

≡ V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS ≡

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE FONTENAY-AUX-ROSES

Session de 1936

Première composition de Mathématiques

(Option Mathématiques) *

Répartition des notes (cotées de 0 à 60). — L'étalement des notes est très régulier avec accumulations vers 34-35 et entre 25 et 28.

A part une copie se détachant du lot, l'ensemble est très terne, toutes les candidates ayant perdu un temps considérable dans les deux premières parties malgré la facilité des questions posées. La quatrième partie du problème a perdu ainsi beaucoup de son importance, puisque la grande majorité des candidates n'a pu l'aborder avec fruit ; c'est regrettable, car le calcul devait alors faire place à la géométrie, et la valeur des candidates, en ce qui concerne cette partie du programme, n'a pu être appréciée.

Observations générales. — Le problème proposait l'étude d'une des familles de coniques passant par les sommets d'un triangle équilatéral et ayant pour foyer F un point du cercle circonscrit à ce triangle, famille pour laquelle la directrice associée à F passait par le centre O du triangle.

Pour éviter que certaines candidates soient arrêtées par la recherche de l'équation des familles de coniques, les questions 1 et 2 du texte demandaient une étude algébrique d'un système d'équations linéaires qui devait être utile dans la suite et permettait d'alléger la recherche analytique du § 3.

Le but que l'on se proposait ainsi n'a pas été atteint, car, pour presque toutes les candidates, cette étude élémentaire d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues s'est transformée en une masse inextricable de calculs aussi maladroits qu'inutiles et a absorbé tout le temps de l'épreuve.

Savoir calculer n'est peut-être pas une preuve d'intelligence, mais il faut tout de même beaucoup de réflexion et quelque finesse pour éviter de faire des calculs inutiles ou stupides. C'est dans ce même esprit qu'on se plaît aussi à répéter que l'orthographe n'est pas une preuve d'intelligence ; cela prouve surtout beaucoup de négligence, de laisser-aller, une absence regrettable de volonté et surtout de ténacité ; on aime beaucoup philosopher sur une question, mais on n'a plus le goût de la traiter en toute rigueur et de façon complète ; cela exige en effet, non seulement de l'intelligence et de l'imagination, mais une solide technique qu'on n'a peut-être plus le temps ou le goût d'acquérir.

Voici, à propos du problème, des remarques qui vont illustrer ce qui précède :

1) Dans la plupart des copies, les déterminants du troisième ordre ne sont développés que par la règle de Sarrus (baptisé Syrrhus... par une candidate) ou par rapport aux éléments d'une rangée (laquelle est toujours la première ligne, sans même avoir regardé si une autre rangée donnerait des calculs plus simples).

On semble ignorer l'intérêt de faire apparaître des zéros, soit par soustraction de rangées (quand on a par exemple une colonne de 1, comme dans la première partie du problème), soit par combinaison linéaire de rangées parallèles (pour le déterminant, précité du problème, la somme des termes des deux premières colonnes était

(*) Voir les énoncés dans le *Bulletin* 178, p. 540 et sq.

nulle, conséquence du fait que la somme de trois vecteurs de même module faisant entre eux des angles de 120° est nulle). On devrait aussi songer qu'un déterminant du troisième ordre a des significations géométriques simples (aire d'un triangle, volume d'un parallélépipède) ; pour le § 1, il suffisait de reconnaître l'aire d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1, pour trouver, *sans aucun calcul*,

sa valeur $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (le côté ayant pour longueur $\sqrt{3}$).

2) A cette maladresse dans le maniement des déterminants est venue s'ajouter pour le § 2 la faiblesse en calcul trigonométrique ; les formules les plus simples sont ignorées, en particulier celles transformant les produits en sommes et les sommes en produits.

Il suffisait d'ailleurs de faire un *seul calcul*, par exemple celui de u ; en effet, v s'en déduisait en changeant θ en $\theta - \frac{\pi}{2}$ et α en $\alpha - \frac{\pi}{2}$. w , qui n'intervenait pas de la même façon, était donné par la première équation (la plus simple) une fois u et v déterminés.

