-il possible de choisir S de telle manière que les déplacements des points M et P soient constamment égaux ?

Une sphère quelconque de la famille considérée, ayant pour centre le point de coordonnées $[x, y, z = f(x, y)]$, touche le plan xOy du point M (x, y, O), et la nappe Σ en un point P dont les coordonnées apparaissent tout naturellement, par un calcul élémentaire, sous la forme

$$x + \lambda p, \qquad y + \lambda q, \qquad -\lambda,$$

p et q étant les dérivées partielles premières de $f(x, y)$ par rapport à x et y, et λ étant défini par la relation

$$\lambda(1 + p^2 + q^2) + 2z = 0 ;$$

(*) Le début de ce rapport a été publié par le *Bulletin* de l'A.P.M., n° 185 de juin 1957.

bien entendu, les points M et P sont symétriques par rapport au plan tangent à la surface S au point (x, y, z), centre de la sphère envisagée.

Dès lors, la condition d'égalité des déplacements de M et de P se traduit par le système de relations :

$$\begin{cases} [dx + d(\lambda p)]^2 + [dy + d(\lambda q)]^2 + d\lambda^2 = dx^2 + dy^2, \\ \lambda(1 + p^2 + q^2) + 2z = 0, \end{cases}$$

dont on voit facilement qu'il est équivalent au système

$$\begin{cases} \lambda(dp^2 + dq^2) + 2(dp\,dx + dq\,dy) = 0, \\ \lambda(1 + p^2 + q^2) + 2z = 0, \end{cases}$$

la solution $\lambda = 0$ ayant été évidemment écartée.

En exprimant que cette condition a lieu quel que soit le déplacement dx, dy, on obtient le système de relations

$$\begin{cases} \lambda(r^2 + s^2) + 2r = 0, \\ \lambda(s^2 + t^2) + 2t = 0, \\ s[\lambda(r + t) + 2] = 0, \\ \lambda(1 + p^2 + q^2) + 2z = 0, \end{cases}$$

où r, s, t désignent, avec les conventions habituelles, les dérivées partielles secondes de z.

Le cas particulier $s = 0$ s'examine aisément, et conduit pour la surface S, soit à un plan, soit à un cylindre (parallèle à Ox ou à Oy) dont la section droite est une chainette. Ces solutions étaient faciles à rattacher aux résultats de la première partie.

La troisième relation étant débarrassée du facteur s, si l'on remplace les deux premières relations par celles que l'on en déduit par soustraction et par addition, on voit immédiatement que l'une de ces nouvelles relations est conséquence de la troisième, et le système se réduit à

$$\begin{cases} \lambda[r^2 + t^2 + 2s^2] + 2(r + t) = 0, \\ \lambda(r + t) + 2 = 0, \\ \lambda(1 + p^2 + q^2) + 2z = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que les fonctions z cherchées doivent être solutions du système, indiqué d'ailleurs dans l'énoncé :

$$\begin{cases} rt - s^2 = 0, & (1) \\ z(r + t) - (1 + p^2 + q^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

Beaucoup, parmi les candidates, ont obtenu effectivement ces équations, mais bien souvent au moyen de calculs infiniment trop longs et inélégants. En général, on a remplacé dès le début, dans l'expression des coordonnées de P, le paramètre λ par son expression en fonction de z, p, q, et l'on a formé le ds^2 relatif à un déplacement quelconque de P en explicitant toutes les différentielles rencontrées ; on est conduit ainsi à des opérations pénibles et interminables. Il y a là un défaut de bon sens : un candidat à un concours doit se croire fondé à penser qu'on n'exige pas de lui dix pages de calculs pour établir des formules utiles à la solution du problème posé ; un peu de réflexion au départ, ou en cours de route, fera toujours gagner un temps précieux.

L'étude du système des deux équations (1) et (2) était l'objet des parties III et IV.

L'équation (1) exprime que la surface S cherchée est une surface développable, qui peut être définie comme l'enveloppe d'un plan dont l'équation sera prise sous la forme

$$z = ax + by + c, \qquad (3)$$

où a, b, c, sont trois fonctions, supposées dérivables, d'un paramètre u, que l'on pourra choisir ultérieurement ; reste alors à traduire la relation (2). Le calcul de p, q, r, s, t correspondant à l'enveloppe du plan (3) est élémentaire, et le transfert dans (2) des expressions obtenues conduit à la condition

(4) $(a'^2 + b'^2)\ (ax + by + c) + (a^2 + b^2 + 1)\ (a''x + b''y + c'') = 0$

qui doit être satisfaite en tout point de S.

Ici, de nombreuses candidates ont commis une erreur, en affirmant que : « puisque l'équation (4) doit être vérifiée sur toute la surface, c'est qu'elle est vérifiée identiquement par rapport à x et y ». Cela est inexact, car les points de S satisfont à l'équation

(5) $$a'x + b'y + c' = 0,$$

qui doit être adjointe à l'équation du plan (3) pour définir l'enveloppe de ce plan. Alors, les deux relations (4) et (5) ne pouvant être distinctes, les fonctions a, b, c sont astreintes aux conditions

(6) $$\frac{a(a'^2+b'^2)+a''(a^2+b^2+1)}{a'} = \frac{b(a'^2+b'^2)+b''(a^2+b^2+1)}{b'} = \frac{c(a'^2+b'^2)+c''(a^2+b^2+1)}{c'},$$

qui exigent évidemment que l'on ait, quel que soit u :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire qu'il y ait une relation linéaire et homogène, à coefficients constants, entre a, b, c. Cela signifie que la trace du plan (3) sur le plan xOy passe par un point fixe.

Si ce point est à l'infini, on peut le supposer sur la droite Oy ; on a alors $b = 0$, et les conditions (6) se réduisent à

(7) $$(1 + a^2)\ (a'c'' - c'a'') - a'^2\,(ac' - ca') = 0.$$

Profitant alors de l'indétermination du paramètre u, on peut poser

$$a = \operatorname{sh} u,$$

d'où l'équation en c :

$$c''.\operatorname{ch} u - 2c'.\operatorname{sh} u + c.\operatorname{ch} u = 0,$$

qui admet visiblement, d'après la forme (7), la solution particulière $c = \operatorname{sh} u$. Cette remarque permet l'intégration élémentaire, qui conduit à la solution

$$c = \alpha\,(\operatorname{ch} u - u.\operatorname{sh} u) + \beta \operatorname{sh} u.$$

Le plan (3) est alors défini par l'équation

$$z = (x + \beta)\operatorname{sh} u + \alpha\,(\operatorname{ch} u - u \operatorname{sh} u)\ ;$$

l'enveloppe de ce plan est un cylindre dont la section droite, par le plan xOz, est la chaînette définie par les équations

$$x + \beta = \alpha u, \qquad z = \alpha \operatorname{ch} u.$$

La solution plus intéressante proviendra du cas où le point fixe du plan (3) est à distance finie. En transportant l'origine en ce point, ce qui revient à supposer $c = 0$, les conditions (6) se réduisent à une relation entre les fonctions a et b.

L'énoncé proposait alors de considérer a et b comme les coordonnées variables d'un point d'une courbe, enveloppe de la droite définie par une équation de la forme

(8) $$a \cos u + b \sin u - \gamma(u) = 0$$

dans un plan rapporté à des axes rectangulaires $(\omega a, \omega b)$. Le calcul de a, b et de leurs dérivées par rapport à u est facile, et la relation (6) se réduit alors à

(9) $$(\gamma + \gamma'')\ [1 + \gamma'^2 - \gamma\gamma''] = 0.$$

La solution $\gamma + \gamma'' = 0$ donne, comme lieu du centre de la sphère, un plan fixe. En dehors de cette solution banale, il reste celle donnée par l'équation

$$1 + \gamma'^2 - \gamma\gamma'' = 0,$$

dont la solution nous est déjà connue sous la forme

$$\gamma = \alpha \operatorname{ch} \frac{u - u_0}{\alpha}.$$

On peut supposer, sans inconvénient, $u_0 = 0$; il vient alors

$$\gamma = \alpha \operatorname{ch} \frac{u}{\alpha}, \qquad \gamma' = \operatorname{sh} \frac{u}{\alpha}.$$

Or, a et b sont définis par les deux relations

$$a\cos u + b\sin u - \gamma = 0,$$
$$-a\sin u + b\cos u - \gamma' = 0,$$

qui expriment que le vecteur $(a, b, -1)$ est normal aux deux vecteurs $(\cos u, \sin u, \gamma)$ et $(-\sin u, \cos u, \gamma')$, dont le second est le dérivé du premier. Il en résulte aussitôt que le cône ayant pour sommet O et pour directrice la courbe Γ $(\cos u, \sin u, \gamma)$ n'est autre que l'enveloppe du plan (3), et constitue par suite la surface S cherchée.

Cette courbe Γ, comme on le voit aisément, résulte de l'enroulement, sur un cylindre de révolution ayant pour rayon 1, d'une chaînette dont la base serait placée dans le plan de section droite xOy. Cette courbe est telle que son plan osculateur fasse, avec le plan tangent au cylindre de révolution en question, un angle constant.

Cette partie du problème n'a pas été réussie par beaucoup de candidates, la raison essentielle étant que l'on a écrit en général inexactement les conditions (6), en remplaçant, à tort, les dénominateurs par zéro.

La dernière question posée consistait à intégrer directement l'équation (2) :

$$z(r+t) - (1 + p^2 + q^2) = 0.$$

En posant $\alpha = x + iy$, $\beta = x - iy$, la fonction $z(x, y)$ devient une fonction $Z(\alpha, \beta)$, munie de dérivées P, Q, R, S, T, et l'équation (2) est transformée en l'équation

$$ZS - PQ = \frac{1}{4}, \tag{10}$$

comme une grande majorité des candidates l'a établi. Cette équation peut s'intégrer élémentairement, et ce fait a été démontré dans les meilleures compositions. L'équation (10) peut en effet s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{P}{Z}\right) = \frac{1}{4Z^2};$$

en posant $P = Z\varphi$, on est ramené à l'intégration du système

$$\left\{ \begin{array}{l} P = Z\varphi, \\ 4Z^2\varphi'_\beta = 1, \end{array} \right.$$

équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{l} 4Z^2\varphi'_\beta = 1, \\ \varphi'_{\alpha\beta} + 2\varphi\varphi'_\beta = 0. \end{array} \right.$$

La seconde équation exprime que $(\varphi'_\alpha + \varphi^2)$ est une fonction de α seul, que l'on peut mettre sous la forme $V(\alpha)^2 + V'(\alpha)$, $V(\alpha)$ étant une fonction dérivable de α ; on est ainsi ramené, pour déterminer φ, à une équation de Riccati

$$\varphi'_\alpha + \varphi^2 = V'(\alpha) + V(\alpha)^2,$$

dont une solution $V(\alpha)$ est en évidence. Le changement de variable

$$\varphi = V(\alpha) + \frac{1}{\theta}$$

conduit alors à l'équation linéaire

$$\theta'_\alpha = 2V\theta + 1$$

dont l'intégration est classique. On remarque, du reste, que la détermination de Z, qui est définie par la première équation du système :

$$4Z^2\varphi'_\beta = 1,$$

n'exige que la connaissance de θ, et non celle de φ, puisque

$$\varphi_\beta = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\theta}\right).$$

En posant $2V(\alpha) = -\frac{A''}{A'}$, A étant une fonction de α seul, l'équation linéaire en θ se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\theta.A') = A'$$

d'où

$$\theta.A' = A + B,$$

B étant une fonction de β seul. On en déduit :

$$\varphi_\beta = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A'}{A+B}\right) = \frac{-A'B'}{(A+B)^2},$$

et, par suite, Z, qui est définie par la relation

$$4Z^2 = \frac{(A+B)^2}{-A'B'}.$$

Pour cette épreuve, les notes obtenues par les candidates s'échelonnent entre 19,5 et 3, sans compter deux copies blanches. Après trois excellentes compositions, cotées 19,5 et 19 (deux fois), les notes se répartissent ainsi : quatre entre 15 et 17 ; neuf entre 13 et 15 ; huit entre 11 et 13 ; huit entre 9 et 11 ; vingt-quatre entre 7 et 9 ; treize entre 5 et 7, et douze entre 3 et 5.

La moyenne générale de l'épreuve est 8,8 ; elle s'élève à 10,8 pour le groupe des 54 admissibles et se réduit à 5,3 pour les 29 admissibles non reçues.

Pour les 54 admissibles, les notes varient de 19,5 à 4, mais sept notes seulement sont inférieures à 7, et toutes les candidates (sauf une) ayant obtenu au moins la note 9 sont parmi les admissibles.

Une dizaine des compositions sont d'un très bon mérite et prouvent que leurs auteurs ont nettement dominé les matières du programme.

Composition de Mécanique rationnelle

(M. Pailloux)

Le problème proposé était en fait très simple pour la candidate qui s'est aperçue que la mécanique n'est pas uniquement un exercice de Mathématiques, mais que cette discipline possède ses méthodes propres.

Le préambule suggérait l'emploi des théorèmes généraux, et écartait l'étude des réactions. Le simple contact de la sphère avec la droite Δ ou le plan Π était insuffisant pour que les réactions correspondantes soient convenablement dirigées, aussi supposait-on les liaisons bilatérales. Les procédés indiqués pour y parvenir, plan Π', cylindre Γ, ou surfaces analogues, modifiaient, grâce à une pression convenable, les composantes normales des réactions, et permettaient ainsi de les faire pénétrer dans les cônes de frottement. Les considérations d'ordre géométrique qui permettaient d'établir ces résultats avaient été écartées.

Dans tout le problème, la pesanteur n'intervenait que par la fonction de force $A\cos u + B\sin u$, dont les coefficients A et B se calculaient immédiatement en fonction du poids et des cosinus directeurs de la verticale par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$

Dans la question I (1° ou 2°), le théorème du moment cinétique en S montrait que la rotation instantanée de la sphère restait constante dans le temps. Il suffisait d'une seule équation pour achever l'étude du mouvement, celle qui détermine la variation de l'anomalie excentrique u en fonction du temps : le théorème des forces vives (1°), ou l'intégrale de Painlevé (2°) résolvaient la question. Dans (I, 1°) on pouvait remarquer que le mouvement de S était celui d'un point pesant sur une ellipse inclinée *d'une manière quelconque*, ce mouvement étant uniforme lorsque le plan Π est horizontal.

