

SUR LA PÉDAGOGIE DE L'INITIATION A LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU 1^{er} ORDRE

par V. KOURGANOFF

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille

1^o INTRODUCTION.

On commence à comprendre un peu partout qu'en France on abuse de l'enseignement abstrait et déductif des Mathématiques. Après avoir été dédaignées comme « impures », les Mathématiques appliquées commencent à reprendre la haute estime où les tenaient des mathématiciens aussi distingués que CAUCHY ou EULER. L'usage des machines électroniques conduit continuellement au remplacement des méthodes analytiques par des méthodes faisant intervenir des « ordonnées discrètes » et des « différences finies ».

Il nous a donc semblé opportun d'attirer l'attention des professeurs de Mathématiques Spéciales, de M.P.C., de Mathématiques générales et peut-être même de Calcul différentiel, sur les multiples avantages que présenterait, du point de vue pédagogique, le remplacement de la méthode « traditionnelle » de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre, par une méthode qui, tout en se rapprochant de celles, très anciennes, employées par les créateurs du calcul différentiel, placerait d'emblée les étudiants dans le climat des Mathématiques appliquées modernes.

La résolution des équations linéaires du premier ordre représente généralement le premier contact des étudiants avec les équations différentielles, on comprend donc combien il est regrettable que ce premier contact se fasse sous le signe de l'*artifice* le plus arbitraire. Car, quand on fait le grand effort nécessaire pour s'affranchir de la fausse évidence qu'engendrent l'habitude et la tradition, ou quand on consulte les jeunes sur leur réaction devant l'enseignement traditionnel, on est frappé du caractère artificiel de la méthode qui consiste à chercher d'abord la solution de l'équation « privée de son second membre », puis une solution *particulière* de l'équation « complète », et cela en faisant « varier la constante » de la solution générale de l'équation homogène.

Voici les critiques que l'on peut formuler au sujet de cette méthode. Elle viole d'abord l'essence de l'esprit de la recherche mathématique, tel que l'ont défini H. POINCARÉ et J. HADAMARD [1], [2], en réduisant l'étudiant au rôle passif de celui qui constate que toutes les transformations représentent une suite de syllogismes corrects, au lieu de lui révéler le « pourquoi » de ces transformations. Elle confirme l'étudiant dans l'idée fausse qu'une intégrale est avant tout une primitive (1), et ne peut être « devinée » que lorsqu'on connaît la « formule » correspondante ; idée qui se prolonge par la conception, non moins pernicieuse suivant laquelle on ne sait résoudre que celles des équations différentielles pour lesquelles l'artifice « résolvant » a déjà été trouvé. Enfin, sur un plan plus élevé, elle ne met pas suffisamment en évidence le fait, essentiel pour les applications concrètes, que la solution d'une équation

(1) Il est intéressant de remarquer, du point de vue historique, qu'à l'origine, le Calcul intégral était conçu essentiellement comme une évaluation des aires. Pendant longtemps, le lien entre ce problème et celui des dérivées, avait entièrement échappé aux inventeurs du calcul différentiel [3]. La réduction des intégrales aux primitives, œuvre de Newton et de Leibnitz, a évidemment constitué un énorme progrès. Mais cette grande idée a subi, comme c'est le sort de toutes les grandes idées, une sorte de *dégradation* progressive, dont la principale est celle que nous venons de signaler.

tion différentielle du premier ordre est une *fonctionnelle* de son « second membre ».

La méthode que nous proposons nous a été suggérée par la théorie physique du transfert du rayonnement (équivalente à la théorie de la diffusion des neutrons), mais il est évident qu'elle garde toutes ses vertus pédagogiques indépendamment de ce contexte physique particulier [4].

2° EXPOSÉ DE LA MÉTHODE.

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + f_1(x)y = f_2(x),$$

où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux fonctions données (dont on précisera plus ou moins les propriétés suivant le niveau de l'enseignement) et $y(x)$ la fonction inconnue.