Donc, au lieu d'appliquer automatiquement trois fois de suite la règle de Cramer, il eût mieux valu réfléchir et s'apercevoir qu'on pouvait se borner au calcul d'un seul déterminant.

Naturellement, ces calculs inutilement longs, maladroits et le plus souvent faux, sont présentés de façon inadmissible. Beaucoup de copies sont de véritables brouillons. Faut-il aussi rappeler que tous les calculs doivent être transcrits sur la copie, sinon les résultats indiqués sont sans valeur.

3) Dans le § 3, où il s'agissait de calculs analytiques, on retrouve encore des maladresses et beaucoup d'écritures inutiles (on laisse courir le stylo-bille au lieu de réfléchir à l'utilité de ce que l'on écrit). Malgré les indications de l'énoncé, certaines candidates partent de l'équation générale d'une conique $Ax^2 + 2Bxy + \dots = 0$ dans l'espoir de déterminer les coefficients par un système de cinq équations à cinq inconnues !!! D'autres, par un automatisme tout aussi condamnable, décrètent que les coniques forment un faisceau linéaire, comme si la seule famille de coniques concevable soit le faisceau.

Au lieu de partir de l'équation focale de la conique, comme le suggérait l'énoncé, beaucoup traduisent analytiquement et lourdement l'égalité des rapports

$$\frac{PF}{Pp} = \frac{\varphi F}{\varphi p} = \frac{RF}{Rr}$$

Pp étant la distance à une droite à déterminer qui sera la directrice (à ce sujet, il faut signaler que dans un très grand nombre de copies la formule de la distance d'un point à une droite est fautive, car on écrit $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ au dénominateur).

Maladresse également pour introduire l'excentricité ; au lieu d'écrire simplement $(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 = (ux + vy + wR)^2$ l'excentricité étant égale à

$\frac{e^2(ux + vy + w)^2}{u^2 + v^2}$, on écrit le deuxième membre $\frac{e^2(ux + vy + w)^2}{u^2 + v^2}$; ceci suffit d'ailleurs à

gêner les candidates qui ne retrouvent plus exactement le système (S). Le plus grave est que la plupart des candidates ne remarquent pas que u, v, w ne sont définis qu'*au signe près*, puisqu'ils ne figurent que dans une expression au carré. Elles ont donc trouvé dans le système déterminant u, v, w un ξ de plus que dans le système (S).

Certaines affirment alors qu'elles obtiennent deux systèmes différents pour $\xi = +1$ et $\xi = -1$ et affirment que chacun d'eux caractérise une des deux familles de coniques demandées ; cela ne les dérange pas d'avoir montré au § 2 que le système (S) admettait déjà deux solutions distinctes (en groupant les trois solutions déduites par rotation de 120°).

Une fois l'équation de la famille (H) trouvée, pourquoi se dépêcher de la développer et de l'ordonner ; cela ne sert à rien et mieux vaut conserver l'équation sous sa forme focale ; on retrouve constamment cette manie d'écrire des calculs avant de s'inquiéter de leur utilité.

Que dire aussi des candidates qui, après avoir trouvé que l'excentricité est égale à 2, s'acharnent à démontrer que les coniques sont des hyperboles en étudiant les directions asymptotiques.

4) Pour le lieu des centres des hyperboles (H) dans le § 4, la recherche des coordonnées ne présente pas de difficultés, mais les fautes de calcul et les maladresses

(on passe en $\frac{\theta}{2}$ au lieu de garder les fonctions trigonométriques de θ) se font plus nombreuses : elles sont dues sans doute à la fatigue et à l'énerverment des candidates.

Même celles qui avaient les expressions exactes des coordonnées du centre, n'ont pas su construire exactement la courbe. Très peu ont justifié géométriquement que le point O était un centre de répétition d'ordre 3 ; quant à la vérification analytique de cette propriété, ou elle a fait appel à des calculs bien pesants, ou elle n'a pas abouti (faute par exemple de reconnaître les expressions de $\cos 3\theta$ ou $\sin 3\theta$).