La position de la sphère, (II), dépendait ensuite de deux angles d'Euler et de u. La troisième équation d'Euler, et le théorème du moment cinétique par rapport à la verticale de S montraient que ces deux angles étaient des fonctions linéaires du temps ; le théorème des forces vives prouvait ensuite que la vitesse de S sur sa trajectoire était constante.

Dans la question du choc, il pouvait être utile de remarquer que le segment BS de longueur constante était normal aux trajectoires de ses extrémités. En appliquant donc le théorème du centre de gravité, en projection sur la tangente à l'ellipse en S, on constatait la continuité de la vitesse de S. Les moments cinétiques par rapport à SC et par rapport à la verticale de S étaient visiblement conservés, tandis que la condition de rebondissement élastique ($\theta'_1 = -\theta'_0$) achevait de déterminer les variations de vitesses angulaires. Le théorème du moment cinétique par rapport au diamètre horizontal de la sphère perpendiculaire au plan SCz_1 donnait la percussion en C. Les percussions en A, B, C, ont une somme géométrique nulle, et la réaction en B n'est pas dans le plan vertical qui contient les deux autres. Elle est donc nulle, tandis que les deux autres forment un couple.

Le non-glissement étant réalisé en A et B dans la question (III), la droite AB est nécessairement l'axe instantané de rotation. Si nous considérons u' comme connu, pour une position donnée de la sphère, on peut en déduire la rotation instantanée. Le théorème des forces vives ramène ensuite à une équation classique de la forme

$$u'^2 = f(u).$$

L'absence de frottement en B, dans (IV), permettait d'appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à la verticale de S. On obtenait ainsi une première composante de la rotation instantanée de la sphère. Les deux conditions de roulement sans glissement en A permettaient d'évaluer les deux autres composantes en fonction de u et u'. Le théorème des forces vives donnait une relation $u'^2 = f(u)$.

Dans la question (V), où le non-glissement avait lieu en B sur Δ, on disposait de deux conditions non-holonomes en B. Le théorème des forces vives donnait une troisième équation faisant intervenir u, u', et les trois composantes de la rotation instantanée. Une quatrième équation, indépendante des réactions, pouvait être obtenue en projetant sur SB l'égalité vectorielle provenant du théorème du moment cinétique en S.

Il était manifeste, dans la dernière partie, que la sphère (S) restait tangente à la droite Δ' symétrique de Δ par rapport au plan $O_1x_1y_1$. Mais les sphères tangentes à Δ et Δ' se répartissaient en deux familles dont les centres étaient, soit dans le plan $O_1x_1y_1$, soit dans le plan $O_1x_1z_1$. Dans toutes les questions où intervenait le frottement sur le plan II, il n'était pas possible de remplacer le contact avec II, par le contact avec Δ'.

Lorsque la sphère roule sans glisser sur Δ et Δ', la droite BB' est l'axe instantané de rotation. La mesure de ce vecteur s'obtient immédiatement en fonction de u et u', et le théorème de la force vive donne immédiatement l'équation classique $u'^2 = f(u)$. La surface axoïde fixe est donc le plan des deux droites, tandis que la surface axoïde mobile se détermine d'une manière classique dans les mouvements plan sur plan : on connait la base et la trajectoire du point S du plan mobile, on demande de trouver la roulante.

Voyons maintenant comment les candidates ont réagi devant les diverses questions posées.

A de très rares exceptions, elles ont suivi les indications de l'énoncé suggérant de ne pas introduire les réactions dans les calculs. Celles qui se sont obstinées, en employant coûte que coûte le théorème du centre de gravité, ont vite été effrayées par la supériorité écrasante du nombre des inconnues sur le nombre des équations. Malheureusement, trop de candidates ont interprété ces suggestions en croyant qu'il fallait passer ces réactions sous silence, ne pas parler de leur direction, et ne pas

montrer clairement ce qui distinguait le cas du frottement du cas de non-frottement. Il semble d'ailleurs que l'application des théorèmes généraux soit purement et simplement passée de mode. Les candidates, à une énorme majorité, se sont précipitées sur les équations de Lagrange, avec un luxe de multiplicateurs qui permettait de retrouver les indéterminations dont l'énoncé avait souhaité les écarter. Parfois même, le nombre d'équations nécessaires pour la mise en équations ayant été obtenu, on écrit les équations avec multiplicateurs, sans utilité par conséquent, et sans en rien tirer.

En dehors de la question de l'indétermination des réactions, qu'il n'était pas demandé de résoudre, une difficulté soulevée par les procédés de résolution des candidates (difficulté assez sérieuse si l'on en juge d'après les résultats), est de déterminer le nombre de conditions non holonomes qui sont indépendantes. Pour un trop grand nombre, toutes les conditions que l'on peut ainsi écrire sont *a priori* indépendantes. Une faute de calcul aidant, on conclut ainsi à l'impossibilité du mouvement. Pour d'autres, au hasard des calculs et des pseudo-contradictions, on reconnaît que l'une est conséquence des deux autres. Certaines, enfin, déterminent le nombre d'équations à écrire d'après le nombre de relations manquant pour la mise en équations. Dans très peu d'esprits, la question d'indépendance des formes linéaires arrive à se poser ; les candidates auraient alors vraisemblablement pensé qu'il existe des méthodes régulières pour répondre.

Je voudrais essayer de lutter contre cet état d'esprit de futures éducatrices qui concluent, ou commencent par affirmer : L'équation que je viens d'écrire a été obtenue dans telle question (où les hypothèses sont nettement différentes), ou bien : c'est la même équation, avec un terme en plus et un terme en moins. Pour éviter cette paresse intellectuelle ou matérielle, et le manque de clarté des esprits, on ne peut que conseiller de préciser quel est le système matériel choisi (chaque fois), le système des forces qui lui sont appliquées (chaque fois), quels sont les théorèmes appliqués (chaque fois), *en les justifiant* (ce qui est bien le dernier des soucis des candidates : elles font confiance à l'examinateur pour parachever la rigueur des raisonnements, lui laissant même le choix entre deux solutions conduisant à des résultats différents).

Ainsi, dans la question (III), les deux conditions en A ont été obtenues facilement. On en trouve ensuite trois au point B. Faut-il conclure, avec une dizaine de candidates, que ces cinq équations pour quatre paramètres, conduisent automatiquement au repos ? Non, car elles ne sont pas indépendantes. On constate que parmi les trois conditions en B, une est conséquence des deux autres. Mais les quatre conditions ainsi obtenues en A et B se réduisent à trois. Le théorème des forces vives achève la mise en équations. *Les équations de Lagrange sont inutiles.* Néanmoins, elles sont écrites avec trois, quatre ou cinq multiplicateurs, d'où perte d'un temps précieux et obtention d'équations indéterminées.

Arrivant à la question (V), selon leur inspiration, les candidates utilisent une, deux ou trois conditions non-holonomes. Trois conditions conduisent à une indétermination des équations de Lagrange, une seule condition provient d'une faute de raisonnement : les conditions en B n'en donnent qu'une, s'il n'y a pas glissement en A.

Quelques candidates se sont exclamées, question (II) : C'est un mouvement à θ constant ! Dans leur esprit, il s'agissait d'un mouvement stationnaire de la première question, ce qui était hors de propos. Elles ont d'ailleurs utilisé les équations de (I) en y faisant $\theta = C^{te}$, ce qui constitue une erreur grave.

Bien des candidates ont appliqué le théorème des forces vives dans la question (I, 2°). C'était bien compliquer une question immédiate, et se lancer dans une étude des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis dont peu se sont tirées avec honneur.

Poinsot a été évoqué à l'occasion d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe ! A ce propos, signalons que l'abus des équations de Lagrange a empêché bien des candidates de reconnaître un tel mouvement.

Après avoir mis la force vive de la sphère sous la forme

$$2T = mV_G^2 + I(p^2 + q^2 + r^2),$$

le premier terme étant plus ou moins détaillé, trop de candidates ont commis la très grave erreur d'écrire « les équations de Lagrange par rapport aux *paramètres* p, q, r » et d'en déduire le résultat correct $Ip' = Iq' = Ir' = 0$.

Suivant une très malheureuse tradition, on continue à appliquer sans précautions spéciales le théorème du moment cinétique par rapport à un point ou un axe mobile.

A côté de ces erreurs, commises par un trop grand nombre, on trouve aussi bien des « fantaisies » personnelles qui vont du lapsus à la faute grave.

Que les candidates se rappellent que leurs qualités pédagogiques commencent à prendre tournure lorsqu'elles évitent les abréviations, lorsqu'elles rédigent en une langue claire, et lorsqu'elles se donnent la peine de former leurs lettres.

Après une excellente composition notée 18, viennent : une copie méritant 16,5, une copie notée 15,5, deux notées 14, deux notées 12,5, trois notées 12, une notée 11,5, une notée 11, et une notée 10,5. On trouve ensuite : seize notes entre 8 et 10 ; quinze entre 6 et 8 ; onze entre 4 et 6 ; douze entre 2 et 4, et onze inférieures à 2.

La moyenne générale de cette épreuve est 6,5 environ pour l'ensemble des candidates ayant composé ; elle est 8,2 pour le groupe des 54 admissibles et seulement 2,8 pour les non-admissibles.

Toutes les candidates dont la composition de mécanique a obtenu une note au moins égale à 7 se trouvent parmi les admissibles ; cependant, dix-huit admissibles ont mérité, pour cette épreuve, une note inférieure à 7.

EPREUVES PRATIQUES

Si les notes extrêmes obtenues dans les deux épreuves de géométrie descriptive et de calcul numérique sont sensiblement les mêmes cette année (de 0,5 à 17,5 pour la première et de 1 à 16 pour la seconde), les moyennes sont notablement différentes : 6,4 et 10,3. Le groupement de ces deux compositions donne une répartition assez régulière de notes entre 1 et 15, sans zones d'accumulations notables, la moyenne générale étant environ 8,4.

Comme d'habitude, ces épreuves ont joué un rôle non négligeable dans le classement des candidates et ont contribué nettement, soit au succès, soit à l'échec de telle ou telle. Leur signification et leur valeur dans ce concours n'ont guère besoin d'être commentées.

Composition de Géométrie descriptive

(M. Pétrus)

Dans une première partie, on proposait la construction d'un hyperboloïde de révolution défini par son axe et une génératrice verticale. Toutes précautions étant prises dans le texte, il n'y a eu qu'une ou deux fautes de mise en place commises par les candidates, et pour une fois le cercle de gorge n'a pas été considéré comme une courbe de contour apparent horizontal. La méridienne principale a été correctement identifiée, mais de nombreuses concurrentes font preuve d'une grande maladresse dans son tracé, peut-être parce qu'une des branches sortait des limites de l'épure.

La sphère a été en général correctement obtenue, exception faite de quelques erreurs consistant, par exemple, à supposer son grand cercle frontal tangent aux asymptotes de l'hyperbole M.

Pour la détermination de l'intersection, les candidates avaient le choix entre plusieurs méthodes : si la mise en place n'autorisait guère l'emploi de la méthode des sphères inscrites dans l'hyperboloïde, elles pouvaient, soit couper la sphère par les génératrices de l'hyperboloïde, soit effectuer les rabattements des sections par des

plans perpendiculaires à l'axe de l'hyperboloïde, soit encore remplacer (comme le suggérait la note du texte) l'une des surfaces par le cylindre de front contenant la courbe et ayant ses génératrices parallèles à l'axe de l'hyperboloïde. Toutes ces méthodes ont été essayées avec plus ou moins de bonheur, mais faut-il rappeler qu'on ne doit pas s'obstiner à vouloir tirer tout d'une seule d'entre elles, lorsqu'elle donne lieu à des constructions pénibles ou même illusoires ?

Si la recherche du point courant et de sa tangente a été effectuée, sinon toujours adroitement, du moins avec une certaine netteté, il n'en est pas de même pour les points remarquables, dans la plupart des épures. Les points d'arrêt de la projection frontale ont été trop souvent déterminés empiriquement par intersection des contours apparents des deux surfaces, alors que le cylindre de front déjà indiqué permettait de les obtenir aussitôt. Les rebroussements apparents de la projection frontale ont été en général identifiés, mais une seule candidate a su déterminer correctement leurs tangentes, les autres se contentant d'évoquer la propriété du plan osculateur sans savoir comment déterminer ce dernier. Le point double a été également bien observé dans la plupart des épures, mais ses tangentes sont souvent absentes, comme si le cône d'erreur n'apparaissait pas immédiatement sur la mise en place ! Enfin, les points à tangente de front sont souvent laissés au hasard, toujours faute d'avoir su utiliser le cylindre de front appartenant au faisceau.

En résumé, beaucoup de candidates ont bien maltraité une épure d'une simplicité voulue par ses auteurs. Inutile d'ajouter que cette maladresse s'accompagne, le plus souvent d'une exécution médiocre, même pour celles des candidates dont on pourrait croire qu'elles ont régulièrement participé à des exercices de travaux graphiques. Deux ou trois épures seulement méritent vraiment ce nom. Cependant, il est curieux de constater, à la lecture des notices, que les candidates ne manquent pas de notions précises sur le cours de Descriptive, et qu'elles pourraient surmonter facilement une interrogation orale, à condition qu'on ne leur demande pas le moindre dessin ; faut-il donc en conclure, ou bien qu'elles ont systématiquement négligé la préparation pratique de l'épure, ou bien qu'elles se refusent à lui trouver un intérêt quelconque pour leur futur métier, comme si le sens de l'espace ne pouvait s'acquérir et se perfectionner qu'au petit bonheur, ou même être totalement laissé de côté dans l'enseignement de la géométrie ?

Les indications précédentes laissent prévoir des notes peu brillantes. Ces notes s'échelonnent, en effet, entre 0,5 et 17,5, mais avec une forte accumulation dans la zone inférieure : vingt compositions sont cotées entre 0,5 et 3 ; puis sept entre 3 et 6 et quatre entre 6 et 7. On trouve ensuite dix-neuf notes assez régulièrement réparties entre 8 et 14, et tout à fait en tête, trois 15 et un 17,5, qui récompense une épure bien présentée et une notice fort bien rédigée. La moyenne générale de cette épreuve est 6,4.

