

REMARQUES SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS, SUR L'INTRODUCTION DES CONIQUES ET SUR LES ÉQUIVALENCES CLASSIQUES

Partir d'une définition ou d'une autre des coniques n'aurait aucune importance si nos élèves étaient des êtres dominés par la logique. En fait, beaucoup d'entre eux accordent un rôle prépondérant à la première définition qu'ils voient mettre en œuvre, d'où l'existence de deux « écoles » parmi eux. En ce sens, les suggestions de la Commission des programmes marqueront un progrès sur les programmes actuels qui obligent les professeurs à prendre en quelque sorte parti entre des définitions planes qui se valent et ont toutes deux des exceptions gênantes.

En attendant que ces programmes voient le jour, on peut trouver intérêt à introduire deux définitions planes simultanément (cela a dû être proposé déjà), en commençant par établir une équivalence. Mais des spéculations sur des propriétés de tous les points du plan ne semblent-elles pas alors un peu gratuites aux élèves ?

Il m'a semblé que l'étude de diverses transformations fournissait un centre d'intérêt et une raison aux considérations qu'impose ce genre d'exposés (recherche de diverses constructions de points homologues, d'invariants...). Un avantage d'une telle entrée en matière est aussi de fournir — comme le voulait H. LEBESGUE — un fil directeur pour l'étude ultérieure des coniques (résolution de certains problèmes en transformant la conique en cercle et extensions de propriétés du cercle aux coniques).

J'ai pris deux transformations en exemple (transformations qui n'ont pu manquer d'être rencontrées par des collègues, peut-être nombreux). Je me serais limité à une seule, si elle n'avait le tort de ne pas servir pour la parabole. Par contre, elle frappe les élèves lorsqu'on obtient la construction des points d'intersection d'une conique à centre et d'une droite en ne traçant que trois droites.

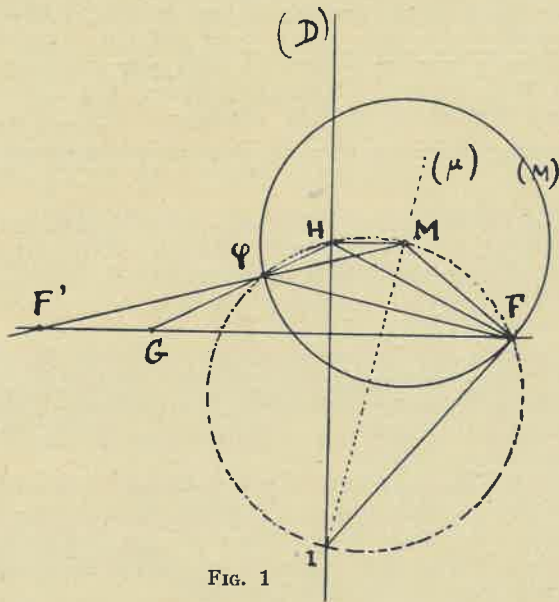


FIG. 1

Soient, dans un plan, une droite (D) et deux points F et G , symétriques par rapport à cette droite et distincts.

A tout point M du plan, se projetant en H sur la droite (D) , on fait corres-

pondre le point φ tel que les triangles FHM et FG φ soient directement semblables (triangles éventuellement aplatis). φ est sur la droite GH puisque, (mod. π) :

$$(GF, GH) = (FH, FG) = (HF, HM).$$

La similitude directe de centre F transformant G en φ , transforme le triangle isocèle FGH et son axe de symétrie (D) en le triangle F φ M et la médiatrice (μ) de F φ . φ est sur le cercle (M) de centre M passant par F. Si M n'est pas sur la droite FG, l'égalité des angles en M et H des triangles isocèles mentionnés entraîne que FMH φ sont sur un cercle et les bissectrices (D) et (μ) de ces angles (d'axes) passent par le point I, diamétralement opposé à M sur ce cercle et les droites IF et I φ sont tangentes à (M).

Notons maintenant que φ est sur le lieu (F') des points dont les distances à F et G sont dans le rapport $\frac{MF}{MH}$. Si $\frac{MF}{MH} = 1$, ce lieu (F'), se confond avec (D) et le

cercle (M) lui est tangent. Si $\frac{MF}{MH} \neq 1$ (F') est un cercle du faisceau $\mathcal{G}$ de cercles-points F et G. Montrons que (F') est encore tangent à (M). La question ne se pose que si M n'est pas sur la droite FG et nous pouvons parler du cercle passant par FMH φ I. I a même puissance par rapport au cercle (M), au cercle-point F et au cercle (F') du faisceau $\mathcal{G}$ d'axe radical (D). L'axe radical des cercles (F') et (M) est donc φ I, comme il est tangent à l'un des cercles, les deux cercles sont tangents en φ . Ainsi, sans aucune exception, le cercle de centre M passant par F est tangent en φ à (F'), lieu des points dont les distances à F et G sont dans le rapport $\frac{MF}{MH}$.

On déduirait de la situation de ces divers éléments des constructions diverses liées à la correspondance ($M \rightarrow \varphi$). Mais, à ce stade, se pose assez naturellement la question de la correspondance de certaines propriétés du cercle (M) et du rapport $\frac{MF}{MH}$.