La dernière partie du problème que l'on pouvait traiter entièrement par la géométrie, n'a été traitée de façon d'ailleurs assez complète que par une candidate ; les autres, prises par le temps, ont aligné rapidement des calculs qu'elles n'ont su ni exploiter, ni terminer.

Composition de Mathématiques

(Option Sciences naturelles)

Répartition des notes (cotées de 0 à 40). — Le texte proposé a permis de bien classer les candidates. On trouve un lot (trop important) de 19 candidates (notes inférieures ou égales à 6) n'ayant pas préparé leur programme ou incapables de l'assimiler, un lot de 18 vraiment trop médiocres et un lot égal (notes de 15 à 18) de candidates passables, d'où sortiront sans doute, l'an prochain, quelques bons éléments, et enfin une douzaine de candidates honnêtes (notes de 21 à 26), plus solides que brillantes, et une demi-douzaine ayant vraiment appris et compris leur programme.

Observations générales. — Rien dans le texte proposé ne pouvait gêner les candidates, suffisamment entraînées pendant l'année à étudier des variations de fonctions. D'ailleurs, dans le plus grand nombre de copies, toutes les parties du problème ont été abordées, et ce n'est pas l'ignorance des méthodes, mais la maladresse ou faiblesse des calculs, qui empêche les candidates d'aboutir.

Il est navrant de voir le peu d'intelligence et de réflexion apportées dans la recherche et la résolution du problème. Le but de l'étude du programme de Mathématiques pour les candidates de l'option « Sciences naturelles » n'est pas l'acquisition d'un mécanisme de calcul qu'on applique plus ou moins adroitement, mais l'acquisition d'habitudes de travail et d'esprit, le développement de qualités qui sont utiles dans les travaux les plus divers. On pardonne facilement des fautes de calcul ou d'étourderie, mais on ne peut admettre que les candidates ne pensent jamais à se vérifier, à rapprocher les divers résultats obtenus, à voir si ces derniers ne sont pas contradictoires.

Le problème donné proposait aux candidates un très grand nombre de vérifications ou recouplements. En voici quelques exemples :

1) Dans l'étude d'une fonction, le signe de la fonction est souvent connu ou facile à étudier ; il est bon de le noter au début afin d'éviter des fautes stupides.

Il est facile de vérifier une direction asymptotique calculée à partir de $\frac{y}{x}$ en regardant la valeur de y' ; de vérifier une valeur de la dérivée en un point (x_0, y_0) par la limite de $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ quand son calcul est simple (par exemple dans le problème le point sur Oy où le calcul de la tangente est inexact dans presque toutes les copies).

2) Un certain nombre de candidates ont bien établi que y'' restait constamment positif ; elles ne pensent pas à en déduire la croissance de y' qui, dans le cas du problème, variait de -1 à 0 quand x variait de $-\infty$ à $+\infty$. On vérifiait ainsi que y' était toujours négative. Beaucoup de candidates qui s'étaient trompées dans l'étude du signe de y' n'ont pas aperçu l'incompatibilité de leurs résultats faux avec le signe positif constant de y'' .

3) Le § 2 du problème conduisait au résultat suivant obtenu par la grande majorité des candidates : $y + \frac{x}{2}$ est une fonction paire de x . Quelques-unes seulement ont

vu que cela signifiait que Oy était le lieu des milieux des cordes de pente $-\frac{1}{2}$. Ce résultat permettait pourtant un grand nombre de vérifications, à savoir :

α) la tangente à la courbe au point $(0, 1)$ sur Oy a pour pente $-\frac{1}{2}$;

β) les directions asymptotiques se correspondent dans cette propriété diamétrale ; l'une ayant pour coefficient angulaire 0, l'autre devait avoir -1 pour coefficient angulaire ;

γ) le développement limité de $y + \frac{x}{2}$ ne comporte que des puissances paires de x ;

δ) les aires que l'on demande de comparer à la fin du § 4 sont égales.