Composition de Calcul numérique
(M. Dugué)

Le problème proposait la détermination de l'une des valeurs numériques d'une fonction loxodromique définie par un développement en produit infini ; il n'a été résolu complètement, à l'approximation demandée (valeur approchée à 10^{-6} près, par défaut), par aucune candidate. Il est curieux de remarquer, malgré cette insuffisance, le volume des copies, du moins de beaucoup d'entre elles. Des pages entières sont remplies de considérations, en général bien trop longues pour leur contenu logique, qui tendent à établir le procédé théorique permettant d'aboutir à la solution. Le temps consacré à cette rédaction aurait certes été plus utilement employé s'il avait servi à effectuer les quelques multiplications et la division qui conduisaient au résultat. Visiblement, la plupart des candidates n'ont pas su tirer parti des trois heures dont elles disposaient.

Les dernières compositions révèlent de plus des insuffisances très graves chez leurs auteurs. La notion de majoration d'une série paraît mal connue ou mal comprise, alors qu'il s'agit d'étudiantes qui ont franchi le cap de la Licence. L'une des candidates invoque, pour justifier sa solution, l'existence de la constante d'Euler définie comme : $[\lim . \Sigma \frac{1}{n} - \text{Log } 2]$.

Bien peu paraissent se soucier de voir s'il existe une méthode (et cette méthode existe) permettant de raccourcir les opérations conduisant au calcul de la valeur demandée. Il serait souhaitable que cette épreuve ne soit pas envisagée comme un simple exercice d'application, brutale et sans réflexion, de quelques règles opératoires.

A côté de ces quelques constatations sévères, le correcteur est heureux de souligner que les candidates paraissent avoir perdu l'habitude de se servir, à tort et à travers de la table de logarithmes, dans des cas où la précision demandée dépasse les modestes possibilités de cet instrument de travail.

Les notes obtenues s'échelonnent de 1 à 16, ou plutôt de 3 à 16, car une seule copie est cotée 1. La répartition est assez dense dans la région supérieure puisqu'il y a vingt-deux compositions notées entre 13 et 16, puis dix entre 10 et 13, et six entre 8 et 10. Ensuite la répartition des quinze autres compositions entre 8 et 3 est à peu près homogène.

La moyenne générale de l'épreuve est 10,3.

EPREUVES ORALES

Selon la coutume, les deux leçons de « Mathématiques Elémentaires » et de « Mathématiques Spéciales », que devait exposer chacune des cinquante-quatre admissibles, avaient été « couplées » par le jury, avant le tirage au sort traditionnel.

Voici la liste des sujets de leçons (les libellés des diverses questions sont précédés, dans cette liste, d'un numéro, placé entre parenthèses ; ce numéro est le même pour les deux leçons d' « Elémentaires » et de « Spéciales » traitées par une même candidate) :

Leçons de Mathématiques Elémentaires.

Pour une classe de Seconde C et Moderne :

(1) Inégalités dans les triangles.

(2) Tangente à un cercle. Tangentes communes à deux cercles.

(3) Comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre interceptant le même arc, et des sens de ces angles supposés orientés. Quadrilatère inscriptible. Applications.

(4) Exemples de résolution de problèmes de lieux géométriques.

(5) Segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les bissectrices de l'angle opposé. Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points est donné.

(6) Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux droites est donné. Faisceaux harmoniques de droites. (La candidate choisira l'ordre d'exposition qui lui paraîtra préférable).

(7) Somme et différence des carrés des distances d'un point à deux points fixes. Applications à des problèmes de lieux géométriques.

Pour une classe de Première C et Moderne.

(8) Variation et représentation graphique de la fonction homographique.

(9) Exemples de problèmes dont la résolution conduit à une équation du premier ou du second degré, ou à un système de deux équations du premier degré.

(10) Positions relatives de droites et de plans. Parallélisme.

(11) Plan et droite perpendiculaires.

(12) Angle d'une droite et d'un plan. Lignes de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre. Applications à la géométrie cotée.

(13) Volume de la pyramide. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

Pour une classe de Mathématiques :

(14) Arithmétique : division des nombres entiers.

(15) Arithmétique : diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres.

(16) Première leçon sur les fractions.

(17) Définition et extraction de la racine carrée arithmétique d'un nombre entier à une approximation décimale donnée.

(18) Première leçon sur les nombres positifs et négatifs.

(19) Même sujet qu'au numéro (18).

(20) Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

(21) Etude, sur des exemples, d'une fonction de la forme $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c}$ (a, b, c, a', b', c' constantes, $a' \neq 0$), Représentation graphique.

(22) Exemples de résolution d'équations trigonométriques.

(23) Traiter un ou deux exemples de résolution de triangles dans des cas non classiques.

(24) Même sujet qu'au numéro (23).

(25) Mouvement rectiligne vibratoire simple ; interprétation au moyen d'un mouvement circulaire uniforme. Mouvement rectiligne défini par une équation horaire de la forme

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \beta).$$

(26) Cosmographie : inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes.

(27) Cosmographie : éclipses de Lune et de Soleil (la candidate pourra ne traiter en détail que l'un des deux phénomènes).

(28) Première leçon sur les trièdres.

(29) Trièdres supplémentaires. Applications.

(30) Faisceaux harmoniques de droites. Polaire d'un point par rapport à deux droites.

(31) Première leçon sur l'inversion.

(32) Produit de deux homothéties. Applications.

(33) Similitude plane.

(34) Première leçon sur les coniques.

(35) Tangente à la parabole. Problèmes sur les tangentes, théorèmes de Poncelet.

(36) Equations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie. Applications.

(37) Sections planes d'un cône de révolution.

(38) Géométrie descriptive : rabattements. Applications.

Pour une classe de Mathématiques Supérieures :

(39) Conditions pour que quatre points soient sur un cercle. Applications.

(40) Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles ; axe radical. Applications.

(41) Faisceaux linéaires de cercles. Faisceaux orthogonaux.

(42) Similitude plane.

(43) Première leçon sur l'inversion.

(44) Cercles homothétiques et cercles inverses dans l'espace.

(45) Symétrie par rapport à un point ; symétrie par rapport à un plan. Produit de deux telles symétries. Applications.

(46) Plan polaire d'un point par rapport à une sphère ; pôle d'un plan ; droites conjuguées.

(47) Transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle. Applications.

(48) Etude des cercles tangents à un cercle et à une droite donnée dans un plan.

(49) Etude des cercles tangents à deux cercles donnés dans un plan.

(50) Problèmes sur les tangentes aux coniques.

(51) Tangente à une conique définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité. Problèmes sur les tangentes.

(52) Ellipse et cercle déduits l'un de l'autre par affinité. Diamètres conjugués. Construction d'une ellipse connaissant deux demi-diamètres conjugués.

(53) Sections planes d'un cône de révolution.

(54) Intersection de deux cônes circonscrits à une même sphère.

Leçons de Mathématiques Spéciales

Toutes les leçons devaient être présentées pour une classe de Mathématiques Spéciales.

(53) Première leçon sur les nombres complexes.

(11) Les propriétés générales des opérations élémentaires sur les nombres complexes étant supposées traitées, donner quelques applications de ces opérations (applications géométriques, trigonométriques...).

(28) Racines carrées d'un nombre complexe. Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe. (La candidate choisira l'ordre d'exposition qui lui paraîtra préférable).

(54) Division des polynômes à une variable. Applications.

(33) Diviseurs communs à deux polynômes à une variable. Applications.

(10) Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

(32) Première leçon sur les déterminants.

(30) Formes linéaires. Conditions d'indépendance.

(51) Première leçon sur la résolution des systèmes d'équations linéaires.

(6) Résolution et discussion d'un système de n équations linéaires à p inconnues, le cas dit « de Cramer » étant supposé traité.

(37) Fonctions symétriques entières des racines d'une équation algébrique entière.

(35) Elimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières. Résultat.

(34) Transformation d'une équation algébrique par une substitution rationnelle portant sur une seule racine. Applications.

(42) Théorème de Rolle et formule des accroissements finis. Applications.

(31) Fonction inverse d'une fonction continue monotone. Représentation graphique.

(39) Application de la variation des fonctions à la séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante. Exemples.

(44) Développements limités d'une fonction d'une variable.

(29) Fonction exponentielle.

(49) Fonction logarithmique.

(5) Fonction puissance x^α (α nombre réel quelconque). Les propriétés de calcul des exposants seront supposées déjà traitées.

(4) Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.

(46) Fonctions homogènes de plusieurs variables.

(43) Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. Applications.

(45) Première leçon sur les séries numériques.

(12) Les généralités sur les séries à termes réels et à termes complexes étant supposées traitées, établir les critères de convergence dits « de Cauchy » et « de

d'Alembert » pour les séries à termes positifs et pour les séries à termes quelconques. Exemples.

(3) Première leçon sur les séries entières.

(48) Multiplication des séries absolument convergentes. Application aux séries entières.

(36) Dérivation et intégration des séries entières (la notion de rayon de convergence est supposée déjà connue). Applications.

(40) Développement en série entière en x de la fonction $(1+x)^{\alpha}$ (α constante réelle). Applications.

(41) Première leçon sur l'intégrale définie d'une fonction continue.

(13) Changement de variable dans une intégrale (indéfinie et définie). Applications.

(47) Même sujet qu'au numéro (13).

(27) Intégration des fractions rationnelles. Exemples.

(7) Intégration des équations différentielles du premier ordre dans le cas de la séparation des variables ; exemples d'intégration d'équations différentielles du premier ordre se ramenant au cas de la séparation des variables.

(38) Même sujet qu'au numéro (7).

(2) Intégration de l'équation différentielle linéaire du premier ordre. Exemples.

(19) Produit vectoriel de deux vecteurs. Applications.

(8) Enveloppe d'une famille de courbes planes.

(21) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan.

(16) Courbure d'une courbe plane. Développée.

(17) Courbes planes dont l'équation polaire est résolue par rapport au rayon vecteur : tangente, concavité, branches infinies, asymptotes.

(15) Construction des courbes planes définies en coordonnées polaires. Exemples. (Les résultats généraux sur les tangentes, la concavité, les branches infinies, sont supposés connus).

(20) Même sujet qu'au numéro (15).

(23) *Géométrie analytique.* Exemples de surfaces définies par un mode de dégénération géométrique simple.

(26) Tangente et plan osculateur à une courbe de l'espace.

(24) *Géométrie analytique.* Plan tangent en un point d'une surface.

(25) Divisions homographiques sur une conique.

(1) Directions principales et axes de symétrie des courbes du second ordre. Réduction de l'équation d'une courbe du second ordre en axes rectangulaires.

(9) Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre.

(14) Sections circulaires des surfaces du second ordre.

(22) Descriptive. Intersection de deux surfaces coniques du second ordre ayant une génératrice commune.

(18) *Cinématique du point.* Vecteur-accélération ; composantes tangentielle et normale.

(50) *Mécanique.* Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force centrale proportionnelle à la distance, le cas du mouvement rectiligne étant supposé déjà traité.

(52) *Mécanique.* Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force centrale inversement proportionnelle au carré de la distance. Le cas du mouvement rectiligne sera supposé déjà traité ; on indiquera les différentes formes des trajectoires ; l'étude détaillée du mouvement ne sera faite que dans le cas d'une trajectoire elliptique.

***

Les rapports des années précédentes ont rappelé, à maintes reprises, le sens et la portée des épreuves orales, et, tout particulièrement, le rôle que peut et que doit avoir,

dans la formation des futurs professeurs, une préparation sérieuse et bien conduite de cette partie du concours. Le rapport sur la session de 1955 (publié par le *Bulletin* de l'A.P.M., n° 177 du mai 1956) a insisté longuement sur ces questions et sur quelques aspects du comportement d'assez nombreuses candidates, tant dans l'ordre intellectuel que dans l'ordre de la présentation extérieure, aspects qui se révèlent comme ayant un certain caractère de permanence. Je n'y reviendrai pas ici.

Quant aux observations sur les divers sujets de leçons, la plupart rejoignent également des remarques et des critiques déjà formulées fréquemment. Je me bornerai à signaler, une nouvelle fois, les fâcheuses défaillances qui se manifestent trop souvent à l'occasion d'exposés faisant intervenir des éléments d'analyse, et exigeant, sous des formes plus ou moins directes, une compréhension précise et correcte de la notion de limite, — ainsi que les défauts, malheureusement presque classiques, qui apparaissent, soit dans l'organisation de certains raisonnements qui ne prennent leur valeur véritable que s'ils sont ordonnés avec clarté et précision, soit encore dans le choix des exemples formant partie indispensable de certaines leçons.

Les notes obtenues, pour les exposés de Mathématiques Elémentaires, s'échelonnent entre 6 et 18, si l'on met à part un 4,5 attribué à une mauvaise leçon (sur un sujet très classique) due à une défaillance passagère d'une candidate dont les autres épreuves étaient fort honorables. La répartition de ces notes, pour l'ensemble des admissibles est la suivante: 18 (deux fois), 17 (quatre fois), 16 (deux fois) 15 (sept fois), 14 (neuf fois), 13 (trois fois), 12 (neuf fois), 11 (quatre fois), 10 (trois fois), 9 quatre fois), 8 (trois fois), 7 (deux fois), 6 (une fois). La moyenne générale de cette épreuve est environ 12,4, sensiblement plus élevée que celle de l'an dernier (10,5) ; cette augmentation mérite d'autant plus d'être signalée que le nombre des admissibles comprenait en 1956 seize unités de plus qu'en 1955.

En Mathématiques Spéciales, les notes sont beaucoup plus étalées, entre 2 et 18 (une des candidates n'a pu passer cette épreuve), et les notes inférieures à la moyenne sont plus fréquentes qu'en « Elémentaires ». En voici l'échelonnement : après trois 18, un 17 et un 16, on trouve huit leçons cotées entre 14 et 16 : puis douze, entre 12 et 14 ; puis dix, entre 10 et 11 ; neuf, entre 8 et 9 ; huit, entre 4 et 7, pour terminer par un 2. La moyenne générale, pour les cinquante-trois candidates ayant pris part à cette épreuve, est voisine de 10,8, à peine plus forte que celle de 1955 (10,3).