Soit un nombre positif e :

1° Si $\frac{MF}{MH} = e$, le cercle (M) est tangent au lieu (F') des points dont les distances à F et G sont dans le rapport e .

2° Si $\frac{MF}{MH} > e$, le cercle (M) passe par le point φ tel que FG φ soit directement semblable à FHM, donc point tel que $\frac{\varphi F}{\varphi G} > e$. Si l'on considère les deux régions séparées dans le plan par le lieu (F') déterminé au 1°, φ et G sont dans une région et le point F dans l'autre. Le cercle (M) passant par F et φ coupe donc nécessairement (F').

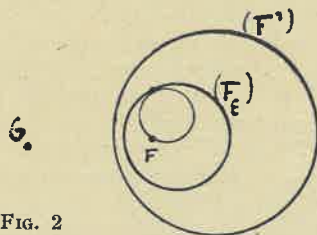


FIG. 2

3° Si $\frac{MF}{MH} < e$, désignons par ϵ ce rapport $\frac{MF}{MH}$. Le cercle (M) est tangent au

lieu (F_ϵ) des points dont les distances à F et G sont dans le rapport ϵ . Considérons les deux régions séparées dans le plan par ce lieu. Puisque $e > \epsilon$, le lieu (F') et le point G sont dans l'une de ces régions et F dans l'autre. Le cercle (M), passant par F et tangent à (F_ϵ), n'a donc aucun point commun avec (F').

En résumé, les hypothèses $\frac{MF}{MH} = e$, $\frac{MF}{MH} > e$, $\frac{MF}{MH} < e$ impliquent respectivement (M) tangent à (F'), (M) sécant à (F'), (M) sans point commun avec (F'). Ces hypothèses épuisant toutes les possibilités, les réciproques sont vraies.

En particulier, il y a coïncidence du lieu des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ et du lieu des centres de cercles passant par F tangents à (F').

(F') est déduit du système de données [F, (D), e] (assujetties aux restrictions : F non situé sur (D), $e > 0$) par la condition : (F') est lieu des points dont les distances à F et G sont dans le rapport e . Obtient-on ainsi tous les systèmes [F, (F')] formés par un point F donné et un cercle (F') donné ?

Soit un tel système [F, (F')]. (D), s'il existe, est nécessairement axe radical de (F') et du cercle-point F. (D) n'existe donc pas si F est centre de (F') et (D) ne convient pas si F est sur (F'). Ces cas écartés, G est nécessairement le symétrique de F par rapport à (D) et e est le rapport des distances d'un point quelconque de (F') à F et à G (on en tire aisément $e = \frac{c}{a}$, avec les notations usuelles). Il est alors clair que [F, (F')] se déduit du système [F, (D), e] qu'on vient de déterminer par les règles énoncées plus haut.

Avec les restrictions faites sur les systèmes [F, (D), e] et [F, (F')] on a établi l'équivalence des propriétés mises en correspondance plus haut, relatives au cercle (M) et au rapport $\frac{MF}{MH}$ et, en particulier, une double définition d'une famille de courbes Γ (e variant seul) qui peut être transformée en un faisceau de cercles.

Après avoir étudié les courbes Γ suivant les méthodes usuelles, on pourra revenir utilement sur la correspondance [$M \rightarrow \varphi$], à titre d'exercice.

Lorsque $\frac{MF}{MH} = c \neq 1$ et que φ décrit un cercle (F'), la correspondance [$M \rightarrow \varphi$] peut être définie autrement. L'homothétie de centre M, qui transforme φ en F' , transforme (D) en une droite fixe (D') (car H est transformé en H' et $\overline{MH} = \overline{GF'}$). Cette nouvelle loi, déterminée à partir des données F, (D), (D'), peut être appliquée à tous les points du plan. Elle donne une nouvelle correspondance ($\mathcal{H}$) telle que, lorsque M décrit une droite, φ décrit une droite et réciproquement (inutile de parler d'homologie, des considérations simples basées sur l'homothétie suffisent). On arrive aisément à constater qu'on peut définir cette correspondance ($\mathcal{H}$) par les conditions :

- une droite correspond à une droite et réciproquement ;
- le point F' et les points de (D) sont points doubles ;
- quand φ est en F, M est en O milieu de FF' .

De sorte que ($\mathcal{H}$) donne lieu à des constructions par la règle analogues à celles que les élèves rencontrent dans la correspondance rabattement-projection orthogonale. Une conique Γ est transformée en son cercle directeur et, en particulier, le problème de l'intersection d'une conique avec une droite Δ se réduit au tracé de trois droites :

Si Δ coupe (D) en P et (D') en P' , si la parallèle à $F'P'$ menée par P coupe le cercle directeur (F') en φ' et φ'' , les points d'intersection de Γ avec Δ sont les points où Δ est coupée par les droites $F\varphi'$ et $F\varphi''$.

Enfin, grâce à ($\mathcal{H}$) la théorie des polaires et pôles s'étend immédiatement aux coniques à centre en partant d'une des définitions des points conjugués par rapport à un cercle : sommets opposés d'un quadrilatère complet qui a ses quatre autres sommets sur le cercle.

F. VIVIEN (Nice).