L'interprétation physique générale la plus simple d'une fonction $y(x)$, qui satisfait à l'équation (1) est celle de l'intensité d'une grandeur qui *se propage* dans un milieu matériel stratifié en couches planes parallèles perpendiculaires à la direction Ox de propagation (fig. 1).

En effet, en considérant l'équation comme la limite de :

$$\Delta y = -f_1(x)y \Delta x + f_2(x) \Delta x,$$

ou encore

$$(2) \quad y(x + \Delta x) = y(x) [1 - f_1(x) \Delta x] + f_2(x) \Delta x,$$

on montre aux étudiants que l'équation (1) définit essentiellement l'intensité de la grandeur y au point $(x + \Delta x)$ à partir de son intensité au point x .

La forme (2) met en évidence une première propriété « physique » importante de l'équation (1), à savoir, le rôle important joué par la combinaison $f_1(x) \Delta x$, qui permet de définir « l'épaisseur efficace » ΔX des couches par la relation simple

$$(3) \quad \Delta X = f_1(x) \Delta x \quad (\text{ou } \frac{dX}{dx} = f_1(x)),$$

d'où la fonction $X(x)$ se déduit au moyen d'une quadrature.

Si l'on adopte X comme nouvelle variable, les propriétés du « milieu transmetteur » se simplifient et, en posant

$$(4) \quad y(x) = Y(X) \quad \text{et} \quad \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = B(X),$$

l'équation (2) prend la forme :

$$(5) \quad Y(X + \Delta X) = Y(X) [1 - \Delta X] + B(X) \Delta X,$$

ou encore, en introduisant le « facteur de réduction » r , au cours de la traversée de la couche ΔX :

$$(6) \quad r = 1 - \Delta X,$$

et, la fonction de « restitution » de la couche ΔX

$$(7) \quad R(X) = B(X) \Delta X ;$$

la relation

$$(8) \quad Y(X + \Delta X) = r \cdot Y(X) + R(X)$$

La signification physique générale de (8) est parfaitement claire : l'intensité de la grandeur étudiée, qui était $Y(X)$ à l'entrée de la couche $(X, X + \Delta X)$, a été « atténuée » dans le rapport r au cours de la traversée de (ΔX) (effets d'absorption, de freinage, d'amortissement, de dissipation, etc. .), tout en recevant une *contribution* (infinitement petite de l'ordre de ΔX) de la part du milieu, qui « restitue » une *partie* (fonction de X) de l'intensité prélevée.

Les phénomènes physiques deviennent encore plus clairs si nous revenons aux « différences finies » en numérotant .. $n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ les « couches » successives (fig. 1),

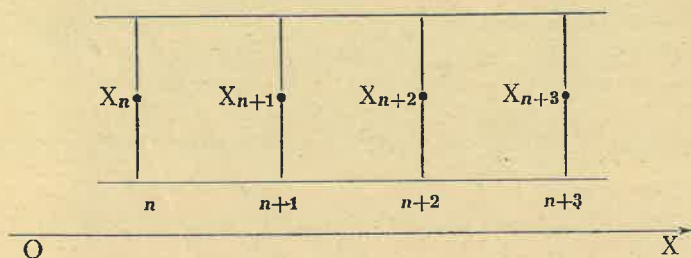


FIG. 1

La relation (8) prend alors la forme d'une *loi de récurrence* :

$$(9) \quad Y_{n+1} = r Y_n + R_{n+1}.$$

Ici on remarquera qu'on a posé R_{n+1} , au lieu de $R_{n+\frac{1}{2}}$, ce qui serait plus naturel, puisqu'il s'agit de la contribution de la couche *comprise* entre X_n et X_{n+1} . Mais en écrivant R_{n+1} on simplifie l'écriture, et il est encore légitime de considérer que la contribution de X ne se manifeste qu'à la *sortie*, c'est-à-dire sur la face X_{n+1} .

On remarquera également que l'intervention de la loi de récurrence (9) donne une des rares occasions (la seule peut-être) d'illustrer dans un contexte élémentaire, la profonde remarque de H. POINCARÉ, sur l'importance du raisonnement par récurrence en Mathématiques.