Pour l'ensemble des deux leçons, les notes sur 20 sont comprises entre 6 et 17,5, avec un groupe de tête comprenant sept notes entre 16 et 17,5 et une importante condensation de trente-deux notes autour de la moyenne, entre 9 et 13. La moyenne générale de l'oral, pour l'ensemble des admissibles, est d'environ 11,6 ; elle est nettement supérieure à celle de l'année précédente (10,4), malgré l'accroissement de la liste d'admissibilité.

RESULTATS GENERAUX

Le total de toutes les notes correspondant à l'ensemble des huit épreuves écrites, pratiques et orales, pour chacune des admissibles, varie de 314,5 (deux fois) à 122,5, le maximum étant de 400 points. La moyenne générale de chacune de ces candidates est donc comprise entre 15,7 et 6,1 environ, tandis que la moyenne générale pour le groupe des admissibles est environ 10,6. On voit donc que le concours de 1956 se situe en bonne place, quant aux résultats, les notes extrêmes, comme la moyenne, dépassant quelque peu celles des sessions antérieures de 1955 et de 1954.

Les épreuves pratiques et orales ont très sensiblement modifié le classement d'admissibilité ; en particulier, quatre candidates qui figuraient parmi les vingt premières à l'écrit, n'ont pas pu être maintenues sur la liste d'admission ; par contre, trois autres, médiocrement placées après les épreuves écrites, ont finalement mérité le succès par un bon oral.

Le nombre de postes d'agrégées mis au concours en 1956 était de quarante-six, dont quatre correspondaient à des établissements à l'Etranger et Outre-Mer. Rappe-

lons que ce nombre était de trente-huit en 1955 et de vingt-huit en 1954. Comme il a été indiqué au début de ce rapport, cent cinq candidates s'étaient fait inscrire pour la session de 1956, au lieu de soixante-dix-huit l'année précédente ; en réalité, quatre-vingt-cinq ont pris part effectivement à l'écrit, au lieu de soixante et une en 1955.

Si la liste d'admissibilité a pu être prolongée sans difficulté jusqu'à comprendre cinquante-quatre noms en 1956 (il y en avait trente-huit en 1955), le jury n'a pu retenir pour l'admission définitive que trente-deux candidates, ce qui constitue d'ailleurs une augmentation notable par rapport à la session précédente, qui n'avait donné que vingt et une nouvelles agrégées. Toutes les admissibles non-reçues ont bénéficié de mesures d'équivalence leur donnant le titre de certifiée, lorsqu'elles n'étaient pas déjà professeurs, ou titulaires du certificat d'aptitude au professorat.

Le total des notes obtenues par chacune des trente-deux reçues varie de 314,5 à 201, sur 400 points, c'est-à-dire que la moyenne varie de 15,7 à 10, sur 20. Trois candidates se détachent nettement, en tête : deux *ex-æquo* avec 15,7, suivies de près par la troisième (la plus jeune du concours, âgée seulement de vingt et un ans), avec 15,2. L'échelonnement des moyennes se poursuit ensuite avec deux notes voisines de 14, quatre notes autour de 13, puis six entre 12 et 11,5, neuf entre 11,5 et 10,5, et huit entre 10,5 et 10.

Pour compléter ces indications sur la valeur du concours, il est intéressant de donner ici les moyennes obtenues, d'une part, par le groupe des trente-deux reçues, d'autre part pour celui des vingt-deux admissibles non reçues, pour les épreuves écrites, pour les épreuves pratiques, pour les épreuves orales, et pour l'ensemble des huit épreuves. Les notes indiquées ci-dessous correspondent, dans l'ordre, à ces quatre séries d'épreuves :

pour les trente-deux reçues	10,8	9,8	13,1	11,8
pour les vingt-deux admissibles non reçues ..	8,7	6,2	9,4	8,7

Un tableau analogue avait été dressé pour le concours de 1955 ; la comparaison des résultats des deux années fait bien apparaître que l'accroissement des nombres d'admissibles et de reçues n'a point diminué — bien au contraire — le niveau du concours.

Le groupe des nouvelles agrégées de 1956 comprend : neuf élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles et sept élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses (une « Sévrienne » et une Fontenaysienne ont été reçues premières *ex-æquo* ; et, se partageant huit des neuf premières places, on trouve, alternant, cinq Sévriennes et trois Fontenaysiennes) ; cinq professeurs titulaires en exercice et deux professeurs titulaires en congé ; cinq élèves-professeurs des Centres pédagogiques régionaux de Dijon, Toulouse, Lille et Paris ; trois étudiantes (deux de la Faculté de Marseille, reçues 3e et 14e, et une de la Faculté de Paris) ; une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure.

Les vingt-deux admissibles non reçues comprennent : une élève de l'Ecole Normale Supérieure et deux élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay ; deux auditrices à l'Ecole Normale Supérieure ; huit professeurs titulaires, dont sept en exercice et une en congé ; trois élèves des C.P.R., et six étudiantes. Quatre d'entre elles ont été proposées par le jury pour l'attribution de l'équivalence complète du C.A.P.E.S., les dix-huit autres étant déjà, soit professeurs titulaires, soit certifiées.

D'autre part, sept, parmi ces vingt-deux, sont admissibles pour la deuxième fois et entrent ainsi dans la catégorie des professeurs bi-admissibles.

Il est intéressant, à ce sujet, de signaler qu'une candidate, admissible deux fois à l'agrégation, en 1954 et en 1955, mais qui n'avait pas obtenu, ces années-là, l'équivalence complète du C.A.P.E.S., a été reçue, en 1956, aux épreuves pratiques de ce certificat (comme élève-professeur d'un C.P.R.). Ce succès lui permet d'entrer, maintenant, dans le cadre des professeurs bi-admissibles ; elle ne se présentait d'ailleurs pas à l'agrégation en 1956.

Pour préciser les relations entre les deux concours : Agrégation et Professorat

(C.A.P.E.S.), il convient d'indiquer que quarante-neuf candidates (élèves-professeurs des C.P.R. et élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay) ont été reçues aux épreuves définitives du C.A.P.E.S. en 1956 : quinze d'entre elles figurent parmi les admissibles à l'agrégation de 1956, et dix sont devenues agrégées. D'autre part, au concours d'admission dans les C.P.R. (partie théorique du C.A.P.E.S.) de juin-juillet 1956, dont les épreuves étaient terminées avant la fin de l'oral de l'agrégation, quarante-six candidates, en dehors des Sévriennes et des Fontenaysiennes, avaient été déclarées reçues : deux d'entre elles ont été admises à l'agrégation, et une troisième, admissible, a obtenu l'équivalence complète du C.A.P.E.S. Quant aux neuf élèves des deux Ecoles Normales Supérieures, qui étaient également reçues au concours des C.P.R., six d'entre elles étaient candidates à l'agrégation ; cinq y ont été admises, et la sixième a obtenu, comme admissible, l'équivalence complète du C.A.P.E.S.

*
**

Ces indications, d'ordre statistique, montrent que les relations entre l'agrégation et le C.A.P.E.S. sont de plus en plus étroites, pour ne pas dire compliquées. Elles mettent aussi en évidence que l'agrégation, en 1956, a permis de « recruter » dix-huit professeurs *nouveaux*, dont quatre admissibles devenues certifiées par équivalence ; car sur les trente-deux candidates reçues au concours, dix-huit étaient déjà professeurs ou titulaires du certificat d'aptitude au professorat.

En confrontant ces quelques nombres et les besoins de la Direction du Second Degré, besoins traduits, approximativement, par le nombre des postes d'agrégés et de certifiés « mis au concours », on comprend les difficultés, accrues d'année en année, que rencontre le Ministère pour assurer la bonne marche de l'enseignement. La nécessité de pourvoir quelques-unes des nombreuses chaires vacantes dans les Lycées et Collèges de l'Algérie et des départements d'Outre-Mer, et de répondre autant que possible aux demandes pressantes formulées par les Etats de la France d'Outre-Mer et par les Pays étrangers, a conduit à n'accorder que de très rares sursis d'intégration aux nouvelles agrégées et certifiées ; parmi ces dernières, plusieurs auraient désiré, très naturellement, avoir la possibilité de consacrer une année complète à la préparation du concours. Heureusement, l'institution, à partir d'octobre 1956, d'une préparation par correspondance, par le Centre national (C.N.E.P.C.), ne peut manquer d'apporter une aide extrêmement précieuse aux candidats qui ne peuvent suivre régulièrement les cours et conférences d'une Faculté, et, tout particulièrement, aux professeurs en exercice qui sont étroitement liés par leurs obligations de service. Mais il faut espérer pourtant que, dans un très prochain avenir, pourront être accordés en plus grand nombre des sursis ou des congés aux bons candidats qui veulent, pendant un an, réserver tout leur temps à une étude sérieuse et approfondie des questions du programme.

*
**

Sans doute, l'apport de l'agrégation au recrutement de nouveaux maîtres qualifiés paraît, comme on vient de le remarquer, relativement faible ; mais il importe d'insister sur la véritable valeur de ce concours : si le titre qu'il confère est très recherché, c'est parce qu'il est la marque d'une culture étendue qui n'a pu être acquise que par un effort méthodique, longuement soutenu, donnant une garantie indéniable, de sérieuses qualités morales et intellectuelles.

On ne saurait trop recommander aux étudiants et aux professeurs d'entreprendre ou de poursuivre un tel travail, qui, quels qu'en soient les résultats, leur apportera la satisfaction de comprendre mieux et de dominer de plus en plus les notions et les faits qui sont l'objet de notre enseignement.

J. Desforge, *Inspecteur général.*

Concours de l'Enseignement public en 1957

Agrégation-Hommes

MM. 1. Buchwalter H. (E.N.S.E.T, de Paris) ; 2, Tatry R, (E,N,S,E,T. de Paris) ; 3. Douady A. (E.N.S.) ; 4. Jullien P. (E.N.S.) ; 5. Picard Ph., aud. E.N.S. ; 6. Drevon M., él.-prof. au C.P.R. de Paris ; 7. Hily J. (E.N.S.) ; 8. Enriquez A., prof. au Lyc. J.-Decour, à Paris ; 9. Ribon J., prof. en congé S.M. ; 10. *ex-æquo :* Herry R., él.-prof. au C.P.R. de Rennes, Pichon G., (E.N.S. de St-Cloud), Pigeaud P., étud. à Paris ; 13. Ries G., (E.N.S. de St-Cloud) ; 14. Sarrand R., prof. au C. de Saint-Claude ; 15. Pavageau J., prof. au C. d'Orléans ; 16. *ex-æquo :* Pradines J. (E.N.S.), Saphar P., assist. à la Fac. d'Alger ; 18. Ponasse D., assist. à la Fac. de Clermont-Ferrand ; 19. *ex-æquo :* Calcine A., prof. cert. au L. de Brive, Pommiez M., él.-prof. au C.P.R. de Toulouse ; 21. *ex-æquo :* Delon R., prof. au L. de Perpignan, Krfe P., ét. à Paris ; 23. *ex-æquo :* Mesguiche R., prof. au C. d'Alger, Vaillant J.-Cl., prof. au L. de Foix ; 25. Massoni T., prof. au L. de Bastia ; 26. Mein P., (E.N.S.) ; 27. Benzaken Cl., (E.N.S.) ; 28. Houderine J., ét. à Paris ; 29. Demengel G., prof. à l'E.N.R.E A. de Clichy ; 30. *ex-æquo :* Chapaz A., prof. cert. au L. de Deauville, Labro J. (E.N.S. de St-Cloud) ; 32. Leroux M., (E.N.S.) ; 33. Bekkoucha M., prof. au L. de Fès ; 34. Pouzet P., assist. à la Fac. de Strasbourg ; 35. *ex-æquo :* Dumont Y., prof. au C. de Fougères, Payen R., prof. au L. de Reims, Vitart P., prof. au L. d'Agen ; 38. *ex-æquo :* Carmona J., prof. cert. au C.T. de Boulogne, Delachenal B., prof. au L. de Rochefort, Lebeslour G., prof. au L. d'Istambul, Meyer P. (E.N.S.), Wind A., A.E. au L. Bugeaud à Alger.

Proposé pour l'équivalence du C.A.P.E.S. :

M. Grimal G. (E.N.S. de Saint-Cloud).

Dispensé de la partie théorique du C.A.P.E.S. :

MM. Coulon B. (E.N.S.) ; Guérin J. (E.N.S. de St-Cloud) ; Guichenez J. (E.N.S. de St-Cloud) ; Rougée P. (E.N.S. de St-Cloud) ; Thibaudier C. (E.N.S.) ; Yvon J.-C. (E.N.S. de St-Cloud).

Agrégation-Femmes

Mmes et Mlles : 1. Boyer S. (E.N.S. de Sèvres) ; 2. Vanmaele C. (E.N.S. de Sèvres) ; 3. Grand J. (E.N.S. de Fontenay-auxRoses) ; 4. Baldet A. (E.N.S. de Sèvres) ; 5. Bassier M. (E.N.S. de Sèvres) ; 6. Minois M.-H., ét. à Paris ; 7. Giraud D. (E.N.S. de Sèvres) ; 8. Marjanka Y., ét. à Paris ; 9. *ex-æquo :* Arpino J., prof. au C. de Châteaudun, Mocquery F., prof. au L. de Verdun ; 11. *ex-æquo :* Laithier J., ét. à Paris, Legendre, née Alloyau C., (E.N.S. de Sèvres) ; 13. Legrand, ét. à Paris ; 14. Parlange A., prof. cert. en congé ; 15. Le Roy F., ét. à Paris ; 16. Gausson C., prof. au L. de St-Omer ; 17. Amar, née Tcherkawsky C., prof. au L. de Meknès ; 18. Vors, née Martin G., prof. au cours secondaire de Neuilly ; 19. Vinciguerra, née Hervé M., ét. à Paris ; 20. Richon R. (E.N.S. de Sèvres) ; 21. Rivallin M.-R. (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 22. Tessier B., ét. à Paris ; 23. Doulat, née Martinet Y., prof. au C. de Riom ; 24. Le Mehaute, née Botcazou M. (E.N.S. de Fontenay) ; 25. Lefebvre S., prof. dét. à l'Inst. de stat. de l'Univ. de Paris ; 26. Ichas H., prof. à l'E.N.I. de Troyes ; 27. Garand A., prof. à l'E.N. de Blois ; 28. Rolland P. (E.N.S. de Sèvres) ; 29. *ex-æquo :* Bokorza-Haggiag J., ét. à Paris, Handecœur, née Huyart C., (E.N.S.E.T. de Paris) ; 31. Moy-

NET, née VIGNES C. (E.N.S. de Sèvres) ; 32. SARDA, née LITAUDON M.-R., prof. au L. de Meaux. — 33. *ex-æquo :* CURTET M., prof. au C. de Grenoble, GUIN P., prof. cert. à l'E.N. de Carcassonne, MÉLIS I., prof. au L. de Valenciennes ; MYOT C. (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 37. JOUFFROY J., prof. au C.N.E.P.C.R.T. de Paris ; 38. *ex-æquo :* BOUTIN, née BEAUFRÈRE J., prof. au C. de Châtellerault, LEGRAND D., ét. à Paris.

