

NOTIONS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE, PROCÉDÉS DE CONSTRUCTIONS D'ESPACES TOPOLOGIQUES *

par Ch. PISOT

Professeur à la Sorbonne

Pour étudier la notion de limite et de continuité, on est conduit à définir ce que l'on entend par élément voisin d'un autre. Jusqu'ici, nous avons vu que l'existence d'une distance $d(x, x')$ permet de donner une telle définition. On dira que x_n tend vers x si la suite des nombres $d(x_n, x)$ est une suite tendant vers 0. Cette notion utilise par conséquent la notion de limite dans l'ensemble des nombres réels. Un certain nombre de propriétés sont cependant indépendantes des nombres réels ; d'autre part, certaines notions de limite, même très simples, ne peuvent pas se définir par une distance. Cela impose par conséquent une définition plus générale du « voisinage » d'un élément.

Considérons, par exemple, la notion ordinaire de convergence d'une fonction $u(x)$ définie dans l'intervalle $[a, b]$. On dira que u tend vers 0 si, pour tout x de $[a, b]$, le nombre $u(x)$ tend vers 0. Si l'on ne fait aucune restriction sur l'ensemble des fonctions $u(x)$, on exprime ainsi une infinité non dénombrable de conditions indépendantes sur la fonction u ; il est facile de montrer qu'il est impossible de trouver une distance dans l'ensemble des fonctions u qui permette de définir les fonctions u tendant vers 0.

Quand nous avons défini la continuité d'une fonction $f(x)$ en x_0 , nous avons vu que l'on pouvait la définir de la manière suivante : L'image réciproque de l'intervalle $]f(x_0) - \eta, f(x_0) + \eta[$ contient un intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Nous appelons alors « voisinage » de x_0 tout ensemble contenant un ouvert qui contient x_0 . Ainsi, $f(x)$ est continu en x_0 , si l'image réciproque d'un voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0 .

Les ensembles ouverts constituent ainsi l'élément important dans cette définition des voisinages. Dans le cas d'un espace métrique E , on peut définir un ensemble ouvert O de la manière suivante : O est ouvert, si, pour tout élément x_0 de O , il existe un nombre $\rho > 0$ tel que tous les x vérifiant $d(x, x_0) < \rho$ appartiennent à O . En vertu de l'inégalité triangulaire, tout ensemble $d(x, x_0) < \rho$ est alors un ouvert. Ces ouverts vérifient les trois propriétés suivantes, qui ne font pas intervenir la distance :

O_1 : Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est un ouvert.

O_2 : Toute intersection FINIE d'ouverts est un ouvert.

O_3 : E et $\emptyset$ sont des ouverts.

O_3 est évident pour E , pour $\emptyset$ c'est une définition. Pour O_2 , on peut remarquer que le mot *fini* est essentiel, car, si on prend les ouverts

* Conférence prononcée le 14 février 1957 à l'Institut Henri-Poincaré, cinquième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

$d(x, x_0) < \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \rightarrow 0$, s'ils ont en commun $x_1 \neq x_0$, on aurait $d(x_1, x_0) < \varepsilon_n$, donc $d(x_1, x_0) = 0$ et $x_1 = x_0$. O_1 est à peu près évident.

Dans un ensemble E quelconque, nous dirons que nous avons défini une topologie, que nous avons fait de E un ensemble topologique, si on a défini un ensemble de parties de E vérifiant O_1, O_2, O_3 ; ces parties s'appellent alors les « ouverts » de E .

Exemple : Considérons la famille formée de E et de $\emptyset$ seuls. Ils vérifient O_1, O_2 et O_3 . La topologie associée est dite topologie grossière.

Autre exemple : Soit E un ensemble totalement ordonné. On appellera « intervalle ouvert » tout ensemble d'éléments x tels que $x < a$, ou $a < x < b$, ou $x > b$. Un ouvert sera alors une réunion finie ou infinie d'intervalles ouverts.

Considérons, par exemple, une fonction monotone $f(x)$. On sait que, pour tout x , il existe la limite à droite $f(x+0)$ et la limite à gauche $f(x-0)$. Cela conduit à considérer un ensemble E déduit de $\mathbb{R}$ en remplaçant chaque nombre réel x par deux quantités notées $x+0$ et $x-0$. Cet ensemble est totalement ordonné par la convention suivante : $x+0 < x'-0$ si $x < x'$ dans $\mathbb{R}$ et $x-0 < x+0$. On pourra donc définir des ouverts dans E , donc une topologie.

A partir de la notion d'ouvert, on définira celle de voisinage. On appellera voisinage d'un élément x (ou plus généralement d'un sous-ensemble A de E) tout ensemble contenant un ouvert qui contient x (ou A).