La relation (9) montre comment la grandeur se propage à travers une couche $\{X_n, X_{n+1}\}$, et il est évident désormais que la *solution du problème sera trouvée quand on aura trouvé l'effet de k couches successives*, où k est un entier quelconque.

Il suffit d'aller jusqu'à $k = 3$ (ici on notera le caractère *inductif* de la méthode, caractère particulièrement proche de l'esprit de recherche).

En remplaçant successivement n par $n + 1$ et $n + 2$, il vient d'abord :

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} r + R_{n+2},$$

$$Y_{n+3} = Y_{n+2} r + R_{n+3}.$$

En éliminant Y_{n+2} entre ces deux relations on a la « loi de propagation » pour $k = 2$:

$$(10) \quad Y_{n+3} = Y_{n+1} r^2 + (R_{n+2} r + R_{n+3}).$$

Et en éliminant Y_{n+1} entre (9) et (10) on a la « loi de propagation » pour $n = 3$, sous la forme :

$$(11) \quad Y_{n+3} = Y_n r^3 + (R_{n+1} r^2 + R_{n+2} r + R_{n+3}).$$

La loi « générale », pour k quelconque, s'induit immédiatement et s'écrit :

$$(12) \quad Y_{n+k} = Y_n r^k + \sum_{m=1}^k R_{n+m} r^{k-m}$$

Le problème est donc entièrement résolu en termes des « différences finies » — et la solution (12) est évidemment tout à fait classique pour les spécialistes de « l'alimentation » des machines électroniques modernes.

Mais ici nous pouvons faire un pas de plus (qui n'intéresse pas en général ceux qui opèrent sur les différences finies en vue du calcul purement numérique) et revenir à la forme analytique de la solution.

En effet, on a évidemment :

$$(13) \quad r^k = (1 - \Delta X)^k \approx 1 - k\Delta X \approx e^{k\Delta X} = e^{-(X-X_0)}$$

en se bornant aux termes du premier ordre, et en remarquant que

$$(14) \quad X_{n+k} - X_n = k \cdot \Delta X = X - X_0.$$

Par conséquent, la solution (12) devient, par un passage à la limite, physiquement évident :

$$(15) \quad Y(X) - Y(X_0) = Y(X_0)e^{-(X-X_0)} + \int_{X_0}^X B(t)e^{-(X-t)} dt$$

ou t désigne une valeur « courante » de X .

3° APPLICATIONS.

La forme (15) de la solution obtenue sans aucun artifice, permet de constater que la solution de l'équation différentielle proposée :

1) dépend de la valeur « initiale » (ou plus physiquement de la valeur « à la frontière ») $Y(X_0)$;

2) comprend le terme $Y(X_0) \cdot e^{-(X-X_0)}$ qu'on peut interpréter, *mathématiquement* comme la solution générale de l'équation

$$(16) \quad \frac{dY}{dX} - Y(X) = B(X),$$

privée de son second membre, qui pour $X = X_0$, se réduit à $Y(X_0)$; mais qui possède un sens physique beaucoup plus clair comme l'effet cumulé de toutes les « transmissions » partielles *lorsqu'on néglige les restitutions* $B(X)$;

3) comprend le terme $\int_{X_0}^X B(t)e^{-(X-t)} dt$ que l'on peut interpréter mathématiquement comme une solution *particulière* de l'équation complète de la forme

$$e^{-X} \varphi(X) \quad \text{où} \quad \varphi(X) = \int_{X_0}^X B(t)e^t dt,$$

c'est-à-dire, d'une forme obtenue en « faisant varier la constante » dans la solution générale Ce^{-X} de l'équation homogène.

On comprend maintenant pourquoi $e^{-X}\varphi(X)$ est une solution particulière : c'est celle qu'on obtient pour $Y(X_0) = 0$.