Proposées pour l'équivalence du C.A.P.E.S. :

Mlles BERNARDY J., ét. à Montpellier ; CALAIS J., ét. à Lyon ; DE CAZENOVE C., ét. à Bordeaux ; COHEN J., ét. à Paris ; DUMOND C., ét. à Poitiers ; FLEVEAU J., assist. à la Fac. des Sc. de Poitiers ; TURLOT A.-M. (E.N.S. de Sèvres).

Dispensées de la partie théorique du C.A.P.E.S. :

Mlle PELON L., ét. à Rennes.

Concours d'admission dans les Centres Pédagogiques Régionaux

Hommes

MM. 1. GRIMAL C. (E.N.S. de St-Cloud) ; 2. PICHON G. (E.N.S. de St-Cloud) ; 3. RIES G., (E.N.S. de St-Cloud).

MM. 1. DUVINA J., prof. au C.A. de Marseille ; 2. MONNIER P., ét. à Aix ; 3. QUENIS R., M.A. au C. Jarente à Lyon ; 4. AUBERT G., monit. à la Fac. des Sciences de Clermont ; 5. BOUTIN M., ét. à Poitiers ; 6. QUEAU Y., ét. à Paris ; 7. GEORGES G., inst. à l'E.N. de Clermont-Ferrand ; 8. BURRET B., ét. à Lyon ; 9. FRIMIGACCI J., prof. au C.A. d'Ajaccio ; 10. VINET G., M.A. au C.M. d'Aix-en-Provence ; 11. BRUEL Y., ét. à Rennes ; 12. BARBE G., A.E. au C. de Romans ; 13. MORIN J.-P., ét. à Toulouse ; 14. BERINGUET R., ét. à Alger ; 15. LAGUERRE G., M.I. au C.A. de Toulouse ; 16. COUSTEAU A., M.I. au C. de Lectoure ; 17. PELLEGRIN P., inst. à Nice ; 18. GUTEKUNST R., M.A. au C.T. de Colmar ; 19. FLAHAUT J., A.E. au L. de Lille ; 20. RABESAOTRA R., prof. au C. clas. et mod. de Tananarive ; 21. VIAL M., S.E. au L. Périer à Marseille ; 22. VALENZA A., prof. au C.T. de Bizerte ; 23. KERBRAT J., A.E. au L. de Guingamp ; 24. DELEBARRE G., M.A. au C. de Lens ; 25. DARRE J.-L., ét. à Toulouse ; 26. *ex-æquo :* AMY R., ét. à Paris, SAVELLI L., A.E. au L. Mistral à Avignon ; 28. GAUDIN E., ét. à Rennes ; 29. PIQUEMAL M., M.A. à l'E.N.E.T. de Toulouse ; 30. PIGONNEAU R., ét. à Toulouse ; 31. BÈS G., A.E. au C. de Gaillac ; 32. MOLLARD L., A.E. au C. de Louhans ; 33. CUSTINE J., M.A. au C.T. de Béziers ; 34. VANBREMEERSCH P., A.E. au C. de Lillers ; 35. BOURGEOIS J., rép. au C.T. de Lille ; 36 *ex-æquo :* GUÉRIN Y., A.E. au L. d'Alès, MARIGIL H., M.I. au L. de Toulouse, MOLINARD J., M.A. au L. de Toulouse ; 39. BONNET P., M.A. au L. de Rodez ; 39 *bis.* AIDI S., prof. au L. de Carthage.

Femmes

Mmes et Mlles 1. FLEVEAU J., ass. à la Fac. des Sciences de Poitiers ; 2. BASLE J., ét. à Rennes ; 3. LACHKAR J., ass. à la Fac. des Sciences d'Alger (1) ; 4. EVENARD A., M.A. au C. de J.F. de Dinan ; 5. REGNIER M., ét. à Toulouse ; 6. BERNARDY J., ét. à Montpellier ; 7. DUMOND C., mon. à la Fac. des Sciences de Poitiers ; 8. CADET C., ét. à Paris ; 9. FITAMANT M.-P., A.E.D.R. au L. de J.F. de Quimper ; 10. VIDAL

(1) Sous réserve de la production du certificat médical.

J., ét. à Montpellier ; 11. Picot A., ét. à Poitiers ; 12. Girard A., ét. à Lyon ; 13. Bieber S., M.A. au L. de Sarreguemines ; 14. David J., ét. à Rennes ; 15. Minaud J., ét. à Rennes ; 16. Cartier G., ét. à Clermont-Ferrand ; 17. Le Roux, née Bourge, J., ét. à Rennes ; 18. Sebald F., ét. à Clermont-Ferrand ; 19. Cadoret Y., M.I. au C. de J.F. de Poitiers ; 20. Gouyon G., ét. à Toulouse ; 21. Germain A., A.E. stag. au L. de J.F. de Troyes ; 22. Bourely M., ét. à Toulouse ; 23. Labadie J., ét. à Toulouse ; 24. Gilette, née Nallino M., M.I. au L. de J.F. d'Aix ; 25. Lefèvre D., M.I. à l'E.N.P. de Creil ; 26. Rigal C., M.A. au C. de garçons d'Epernay ; 27. Gantzer, née Colin D., ét. à Nancy ; 28. Bobillon A., prof. au L. de J.F. de Rabat, F.O.M. ; 29. Flesch F., M.A. à l'E.N.P. de Strasbourg ; 30. Chauveau G., M.A. au C. de J.F. de Lisieux ; 31. Delouche J., A.E. au C. Sophie-Germain à Paris ; 32. Defrance C., M.I. stag. au L. de J.F. de Béthune ; 33. Bartholmé I., M.A. au C. de Wissembourg ; 34. Canac, née Gascoin M., ét. à Toulouse.

Elèves des E.N.S. dispensées des épreuves écrites :

Mmes et Mlles 1. Grand J., (E.N.S. de Fontenay) ; 2. Priolon M.-T. (E.N.S. de Fontenay ; 3. Lecerf, née Maillard-Salin J. (E.N.S. de Fontenay) ; 4. Rivalin M.-R. (E.N.S. de Fontenay).

Candidats admis aux épreuves pratiques

MATHEMATIQUES

Admis

Très bien

MM. Foesser, Strasbourg ; Gauthier, Lyon ; Leterrier, Caen ; Lumbroso, Paris ; Machin, Lille.

Bien

MM. Abonnel, Grenoble ; Bès, Montpellier ; Besnard, Paris ; Canac, Bordeaux ; Caujolle, Paris ; Flamant, Paris ; Francioni, Nancy ; Fromageot, Paris ; Garnaud, Poitiers ; Guillouet, Caen ; Hugot, Paris ; Joveniaux, Lille ; Lecoutour, Caen ; Le Roux, Caen ; Liandrat, Grenoble ; Mégy, Aix ; Moulia. Bordeaux ; Pilot-Montachard, Grenoble ; Rivoal, Rennes ; Roagna, Toulouse ; Roudier, Clermont-Ferrand ; Sitbon, Paris ; Vinsonneau, Grenoble.

Assez bien

MM. Aubert, Rennes ; Blanc, Aix ; Boireau, Rennes ; Cubellis, Montpellier ; Dupuis, Nancy ; Franchi, Aix ; Hébel, Paris ; Hurson, Paris ; Joubert, Poitiers ; Legland, Paris, E.N.S. ; Leyrolle, Clermont-Ferrand ; Raoul, Caen ; Reynaud, Paris, E.N.S. ; Vidal, Lyon ; Zamuth, Montpellier.

Passable

MM. Adam, Paris ; Antonini, Lyon ; Barraja, Lyon ; Elhorga, Paris, E.N.S. ; Lanfranchi, Aix ; Mandement, Toulouse ; Marquant, Paris, E.N.S. ; Pommiez, Toulouse ; Ramparany, Paris ; Redon, Lyon ; Schacherer, Strasbourg.

Bénéficiaires de l'article V, 4°

M. Courouble, prof. au L. français de Beyrouth ; Le Flour, prof. au L. de Pnom-Penh.

ADMISES

Très bien

Mmes et Mlles BRESSON, Rennes ; BRUYÈRE, Grenoble ; CAPITAN, née BÉRANGER, Clermont-Ferrand ; LEFEBVRE, Paris ; LOSTIES, née PELLION, Paris ; MEYER, Grenoble.

Bien

Mmes et Mlles ARGOULLON, Poitiers ; ARIBAUD, Toulouse ; BARDON, née DESHAYES, Clermont-Ferrand ; BUISSART, Lille ; CAU, Toulouse ; DEVERGNE, née ACHACH, Paris ; HAUTCŒUR, Rennes ; EBERT, Alger ; LECOUTOUR, née ROGIER, Caen ; LÉON, Rennes ; MYOT, Paris, E.N.S. ; PENNE, née GENSUL, Lille ; PIERRE, née CAMPLAN, Lille ; PLAT, Lille ; REBY, Clermont-Ferrand ; SELIG, Lyon.

Assez bien

Mmes et Mlles ANACLET, Paris, E.N.S. ; FERDINAND-DREYFUS, Rennes ; FRAISSINES, Clermont-Ferrand ; GRAVICHE, Besançon ; LANORE, née COLLOT, Paris ; LEBERON, Toulouse ; LEBŒUF, née DONANT, Clermont-Ferrand ; MÉTIVIER, née BENOÎT, Rennes ; PANISSE, Lyon.

Passable

Mmes et Mlles COULON, Lyon ; DANIEL, née DAVID, Rennes ; DANTONY, Lyon ; FRANÇOIS, Rennes ; FRANKEL, née DUFOUR, Lyon ; SAULNIER, Rennes ; TURLAN, née VERNAZOBRES, Toulouse.

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION

UN PETIT PAS EN AVANT

Ainsi qu'on peut le lire dans les textes adoptés, le 17 octobre 1957, par le Comité, les responsables de l'A.P.M. ne manquent pas d'exprimer leur satisfaction devant l'amélioration apportée à l'horaire des Mathématiques dans le premier cycle du Second Degré. Nous pouvons en être tous d'autant plus satisfaits que la décision a été précédée d'un vote favorable du Conseil Supérieur de l'Education Nationale, *à l'unanimité moins une abstention* (j'ignore l'identité de l'abstentionniste, mais je regrette d'ignorer les raisons de son acte).

L'expression de notre légitime satisfaction ne nous empêche pas de voir les ombres du tableau. L'arrêté qui améliore l'horaire des Mathématiques, ampute d'autant l'horaire du latin dans les sections classiques. Il n'est pas inutile de déclarer que notre Association n'a aucune part de responsabilité dans une décision ministérielle prise en opposition avec le vœu émis par le Conseil Supérieur. Personnellement, je pense que la raison est uniquement budgétaire et n'a par conséquent aucune valeur pédagogique. Du seul point de vue de l'enseignement des Mathématiques, je crois que cette décision est une faute grave. Pour le public et pour beaucoup de professeurs elle signifie que l'amélioration de l'horaire consacré aux Mathématiques ne peut se faire que par amputation des horaires réservés aux lettres. Si cela était vrai, le développement de l'enseignement des Mathématiques, pour l'amener au niveau des exigences sociales et scientifiques de notre époque, serait fort compromis ; il ne faut pas oublier en effet que les réformes ne sont réalisées qu'après adoption par des conseils et des administrations où les personnes de formation littéraire sont les plus nombreuses. Même obstacle dans la grande presse où pour un article signalant l'urgence du développement scientifique, réponses et lettres défendant l'humanisme classique (avec beaucoup de talent d'ailleurs) abondent.

Il est donc utile que nous considérions les problèmes que pose « le petit pas en avant » des trois heures hebdomadaires de Mathématiques dans la perspective qui reste celle de notre Association : développer, au sein de l'Enseignement du Second Degré, et en étroite liaison avec ce qui est réalisé ou réalisable dans l'Enseignement Technique et dans les Cours Complémentaires, un enseignement scientifique en rapport avec la civilisation de notre temps.

Trois constatations s'imposent alors :

1° Les trois heures hebdomadaires constituent un *premier* pas. Il doit y en avoir d'autres. Quel doit être le second ?

2° Le premier pas, aussi petit soit-il, jette une lueur crue sur les difficultés de recrutement des maîtres. Comment pouvons-nous contribuer à résoudre ce problème vital de la réforme ?

3° La mise en application des nouveaux programmes accompagnés des instructions que l'on peut lire dans le *Bulletin* exige, de la part de tous les Collègues la mise en commun de leurs efforts, leur réussite garantissant la rédaction de nouveaux programmes plus efficaces dans les classes suivantes.

*
**

Il me paraît toujours évident que notre Association, en mettant en commun les idées et les initiatives de tous, peut *réaliser* la véritable réforme, quels que soient les textes et les doctrines officielles que nous avons d'ailleurs grand avantage à

orienter dans la mesure de nos moyens. Au cours de l'année, les pages du *Bulletin* sont largement ouvertes à la libre expression et le travail de l'Assemblée générale en sera grandement facilité : nous déciderons alors en commun des étapes suivantes de notre action.

Je n'ai aucune compétence spéciale pour traiter des trois problèmes énoncés ci-dessus. Cependant, comme membre de l'Association, je proposerai à la critique des Collègues quelques réflexions.