Faute d'avoir fait ces observations très simples, les candidates se sont perdues dans des calculs longs et inutiles, en particulier pour le développement de y qui n'a été obtenu correct et complet dans aucune copie ; il fallait en effet prévoir l'absence des termes en x^3 et x^5 , ce qui permettait de retrouver une faute de calcul toujours possible. Il fallait surtout partir de $y + \frac{x}{2}$ qui s'écrivait $\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2}$, fonction *paire*

qu'on développait facilement suivant les puissances de $\frac{x}{2}$, avec trois termes seulement à calculer en dehors du terme constant égal à 1. L'idée la plus fâcheuse fut de développer $\frac{1}{e^x - 1}$ par la formule du binôme $(1 + u)^{-1}$ avec $u = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots !!!$

4) Ayant étudié les variations de y , celles de $z = \log y$ étaient connues ; pourtant presque toutes les candidates calculent z' et étudient son signe.

Pour la tangente à l'origine, on peut chercher la limite de $\frac{3}{x} = \frac{\text{Log } y}{x}$, rapport équivalent à $\frac{y - 1}{x}$, lequel a été étudié pour la fonction y .

Signalons, pour terminer, les ignorances, erreurs, maladroites et oublis les plus graves :

1° Remplacement, dans n'importe quelles conditions, d'infiniment petits, par des équivalents ; par exemple dans une somme $(\sin x - x)$ est remplacé par 0 ; $u = e^x(1 - x) - 1$ est considéré comme équivalent à $x - xe^x$, or $e^x - 1$ et xe^x sont deux infiniment petits équivalents et leur différence est d'ordre supérieur.

2° Le signe de y' est celui de la fonction u précitée, qui admet un seul maximum nul pour $x = 0$; donc u est toujours négatif ; pourquoi, dans ces conditions, perdre son temps à chercher son signe pour x tendant vers $\pm \infty$?

Il est très mauvais pour chercher le signe de u de construire deux courbes

$y = e^x$ et $y = \frac{1}{1-x}$; on ne peut rien conclure (deux branches asymptotes à une même droite) et beaucoup de candidates se sont trompées. C'est une méthode qu'il faut éviter le plus possible.

3° On oublie de chercher s'il y a une asymptote quand la direction asymptotique a été obtenue et surtout on oublie de chercher la position de la courbe par rapport à l'asymptote, bonne occasion, pourtant, de *vérifier* les résultats obtenus pour la concavité.

Epreuves orales de Mathématiques

(Option Mathématiques)

Répartition des notes. — Les notes obtenues par les 35 candidates interrogées sont : un 19, deux 17, deux 16, cinq 15, six 14, deux 13, un 12, sept 11, deux 10, trois 9, deux 8, un 7, un 5.

Observations. — L'oral a été beaucoup plus satisfaisant que les deux années précédentes et beaucoup plus en harmonie avec les résultats de l'écrit.

Si l'on peut regretter encore de nombreuses lacunes dans la préparation de certaines candidates (même parmi celles qui ne se présentent pas pour la première fois), beaucoup ont montré une bonne compréhension du cours et ont su faire preuve d'imagination et de bon sens dans les exercices.

Pour les candidates moyennes, on retrouve les défauts signalés dans le rapport sur les épreuves écrites : manque de réflexion au départ, confiance illimitée dans le calcul qui est mené sans adresse, oubli de comparer les résultats, de les vérifier, de les interpréter.

Les candidates ayant des connaissances en géométrie, ou simplement du goût pour la géométrie, deviennent rares. Il y a cependant un programme de géométrie élémentaire, la plupart du temps délaissé faute de temps. Les candidates espèrent sans doute conserver assez de souvenirs de leurs programmes de Première et de Mathématiques Élémentaires ; malheureusement il n'en reste rien en général. Ceci ne facilite pas la recherche des solutions analytiques des problèmes ; les candidates, esclaves du calcul, se contentent de traduire leur énoncé en suivant le texte pas à pas, sans se demander si quelques observations géométriques au début, ne pourraient pas permettre de transformer avantageusement le problème et d'obtenir des calculs plus courts.

A. FERRICHET.