Mais on voit surtout :

a) Que le sens profond de

$$\int_{X_0}^X B(t)e^{-(X-t)} dt$$

est celui de l'effet cumulé de toutes les « restitutions » *atténuées* plus ou moins selon qu'elles ont leur siège à une distance $(X - t)$ plus ou moins grande du point X envisagé.

b) Que la solution (15) met en évidence le fait que $Y(X)$ est une *fonctionnelle* linéaire de $B(X)$, c'est-à-dire dépend linéairement de l'ensemble des valeurs que prend $B(X)$ dans le domaine d'intégration.

4° UNE VARIANTE DE LA MÉTHODE.

Une fois mis en évidence le caractère de *fonctionnelle* de $B(X)$ de la solution cherchée, il peut être instructif de retrouver la solution en utilisant uniquement comme point de départ ce caractère physiquement intuitif, si l'on songe que la solution doit être un agrégat linéaire de « restitutions » affectées de *poids* qui pourraient

dépendre de la profondeur ($X - t$) à laquelle s'opère la restitution. La solution comprendra de plus, évidemment, la partie relative à l'équation homogène ($B = 0$).

On posera alors :

$$(17) \quad Y(X) = Y_0 e^{-X} + \int_0^X B(t) \varphi(X - t) dt.$$

Ici, nous avons pris X_0 comme origine ($X_0 = 0$) pour simplifier l'écriture. Le problème est ici de trouver la fonction « poids » $\varphi(Z)$.

En utilisant la relation élémentaire de dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre dont elle dépend, et qui s'écrit ici :

$$(18) \quad \frac{d}{dX} \left[\int_0^X f(X, t) dt \right] = f(X, X) + \int_0^T \left(\frac{df}{dX} \right) dt,$$

on trouve immédiatement, en imposant à $\varphi(X - t)$ la condition $\varphi(0) = 1$ (physiquement évidente) que $\frac{d\varphi}{dZ} = -\varphi(Z)$ avec $Z = X - t$. D'où $\varphi(Z) = e^{-Z}$.

5° REMARQUE I.

Dans la théorie du transfert du rayonnement, il est d'usage courant [5], d'interpréter l'équation (15), obtenue par les méthodes traditionnelles, comme entièrement *intuitive*. Cette manière de voir nous paraît aussi artificielle, du point de vue physique, que la méthode traditionnelle l'est du point de vue mathématique. On voit difficilement, en effet, un étudiant, même très intelligent, écrivant d'emblée la solution (15) à partir de l'équation (16). Notre exposé fournit donc une *explication* utile aux vues « pseudo-intuitives » des spécialistes de la théorie du transfert.

6° REMARQUE II.

Nous n'ignorons pas que le caractère artificiel de la méthode traditionnelle est atténué quand on prend la précaution classique d'établir d'abord d'une manière générale que la connaissance d'une intégrale particulière permet de ramener certaines équations différentielles à une forme plus simple. Pourtant, même dans ce cas, le débutant reste dérouté par la dissymétrie du rôle que l'on fait jouer à la partie de la solution supposée connue (intégrale *particulière*) et celle qui reste à trouver (intégrale *générale* de l'équation homogène).

De plus, même quand on attire l'attention des débutants sur la généralité de la méthode qui consiste à utiliser des changements de fonction inconnue, il leur reste l'impression que la *forme* du changement de fonction doit être *devinée*.

Avant de terminer, nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à MM. J. KAMPE DE FERIET et M. DECUYPER, qui ont bien voulu relire notre manuscrit et nous faire plusieurs suggestions intéressantes.

V. K.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. POINCARÉ : *La Valeur de la Science*, Ed. Flammarion, p. 27.
- [2] J. HADAMARD : *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover Publ., Ed., 1954, p. 104.
- [3] J. HADAMARD : *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover Publ., Ed. 1954, p. 144.
- [4] V. KOURGANOFF : *Basic Methods in Transfer Problems*, Oxford Univ. Press, 1952.
- [5] A. UNFOLD : *Physik der Sternatmosphären*, 2^e Edit. (Springer, Berlin, 1955), p. 110.