1. Sur les horaires. — Il est possible que le deuxième pas en avant soit, comme le premier, un petit pas. Même si l'on désapprouve cette méthode de « grignotage », qui empêche toute réalisation cohérente et qui multiplie les obstacles artificiellement, ne faut-il pas savoir quel sera le deuxième petit pas, choisir celui qui sera le meilleur ?

Selon l'Assemblée générale 1957, il semblait qu'un effort particulier devait être fait en faveur de la classe de Troisième. Ainsi l'orientation vers les sections scientifiques du second cycle serait favorisée. Quand nous avons transmis ce vœu à M. le Directeur général Brunold, il a paru convaincu de nos bonnes raisons.

Faudra-t-il attendre le troisième petit pas pour renforcer les sections scientifiques du second cycle et donner à la section Sciences Expérimeentales le caractère que son titre, en bonne logique. exigerait ?

Il y a aussi l'hypothèse où la méthode des petits pas (qui n'exclut pas, on l'a vu en novembre dernier, le pas-hésitation, le pas en arrière) serait heureusement remplacée par une réforme d'ensemble donnant à l'enseignement scientifique une place au moins équivalente à l'enseignement littéraire. On imagine les bouleversements de nos habitudes que cela provoquerait. Je n'en citerai que quelques exemples ; l'égalité scientifique dans les classes de 4e et de 3e devrait sans doute être abandonnée ; la section C deviendrait une véritable section à prédominance scientifique ; la nécessité de créer une section moderne scientifique entraînerait la création d'une section moderne littéraire (en Seconde et Première tout au moins). Mais si le développement de la formation scientifique est une nécessité, ne faut-il pas aller au moins jusque-là ?

2. Recrutement et formation des maîtres. — La crise aiguë du recrutement a été maintes fois dénoncée. Une manière, aussi absurde qu'inélégante, d'y remédier consiste à embaucher des ingénieurs comme professeurs-contractuels, alors que l'industrie se plaint de manquer d'ingénieurs (et offre aussi des postes à des professeurs). Quand un système universitaire fonctionne de cette façon, on éprouve beaucoup d'indulgence à l'égard des plus grossières fautes de logique de nos mauvais élèves : ceux-ci ont un bel avenir ministériel.

Une autre manière de ne pas résoudre le problème consiste, si l'on appartient à l'Enseignement Supérieur, à accuser la Direction du Second Degré pour en faire la seule responsable du nombre insuffisant de candidats au C.A.P.E.S. et à l'agrégation et, si l'on appartient à la Direction du Second Degré, à accuser les professeurs de Faculté du nombre insuffisant des licenciés d'enseignement. Les deux attitudes étant adoptées par des personnalités compétentes et en les jugements desquelles nous sommes invités à avoir confiance par toutes sortes de raisons, il faut donc admettre que ces deux avis contradictoires contiennent une grande part de vérité. Le malheur c'est que cela ne fait pas recruter un professeur de plus.

Là encore, il est probable qu'on cherchera des solutions approchées. Elles auront le mérite, dans la mesure où elles réussiront, de remédier en partie au mal dénoncé par tous. Mais l'insuffisance de ces moyens aura l'inconvénient primordial de freiner le développement de l'enseignement scientifique désiré (voir 1°).

On résoudra ce problème n° 1, en inventant des solutions nouvelles pour le problème n° 2.

Une doctrine bien établie parmi nous est que les professeurs de l'Enseignement du Second Degré doivent être licenciés. Cependant, le cas des fameux contractuels

mis à part, il est heureux qu'un nombreux personnel non-licencié remplisse les postes que les seuls licenciés ne peuvent occuper. Par contre, il est déplorable qu'une partie importante de ce personnel soit : 1° exploitée (traitements insuffisants, horaire de service ne permettant pas de se cultiver et de s'initier aux travaux de la pédagogie théorique et pratique) ; 2° soit contrainte à un effort d'adaptation à l'enseignement des Mathématiques sans formation préalable.

Il me paraît évident que le niveau de la licence de Mathématiques est essentiellement du ressort des professeurs de l'Enseignement Supérieur. Que des mathématiciens aient tendance à donner à cette licence la haute valeur qui justifie la réputation de l'Enseignement supérieur est naturel. Mais que des professeurs de Faculté ne voient pas la solidarité nécessaire des enseignements est inquiétant. Ne leur faut-il pas inventer une formule nouvelle, qui pourrait s'appeler *licence d'enseignement moyen,* qui ferait une large place à la formation pédagogique et qui préparerait donc efficacement et rapidement un grand nombre de professeurs pour notre enseignement du premier cycle ? S'il faut sacrifier certaines questions d'importance théorique mais non pédagogique, ne faut-il pas l'accepter, quitte à aider le travail de culture des professeurs entrepris par l'A.P.M.E.P. avec l'aide précieuse de la Société Mathématiques et des professeurs de Faculté ?

Autrement dit, ne faut-il pas réformer fondamentalement la notion de licence d'enseignement ?

3. Nouveaux programmes et nouvelles méthodes. — Les instructions relatives aux nouveaux programmes de 6e et de 5e marquent une inflexion de nos conceptions traditionnelles (en baptisant tradition les habitudes des dernières décades). On peut en effet noter que CLAIRAULT, dans sa Géométrie de 1741, que POINCARÉ, dans sa célèbre conférence sur « les définitions mathématiques et l'enseignement », énoncent des vérités premières qualifiées d'hérésies par certains tenants de la « tradition ».

Au lieu d'entretenir ces querelles, l'A.P.M. n'a-t-elle pas mieux à faire ? N'est-il pas plus réaliste de faire fonctionner notre coopérative d'idées ? Il y a parmi nous des esprits solitaires et qui parviennent à tirer toutes leurs idées d'eux-mêmes. Mais il y a aussi des Collègues, dont je suis, qui ont le plus grand besoin de l'exemple des autres pour s'évader de la routine dans laquelle ils risquent constamment de retomber. C'est la vertu, je crois, de la confrontation des expériences, de la critique (honnête et fraternelle, bien entendu), des idées avancées par l'un ou par l'autre, d'aider ainsi tous ceux qui, bien souvent, souffrent de ne pas oser.

Au seuil de cette nouvelle année scolaire je formule donc le vœu de réunir, dans les pages du *Bulletin,* les précieux et nombreux témoignages de notre effort collectif.

Celui-ci ne doit d'ailleurs pas se limiter à une étroite conception de la pédagogie. Si l'enseignement veut, comme à mon avis il le doit, jouer un rôle moteur dans le progrès scientifique (et non pas, comme c'est le cas présentement, un rôle de frein), il faut que notre pédagogie soit ouverte sur *tous* les aspects de la recherche contemporaine. Tous, même les plus techniques, et, selon les premières apparences, les plus éloignées des Mathématiques. N'est-ce pas spécialement la tâche de nos sections locales ou régionales que de multiplier ces contacts entre les professeurs et toutes les personnes qui, dans l'Université ou l'industrie, sont aux prises avec les problèmes réels de la science qui se fait ?

*
**

Les tâches ne manquent pas et l'on me reprochera peut-être de les multiplier. La vérité est plutôt que si nous savons tout juste faire un petit pas après l'autre, nous resterons étrangers aux problèmes de l'ère planétaire qui s'est ouverte en octobre 1957.

G. W.

Réunion du bureau
(15 juin 1957)

(étendue aux membres des Conseils d'enseignement)

Présents : M. WALUSINSKI, Mlle MASSON ; MM. BAY, MOUGENOT, MONJALLON, DURRANDE, CHAZAL, SIROS. *Excusés :* Mlle FÉLIX ; MM. BIGUENET, LEGRAND.

I. Questions diverses. — 1) Le Président propose de fixer, à partir de la rentrée prochaine, des réunions de Bureau périodiquement fixées au premier jeudi de chaque mois. Cette proposition est adoptée.

2) *Organisation des régionales :* Il est souhaitable que leur activité se manifeste plus largement, comme cela a lieu pour quelques-unes. S'inspirer, à ce sujet, d'un article de MOUGENOT. La régionale de Lille est de celles qui fonctionnent le mieux.

II. Recrutement des maîtres. — Réflexions sur un article de M. BRUNOLD et observation de certains dangers que peut présenter un recrutement de professeurs parmi les ingénieurs. Il est très déplorable qu'une grande nation en vienne à de tels expédients pour assurer l'un de ses plus grands services, sinon le plus grand.

Etant donné que des postes sont attribués, à La Flèche et à Autun, à de jeunes professeurs dispensés, par affectation spéciale, du service militaire, on souhaite que cette mesure puisse être généralisée. (Cette idée a d'ailleurs été exprimée par le Ministre lui-même).

Sur cette question du recrutement des professeurs, il est décidé qu'une lettre collective (toutes les disciplines scientifiques sont en jeu) sera adressée à M. BRUNOLD.

III. Horaires et programmes. — Les programmes complets pour l'enseignement des Mathématiques devront être définitivement rédigés pour le 1er décembre prochain.

Cette décision a été obtenue par un accord entre le Directeur général, l'Inspection générale et le Président de l'A.P.M. Seuls seront appliqués, en octobre 1957, les nouveaux programmes de 6e et de 5e. Le problème des horaires dans toutes les autres classes reste posé.

La lecture de l' « exposé des motifs », préambule à l'Arrêté des programmes pour les classes de 6e et 5e, a soulevé une discussion assez confuse relative aux divers sens que peuvent prendre les locutions « travaux dirigés » et « travaux pratiques ». Il apparaît — et c'est évident — qu'on peut leur en trouver un, qui soit commun, et qui concilie plusieurs points de vue, car le professeur peut « diriger » aussi bien la mise en forme de la rédaction d'une solution que l'exécution de travaux pratiques proprement dits. Il serait bon que le texte précisât que « travail dirigé » ne veut pas dire « devoir surveillé » (1).

La question « horaires » a, dans ce sujet, une grande importance, on voudrait, évidemment : effectifs réduits, et une séance par semaine.

La lecture des programmes — à laquelle on n'a pu consacrer que peu de temps — a soulevé quelques réflexions, en particulier :

en 6e, il est difficile d'interpréter ce que signifie : « mesure d'un arc de cercle » ;

en 5e, sur l' « usage des parenthèses » : certaines opérations, (la « suppression... ») peuvent entraîner l'indication de calculs impossibles, et il faut prendre garde à ce qui serait mécanisme pur.

Difficulté encore concernant les cas d'égalité des triangles. Que faut-il en dire, et faut-il les faire passer pour des démonstrations ? Enfin, à propos des « formules », il semble qu'au niveau de la 6e, la formule ne puisse guère être envisagée autrement que comme une abréviation.

J. SIROS.

---

(1) Voir à ce propos les articles des pages 361 à 365 du *Bulletin* n° 185 paru entre la rédaction et la publication de ce compte rendu.

Réunion du Comité
(17 octobre 1957)

Le compte-rendu de cette réunion paraîtra dans le prochain Bulletin. Il a paru urgent de publier la lettre suivante à M. le Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré et le texte des motions adoptées :

MONSIEUR LE DIRECTEUR GÉNÉRAL,

J'ai l'honneur de porter à votre connaissance les textes ci-joints des motions adoptées par le Comité de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, lors de sa dernière réunion, le 17 octobre 1957.

Ces textes concernent l'arrêté du 12 août, relatif au nouvel horaire de mathématiques, dans les classes du premier cycle, le décret du 13 août, relatif aux professeurs contractuels, et enfin l'enquête que nous demandons à Monsieur le Ministre d'entreprendre au sujet de la disparition de notre Collègue Maurice AUDIN, assistant à la Faculté des Sciences d'Alger.

D'autre part, j'ai l'honneur de vous informer que notre Association organise, le jeudi 7 novembre, une réunion d'étude sur les nouveaux programmes, dans le but principal d'aider les Collègues à les mettre en pratique. Nous pensons que cette réunion pourra avoir lieu au Musée Pédagogique, et nous ne manquerons pas d'y inviter Messieurs les Inspecteurs Généraux (1).

Enfin, le Comité a mandaté le Bureau de notre Association pour qu'il suive attentivement la question de la réforme éventuelle du baccalauréat. Nous souhaitons en particulier le renforcement des coefficients des mathématiques dans certaines sections scientifiques (C et Moderne en particulier), ainsi que la transformation de la section Sciences Expérimentales pour en faire une véritable section scientifique (épreuve de mathématiques à l'écrit et coefficients des sciences majoritaires à l'écrit). Dans le cas où vous seriez désireux de réaliser cette réforme du baccalauréat, nous serions heureux de vous donner toutes les précisions utiles sur le détail de nos projets à ce sujet.

En vous remerciant de l'attention que vous porterez à cette lettre et aux textes joints, je vous prie d'agréer, Monsieur le Directeur Général, mes respectueuses salutations.

G. W.

Horaires et programmes.

Le Comité de l'A.P.M.E.P. prend acte de l'arrêté du 12 août 1957, portant augmentation de l'horaire de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement du second degré.

Il rappelle que l'augmentation de l'horaire de mathématiques répond au vœu de l'immense majorité des professeurs de mathématiques qui ont approuvé les principes d'action de l'A.P.M.E.P., lors de sa dernière assemblée générale, à la quasi unanimité des votants.

Le nouvel horaire représente donc *un premier pas* vers l'amélioration de notre enseignement scientifique pour lui donner les moyens en rapport avec l'importance des sciences dans notre civilisation contemporaine et réaliser une véritable culture scientifique.

Le Comité entend préciser qu'il approuve pleinement le vote des représentants des professeurs de mathématiques au Conseil Supérieur ; vote favorable à cette aug-

(1) Faute de salle disponible, la réunion a eu lieu au Lycée St-Louis.

mentation d'horaire, vote défavorable à l'amputation correspondante d'autres horaires. Le Comité de l'A.P.M.E.P. rappelle que l'Association s'interdit toute déclaration et toute action hors de sa stricte compétence, laquelle ne concerne que l'enseignement des mathématiques et la formation et le perfectionnement des professeurs de mathématiques. Le Comité proteste donc contre les décisions du Ministre de l'Education Nationale qui sont en désaccord avec les votes du Conseil Supérieur, et qui ne paraissent dictées que par des considérations budgétaires ; il lui en laisse l'entière responsabilité.

Le Comité entend poursuivre son action pour l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, persuadé qu'il agit ainsi dans l'intérêt bien entendu des individus et de la collectivité.

Les professeurs contractuels.

Le Comité de l'A.P.M.E.P., ayant pris connaissance du décret 57-936, du 13 août 1957, relatif au recrutement d'agents contractuels pour assurer l'enseignement des mathématiques et des sciences physiques, proteste contre ces décisions ministérielles et les commentaires des personnalités officielles, qui ont précédé ou suivi la publication du décret (1).

Les professeurs de mathématiques connaissent les difficultés du recrutement de maîtres qualifiés, et, dans toute la mesure de leurs moyens et depuis longtemps, ils font tous leurs efforts pour aider à la formation de jeunes maîtres. L'activité des Centres Pédagogiques Régionaux, la préparation du C.A.P.E.S. et de l'agrégation par correspondance, l'action de nombreux conseillers pédagogiques sont des exemples qui en témoignent.

Le Comité déplore que ces efforts soient contrebattus par des mesures administratives de caractère démagogique, laissant croire que des ingénieurs ou des techniciens, même s'ils ont fait leurs preuves dans les domaines de leurs spécialités, pourront s'improviser maîtres d'école.

Il note, en particulier, que, pour attirer des candidats-contractuels, les conditions de traitement qui leur sont proposées (indices de début des agrégés aux moins favorisés, indice des agrégés en fin de carrière aux plus favorisés), sont très supérieures à celles qui sont réservées aux jeunes professeurs débutants. Il n'y a pas de moyen plus efficace de montrer à ces derniers qu'ils ont eu tort de consacrer plusieurs années, dans des conditions de travail souvent pénibles, à accroître leurs connaissances et leur formation pédagogique, et par conséquent, de diminuer encore le nombre des candidats aux concours normaux de recrutement dans les années à venir.

Le Comité considère que ces mesures sont et resteront sans effet sur la crise dramatique du recrutement des maîtres, si ce n'est pour en accroître les difficultés en décourageant les candidats aux concours normaux et en créant, parmi les professeurs en exercice, le sentiment que leurs efforts passés et présents, pour améliorer la pédagogie des mathématiques, sont voués à la critique non fondée des officiels et au sabotage.

---

(1) Discours de M. le Directeur Général du Second Degré, au Congrès de l'Association des Anciens Elèves des lycées et collèges, Reims, le 8 juin 1957 : « J'ai décidé de faire un très large appel aux retraités..., aux contractuels, aux licenciés de mathématiques et de physique, aux ingénieurs, même s'ils n'ont jamais enseigné, aux possesseurs de deux ou trois certificats de licence pour faire les cours de 6e et de 5e. *Ces nouveaux professeurs ayant souvent une expérience de la vie des entreprises et des industries enseigneront d'une façon plus vivante les sciences et les mathématiques. Ces nouvelles méthodes d'enseignement intéresseront un plus grand nombre de lycéens et d'étudiants.* » (C'est nous qui soulignons).

Le Comité, soucieux de résoudre pratiquement et efficacement le problème essentiel du recrutement réclame : 1° pour parer au plus pressé, que la possibilité soit donnée aux professeurs retraités, de cumuler leur retraite avec un demi-traitement correspondant à un demi-service ; qu'au lieu de nommer les jeunes gens qui viennent d'être reçus à l'agrégation ou au C.A.P.E.S. dans les postes d'Algérie, que ces postes soient pourvus par l'affectation spéciale de jeunes gens, faisant leur service militaire normal et pour la durée de ce service ; 2° pour trouver un remède durable à la crise, que soient accordés des traitements décents aux professeurs et de larges possibilités de préparation aux études scientifiques dans les I.P.E.S.

Le Comité décide :

1) de prendre immédiatement contact avec l'Union des Physiciens et l'Union des Professeurs de Spéciales, en vue d'organiser une action commune dont l'objectif serait l'abrogation du décret susvisé ;

2) de proposer à ces organisations, au cas où l'action commune n'aboutirait pas au résultat espéré, de suspendre la participation des professeurs titulaires aux jurys des concours du recrutement.

Appel à Monsieur le Ministre de l'Education Nationale :

Le Comité de l'A.P.M.E.P. rappelle, que, si l'Association est essentiellement une coopérative pédagogique, si elle s'interdit d'empiéter sur les domaines d'activité syndicale propre, elle ne peut se désintéresser du sort matériel et moral des professeurs de mathématiques de l'Enseignement Public. Encore moins s'il s'agit de la vie de l'un d'entre eux.

Le Comité croit donc de son devoir d'adresser un appel solennel à Monsieur le Ministre de l'Education Nationale pour qu'il fasse ouvrir toutes les enquêtes nécessaires, afin que la lumière soit faite sur la disparition de Maurice AUDIN, agrégé de mathématiques, assistant à la Faculté des Sciences d'Alger. »

Le bloc-notes de l'A.P.M.

AVIS TRES IMPORTANT

Rappelons à tous les collègues que la cotisation pour l'année scolaire 1957-58 doit être versée avant le 1er décembre 1957, dernier délai.

Virement de 800 F au C.C.P. Paris, 5 708-21, au nom de l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris, 5e.

Appel est fait aux correspondants de l'A.P.M., dans chaque établissement, pour solliciter les cotisations des nouveaux collègues, et réclamer celles des anciens.

Faites tous vos virements avant le 1er décembre : faute d'avoir acquitté leurs cotisations à cette date, les retardataires s'exposeraient à ne plus recevoir tous les Bulletins, auxquels ont droit les adhérents en règle (ceci vise en particulier les recueils d'énoncés).

Que les Collègues, ayant changé d'établissement, veuillent bien nous en informer clairement : ancienne adresse, nouvelle adresse.

Tout ce que vous ferez pour faciliter la tâche écrasante du Trésorier et de l'Administration de l'A.P.M., profitera à l'Association.

★ **Programmes des classes de baccalauréat.** — A la suite de diverses demandes de renseignements, nous croyons pouvoir préciser que les modifications de programmes intervenues en novembre 1956 pour les classes terminales et les classes de Première (modifications commentées dans le Bulletin 183), restent applicables pour la présente année scolaire. La validité des modifications n'a pas été limitée dans le temps.

★ **Inspection générale.** — MM. les Inspecteurs Généraux DEDRON et ROBERT ont pris cette année leur retraite. Au nom de l'A.P.M., nous leur présentons nos vœux très chaleureux et les prions de croire que nos sentiments de respect et d'estime leur sont acquis. Nous souhaitons, en particulier, que MM. DEDRON et ROBERT continuent à assurer le Bulletin de l'A.P.M., de leur précieuse collaboration, dans toutes les circonstances où ils le désireront.

Nous saluons, en même temps, la nomination comme Inspecteur général de notre Collègue THÉRON, professeur de mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand, ancien vice-président de l'A.P.M. Au nom de l'Association, nous adressons nos félicitations à M. THÉRON et le remercions de son activité au profit de l'A.P.M.

★ **Les enquêtes de la C.I.E.M.** — Une lettre-circulaire du Bureau de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique rappelle que les rapports préparatoires pour le Congrès international d'Edimbourg (août 1958) doivent être envoyés, par les sous-commissions nationales, avant le 31 janvier 1958. Il est donc recommandé, de façon pressante, à toutes les personnes voulant bien contribuer à l'élaboration de ces rapports, d'envoyer leurs contributions, avant le 31 décembre 1957, aux trois rapporteurs :

1° L'enseignement des mathématiques jusqu'à l'âge de 15 ans : M. WALUSINSKI.

2° Les bases scientifiques des mathématiques dans l'enseignement secondaire : M. DUBREIL.

3° Etude comparée des méthodes d'initiation à la géométrie : M. CHOQUET.

★ **L'Enseignement Mathématique.** — La revue officielle de la C.I.E.M., *L'Enseignement Mathématique*, nous informe qu'elle accorde une réduction de 20 % aux membres de l'A.P.M. La même réduction est valable sur les monographies de l'*E.M.* Pour en bénéficier, adressez vos virements à G. WALUSINSKI, 26, parc de la Bérengère, St-Cloud (S.-et-O.), C.C.P., Paris, 14.584-50, qui transmettra.

★ **Les conférences d'astronomie.** — Le recueil des conférences d'astronomie d'avril dernier n'est pas encore paru. Que les Collègues intéressés veuillent bien prendre patience : leurs demandes ne sont pas oubliées.

★ **Rectificatif.**

Question 184-1. Réponse du lycée mixte de Saint-Dié (Bulletin n° 185) : Deux réponses, contradictoires en ce qui concerne l'algèbre, ont été fusionnées par erreur. Le paragraphe : « Je trouve également... Aucune différence en algèbre » est de J. Vuillaume (enseignement masculin, puis mixte). Le reste de la réponse (alinéas précédents et suivant) est de M. Arnoux (enseignement féminin, puis mixte).

★ **Les Bulletins de l'A.P.M.** — Le Bulletin 187 paraît avec un grand retard ; nous prions les Collègues d'en excuser la Rédaction : celle-ci fait ce qu'elle peut pour mener à bien de multiples tâches. Elle fera son possible pour rattraper partiellement au moins le temps perdu.

Dates prévues pour les prochains Bulletins : 188 (début janvier), 189 et 190, annales du baccalauréat et du B.E.P.C., 191 (début février), 192 (15 mars).

Le Gérant : G. WALUSINSKI.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 91.595. — Dépôt légal : IV-1957

LIBRAIRIE ANDRÉ DESVIGNE — 17, rue Mulet, LYON

MATHÉMATIQUES

COLLECTION COMPLETE

Classes de PREMIERE :

LESPINARD et PERNET. — ALGEBRE, classe de Première C.M. Br. : 545 F., cart. : 655 F,
LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Première C.M. Br. : 600 F., cart. : 730 F.
LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Première A.B. ..... Br. : 585 F., cart. : 705 F.
LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES, Bac., 1re partie, séries C. et M. ..... 285 F.

Classes de SECONDE :

LESPINARD et PERNET. — ALGEBRE, classe de Seconde C.M. ..... Br. : 400 F., cart. : 500 F,
LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Seconde C.M. .... Br. : 575 F., cart. : 695 F,
LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Seconde A.B.
Algèbre et géométrie : 1 volume ..... Br. : 535 F., cart. : 655 F,

1er CYCLE

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Cinquième, *Livre de Corrigés.*
LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Sixième, *Livre de Corrigés.*
Note Importante. — Les livres de corrigés ne sont pas en vente dans le commerce ils sont réservés aux Professeurs de Mathématiques, à qui ils sont remis en spécimen.

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Troisième.
Edition Lycées et Collèges ..... Br. : 455 F., cart. : 560 F,
Edition Cours Complémentaires ..... cart. : 680 F.
LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Quatrième.
Edition Lycées et Collèges ..... Br. : 425 F., cart. : 530 F.
Edition Cours Complémentaires ..... cart. : 635 F.
LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Cinquième.
Edition Lycées et Collèges ..... Br. : 335 F., cart. : 435 F.
Edition Cours Complémentaires ..... cart. : 495 F.
LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Sixième.
Edition Lycées et Collèges ..... Br. : 270 F., cart. : 370 F.
Edition Cours Complémentaires ..... cart. : 355 F.

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHEMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique et Cosmographie) ..... Br. : 830 F., cart. : 930 F.

Classe de PHILOSOPHIE :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGEBRE ET COSMOGRAPHIE .. Br. : 420 F., cart. : 550 F.

Classe de MATHEMATIQUES : Cours complet :

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE ..... Br. : 700 F., cart. : 805 F.
» — GEOMETRIE DESCRIPTIVE, édition 1957 refondue ..... Br. : 395 F., cart. : 540 F.
» — ARITHMETIQUE ..... Br. : 345 F., cart. : 490 F.
» — MECANIQUE ..... Br. : 250 F., cart. : 340 F.
LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE, ... Br. : 390 F., cart. : 490 F.
LESPINARD et PERNET. — ALGEBRE ..... Br. : 605 F., cart. : 705 F.
» — TRIGONOMETRIE ..... Br. : 380 F., cart. : 475 F.
» — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES, Bac., 2e partie, classe de Mathématiques ..... 400 F.

Prix taxe locale incluse

MAISON D'EDITIONS AD. WESMAEL-CHARLIER, S.A.
NAMUR (Belgique)

Correspondant en France :

Éditions WESMAEL-CHARLIER
S.A.R.L.
PARIS

Extrait du
Catalogue général

Collection HERBIET

Traité d'Algèbre Élémentaire

564 + XVI pp., 165 figures

Cours d'Algèbre

165 fig., 384 pp.

CATALOGUE GRATUIT SUR DEMANDE

GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VI^e^ — DANton 05-10

COUDERC (P.), PECKER (J. C.) et SCHATZMAN (E.)

L'ASTRONOMIE AU JOUR LE JOUR

Recueil de trente-sept causeries radiophoniques faites au Poste National. In-8° (16-25), 152 p., 15 pl. hors-texte ; 1954 ..... 700 F

HENKIN (L.)

LA STRUCTURE ALGEBRIQUE DES THEORIES MATHEMATIQUES

(Collection de Logique mathématique. Fascicule XI, Série A). In-8° (16-25) de 52 pages ; 1956 ..... 900 F

Chapitre Premier : La représentation des Algèbres de BOOLE.

MILLOUX (H.), avec la collaboration de **Ch. PISOT**

PRINCIPES. METHODES GENERALES

(Tr. Théorie des Fonctions)

Tome I, fascicule I : In-8° (16-25) de VIII-300 pages ; 1954 .... 4.500 F

Tome I, fascicule II : In-8° (16-25) de 304 pages ; 1956 ..... 4.500 F

RISSER (R.) et TRAYNARD (C.-E.)

LES PRINCIPES DE LA STATISTIQUE MATHEMATIQUE

(Fascicule IV du Tome I du Traité du Calcul des Probabilités et ses applications, publié sous la direction de M. Emile Borel), 2^e^ édition revue et augmentée. In-8° (16-25).

Livre 1. Séries statistiques, XVI-195 pages, 2 figures, 1957 .... 3.500 F

DELAGRAVE

COURS DE MATHEMATIQUES
H. SCHAEFFER-J. LEBAILE

Ce cours était déjà celui des Professeurs acquis aux nouvelles tendances de l'enseignement des mathématiques. Il est maintenant, en outre, parfaitement conforme à l'esprit des nouveaux programmes (arrêté du 12-8-57).

Nouvelle édition : **ARITHMETIQUE, cl. de 6e**

format (15,5 × 22). Br. **350** » Cart. **470** »

Sous presse : **SUPPLÉMENT (notions d'astronomie, sphère, etc.).**

MATHEMATIQUES, cl. de 5e

un vol. (14,5 × 21) Br. **390** » Cart. **480** »

en préparation : **SUPPLÉMENT.**

MATHEMATIQUES, cl. de 4e

un vol. (14,5 × 21) Br. **520** » Cart. **620** »

Sous presse : **MATHEMATIQUES, cl. de 3e**

UNE NOUVELLE COLLECTION — UNE COLLECTION NOUVELLE

COLLECTION BREARD

La classe de sixième étant considérée comme une classe de mise au point et d'initiation, le manuel correspondant a mis l'accent sur **le développement du calcul mental, l'apprentissage de la géométrie** (utilisation de la règle, du rapporteur) et la révision systématique des notions déjà acquises.

En 5e, 4e, 3e, l'auteur, par un **exposé original** de l'Arithmétique et de l'Algèbre, **basé sur les notions de segments et de vecteurs,** initie l'élève au mécanisme de l'Algèbre.

En géométrie, une place importante est laissée à **la réalisation des figures.** Le cours se caractérise par une **utilisation systématique des symétries,** des bandes, des notions vectorielles, comme le stipulent les programmes de 4e et de 3e.

Chaque ouvrage comprend de **nombreux exercices** gradués et progressifs (environ 2.000 dans chaque manuel).

Mathématiques, classe de sixième ..... **430 F**

Arithmétique-Algèbre, classes de 5e, 4e, 3e ..... **620 F**

Géométrie, classes de 5e, 4e, 3e ..... **690 F**

ÉDITIONS DE L'ÉCOLE. 11, Rue de Sèvres, **PARIS**



NICOLAS BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

I. Les Structures fondamentales de l'analyse

21 fascicules in-8 publiés dans la collection
Actualités Scientifiques et Industrielles

I. Livre I. Théorie des Ensembles : fascicule de résultats en réimpression
II. — III. Topologie générale. 1 - 2 . **2.000 F**
II. — III. Topologie générale. 1-2 ... **2.000 F**
III. — III. Topologie générale. 3-4 ... **1.500 F**
IV. — II. Algèbre. 1 ..... en réimpression
V. — III. Topologie générale. 5-6-7-8. **1.200 F**
VI. — II. Algèbre. 2 ..... **1.600 F**
VII. — II. Algèbre. 3 ..... en réimpression
VIII. — III. Topologie générale, 9 en réimpression
IX. — IV. Fonctions d'une variable réelle. 1-2-3 ..... **1.200 F**
X. — III. Topologie générale. 10 .... **750 F**
XI. — II. Algèbre. 4-5 ..... **1.800 F**
XII. — IV. Fonctions d'une variable réelle. 4-5-6-7 ..... **1.800 F**
XIII. — VI. Intégration. 1-2-3-4 ..... **2.500 F**
XIV. — II. Algèbre. 6-7 ..... **1.800 F**
XV. — V. Espaces vectoriels topologiques. 1-2 ..... **1.500 F**
XVI. — III. Topologie générale : fascicule de résultats ..... **1.100 F**
XVII. — I. Théorie des ensembles. 1-2 **1.500 F**
XVIII. — V. Espaces vectoriels topologiques. 3-4-5 ..... **2.000 F**
XIX. — V. Espaces vectoriels topologiques : fascicule de résultats **400 F**
XX. — I. Théorie des ensembles. 3 . **1.500 F**
XXI. — VI. Intégration. 5 ..... **1.600 F**

Sous presse :

XXII. Livre I. Théorie des ensembles. 4
XXIII. — II. Algèbre. 8

Extrait du Catalogue général

CAHEN. — Théorie des nombres. Le premier degré ..... **1.000 F**
CHEVALLEY. — Théorie des groupes de Lie.
Tome II. Groupes algébriques ..... **2.000 F**
Tome III. Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie ..... **2.800 F**
HADAMARD. — Le problème de Cauchy ..... **1.500 F**
KAPLANSKY. — An introduction to differential algebra ..... **800 F**
LUTZ. — Sur les approximations diophantiennes linéaires P-adiques ..... **1.200 F**
RUSSO. — Histoire des Sciences et des Techniques, avec bibliographie et supplément **2.000 F**
SANTALO. — Introduction to integral geometry ..... **1.500 F**
SCHWARTZ. — Théorie des Distributions.
Tome I ..... **1.800 F**
Tome II ..... **1.500 F**
WEIL. — L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications ..... **1.200 F**
Variétés abéliennes et courbes algébriques ..... **850 F**
WU WEN TSUN et G. REEB. — Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées .. **2.000 F**

Sous presse :

Roger GODEMENT. — Topologie algébrique et théorie des faisceaux .....
André WEIL. — Introduction à la théorie des variétés kaelhériennes .....

HERMANN

6, RUE DE LA SORBONNE, PARIS, V^e^

Enseignement Audio-Visuel

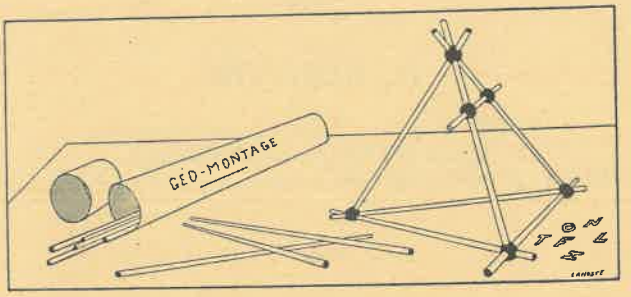
GEO-MONTAGE

Nouvelle présentation de VIT'APPRIS - breveté S.G.D.G.

49, Bd Diderot - Paris XII^e

CONSTRUCTION RAPIDE D'UNE FIGURE A TROIS DIMENSIONS

Procédé recommandé par le Ministère de l'Education Nationale



PRIX UNITAIRE :

- *Soit 650 F à la commande.*
- *Soit 750 F contre remboursement.*

BON DE COMMANDE

NOM

ADRESSE

Nombre de GEO-MONTAGES désirés

Mode de règlement choisi (Rayer les mentions inutiles) :

- Virement postal au C.C.P. n° 14868.23.
- Chèque bancaire à GEO-MONTAGE.
- Contre remboursement.

(Réduction de 10 % pour classe entière : 15 unités minimum)

PRÉCIS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROGRAMMES A_1 et A_2

PAR

R. GOUYON

Ancien élève de l'Ecole normale supérieure
Agrégé des sciences mathématiques
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse

★

OUVRAGE CONFORME AUX NOUVEAUX PROGRAMMES A_1 et A_2
APPLIQUES DEPUIS LE 1er OCTOBRE 1956

★

Vol. 16 × 24 cm., de X, 658 pages, relié
pleine toile ..... **6 300 F**

★

LIBRAIRIE VUIBERT
63, boulevard Saint-Germain, PARIS, V^e^

ENSEIGNEMENT AUDIO-VISUEL
DE LA
GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

★

Le 1er film fixe sur le cours de Première

Toutes les questions du cours, en couleur, analysant les figures complexes, accompagnées du texte.

La série de 10 films ..... 5.750 F

★

OFFICE DE DOCUMENTATION PAR LE FILM

31, rue du Général Delestrain

PARIS 16e

J.-B. BAILLIERE et Fils, Editeurs, 19, rue Hautefeuille, Paris-VIe

COURS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

par Robert DELTHEIL

Recteur honoraire de l'Académie de Toulouse
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

A l'usage des candidats à la licence ès-sciences mathématiques ou physique et des élèves des écoles d'ingénieurs

TOME I : **Compléments d'Algèbre et de Trigonométrie.** Premières notions de Géométrie analytique. Eléments de calcul différentiel.
Un volume 18/22, 383 pages, 161 fig., 650 g. .... **2.500 F** Franco de port .... **2.630 F**

TOME II : **Eléments de Calcul intégral.** Applications de l'Analyse.
Un volume 18/22, 400 pages, 200 fig., 670 g. .... **2.500 F** Franco de port .... **2.630 F**

TOME III : **Eléments de Mécanique.**
Un volume 18/22, 263 pages, 106 fig., 470 g. .... **2.000 F** Franco de port .... **2.130 F**

COMPLEMENTS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

TOME I : **Algèbre linéaire et Calcul différentiel.**
Un volume 18/22, 200 pages, 15 fig., 350 g. .... **1.500 F** Franco de port .... **1.585 F**

TOME II : **Calcul intégral. Fonction d'une variable.**
Un volume 18/22, 240 pages, figures, 410 g. .... **1.800 F** Franco de port .... **1.930 F**

TOME III : **Equations différentielles. Calcul symbolique.**
Un volume 18/22, 310 pages, 60 fig., 580 g. .... **2.000 F** Franco de port .... **2.130 F**

PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES
correspondant aux cours des Tomes I et II

TOME I : Un volume 18/22, 208 p., 130 fig. 400 g. .... **1.800 F** Franco de port .... **1.930 F**
TOME II : Un volume 18/22, 270 p., 88 fig., 430 g. .... **2.000 F** Franco de port .... **2.130 F**

Les cours et problèmes de Mathématiques ci-dessus sont fournis en spécimens aux Professeurs à 50 %

FERNAND NATHAN, ÉDITEUR

Les ouvrages de MATHEMATIQUES les plus répandus

C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY
Agrégés de Mathématiques

COURS DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE SIXIEME :
Arithmétique et dessin géométrique ..... **330 F**
● CORRIGÉ des exercices (classe de sixième)
offert aux seuls professeurs.

CLASSE DE CINQUIÈME :
Arithmétique, Algèbre et Géométrie ..... **360 F**
CORRIGÉ des exercices (classe de cinquième) ..... **235 F**

CLASSE DE QUATRIÈME :
Arithmétique, Algèbre et Géométrie ..... **400 F**

CLASSE DE TROISIÈME :
Arithmétique, Algèbre et Géométrie ..... **435 F**

CLASSE DE SECONDE : Algèbre ..... **445 F**
CLASSE DE SECONDE : Géométrie plane ..... **465 F**
CLASSE DE PREMIÈRE : Algèbre et Trigonométrie .... **495 F**
CLASSE DE PREMIÈRE : Géométrie dans l'espace .... **465 F**
● CLASSE DE SECONDE A et B : Algèbre et Géométrie. » **F**
CLASSE DE MATHÉMATHIQUES ÉLÉMENTAIRES :
Géométrie ..... **1.200 F**
BACCALAURÉAT 1re partie TECHNIQUE :
Compléments d'Algèbre et Géométrie descriptive .. **465 F**

Nouveauté :

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

CLASSE DE SECONDE A et B

● *Conçu dans l'esprit des volumes de la collection, ce nouvel ouvrage, répondant à la demande générale, ne comporte que la matière du programme des sections A et B.*

UN VOLUME CARTONNE ..... **590 F**

18, rue Monsieur-le-Prince, PARIS-VIe

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD

GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

ARITHMÉTIQUE 6e *(Jusqu'à épuisement)*	**220 F**
ARITHMÉTIQUE 6e — Nouvelle édition mise à jour	**330 »**
Corrigé des exercices de 6e	**300 »**
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6e et 5e	**185 »**
GEOMÉTRIE 5e et 4e	**400 »**
ARITHMÉTIQUE 5e. — Nouvelle édition mise à jour	**450 »**
Corrigé des exercices de 5e	**300 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4e	**300 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3e	**390 »**
GÉOMÉTRIE 3e	**325 »**
GÉOMÉTRIE 5e, 4e, 3e (pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages **cartonné**).	**800 »**
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3e MODERNE COURT.	**100 »**
ALGÈBRE 2e A.B.C.M.	**500 »**
GÉOMÉTRIE 2e A.B.C.M.	**465 »**
ALGÈBRE 1re A.B.	**180 »**
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1re C.M.	**550 »**
GÉOMÉTRIE 1re A.B.C.M.	**500 »**

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1re partie, A.B.C.M.	**390 »**
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	**410 »**

COURS DE MATHÉMATIQUES

par **Roland MAILLARD**
Inspecteur Général de l'Instruction Publique

et **Albert MILLET**
Professeur agrégé au Lycée Janson-de-Sailly et à l'É. N. S. E T

Enseignement du Second degré

Classe de Sixième. *Un volume.* + Corrigés.
Classe de Cinquième. *Un volume* + Corrigés.
Classe de Quatrième. *Un volume* + Corrigés.
Classe de Troisième. *Un volume* + Corrigés.

Classes de Seconde Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Seconde Classique C et Moderne :
Algèbre. *Un volume.*
Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.

Classes de Première Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Première Classique C et Moderne :
Algèbre et Trigonométrie. *Un volume* + Corrigés.
Géométrie. *Un volume* + Corrigés.

Classe de Première (Technique)
Géométrie descriptive. *Un volume.*

Classe de Sciences expérimentales :
Mathématiques. *Un volume.*

Classes de Philosophie et Sciences expérimentales :
Cosmographie. *Un volume.*

Classe de Philosophie :
Trigonométrie et Algèbre. *Un volume.*
Mathématiques (Trigonométrie, Algèbre et Cosmographie). *Un volume.*

Classe de Mathématiques :
Algèbre. *Un volume.*
Arithmétique. *Un volume.*
Cosmographie. *Un volume.*
Géométrie. *Un volume.*
Géométrie descriptive. *Un volume.*
Trigonométrie. *Un volume.*
Mécanique. *Un volume.*

Classe de Mathématiques (Technique)
Algèbre. *Un volume.*
Géométrie. *Un volume.*
Trigonométrie. *Un volume.*
Géométrie descriptive. *Un volume.*

Cours Complémentaires

Classe de Sixième. *Un volume.* + Corrigés.
Classe de Cinquième. *Un volume.* + Corrigés.
Classe de Quatrième. *Un volume.* + Corrigés.
Classe de Troisième. *Un volume.* + Corrigés.

+ Les **Corrigés,** hors commerce, sont exclusivement réservés à MM. les Professeurs de Mathématiques.

CLASSIQUES HACHETTE