Cette définition montre qu'un ouvert est voisinage de chacun de ses points. La réciproque est vraie également : tout ensemble A tel que A soit voisinage de chacun de ses points est un ouvert. En effet, si x est un point de A , il existe un ouvert O_x contenant x et contenu dans A ; A est manifestement la réunion de tous les O_x , donc A est ouvert.

Il en résulte que les ouverts d'un espace E sont connus, si on connaît les voisinages de chaque point. Autrement dit, deux topologies sur un même ensemble, qui admettent les mêmes voisinages, sont identiques.

Les voisinages jouissent des propriétés suivantes qui pourraient d'ailleurs servir de départ pour définir une topologie :

V_1 : Tout voisinage de x contient x .

V_2 : Tout ensemble contenant un voisinage de x est un voisinage de x .

V_3 : L'intersection d'un nombre fini de voisinages de x est un voisinage de x .

V_4 : Si V est un voisinage de x , il existe un voisinage W de x , tel que W soit contenu dans V , et que V est voisinage de chaque point de W .

La propriété V_4 exprime le fait que tout point assez voisin d'un point assez voisin de x est lui-même voisin de x . Il se substitue à l'inégalité triangulaire dans les espaces métriques. Pour démontrer V_4 , il suffit de prendre pour W un ouvert contenu dans V et contenant x .

Je signale, sans m'y étendre, qu'en introduisant les ensembles complémentaires relativement à E des ouverts de E , on a une famille

d'ensembles appelés « fermés » qui permettent aussi de définir la topologie de E .

CONTINUITÉ, LIMITES. — Nous dirons que l'application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est *continue* en u_0 de E , si, pour tout voisinage W de $f(u_0)$ dans F , il existe un voisinage V de u_0 dans E tel que $f(V)$ soit contenu dans W ; ou encore, l'image réciproque $f^{-1}(W)$ de tout voisinage W de $f(u_0)$ dans F est un voisinage de u_0 dans E . On dira que l'application f est *continue sur* E , si elle est continue pour tout élément u de E . Pour cela, il faut et il suffit que l'image réciproque $f^{-1}(O_F)$ de tout ouvert O_F de F soit un ouvert O_E de E . En effet, O_F est voisinage de chacun de ses points, donc, si f est continu sur E , $f^{-1}(O_F)$ est voisinage de chacun de ses points dans E , donc c'est un ouvert de E . Réciproquement, pour tout u de E et tout voisinage W de $f(u)$, il existe un ouvert O_F contenant $f(u)$ et contenu dans W . Si $f^{-1}(O_F) = O_E$ pour tout O_F , alors u est contenu dans O_E , donc $f^{-1}(W)$ contient O_E , $f^{-1}(W)$ est donc un voisinage de u et f est continu.

On dira qu'une suite u_n tend vers u , si, pour tout voisinage V de u , il existe un entier $N = N(V)$ tel que $n \geq N$ entraîne que u_n appartienne à V . Malheureusement, une suite peut avoir plusieurs limites, par exemple en topologie grossière, tout u est limite de toute suite u_n . On est ainsi conduit à distinguer les espaces topologiques suivants :

Espace séparé : E est dit séparé, si ses voisinages vérifient la propriété suivante :

S : Deux points distincts de E possèdent deux voisinages disjoints.

Exemple : E totalement ordonné. Soient $x < x'$ deux éléments distincts et soient a et b tels que $a < x < x' < b$.

1° Il existe c tel que $x < c < x'$, alors $]a, c[$ et $]c, b[$ sont deux ouverts disjoints.

2° Il n'existe pas de c tel que $x < c < x'$, alors $]a, x'[$ et $]x, b[$ sont disjoints, car, s'il y avait un élément y commun, on aurait $y < x'$ et $y > x$, donc $x < y < x'$.

SOUS-ESPACE TOPOLOGIQUE. — Soit E un espace topologique et A un sous-ensemble de E . Les traces sur A des ouverts de E vérifient O_1, O_2, O_3 , donc on a ainsi une topologie sur A ; elle rend continue l'application qui à tout u de A fait correspondre u dans E .

Exemples : Topologie dans un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, ou encore sur la circonférence $x^2 + y^2 = 1$, sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

En sens inverse, une famille d'ouverts de A n'est pas nécessairement une famille d'ouverts dans E ; il faut et il suffit pour cela que A soit ouvert de E . En effet, A est un ouvert de A , donc doit être ouvert dans E . Réciproquement, si A est ouvert, la trace sur A de tout ouvert de E est ouvert dans E , car c'est un voisinage de chacun de ses points.

PRODUIT DE DEUX ESPACES TOPOLOGIQUES. — Soient F et G deux

espaces topologiques, $u \in F$, $v \in G$, alors l'espace $F \times G$ est l'ensemble des couples (u, v) . Si les applications f qui à (u, v) de $F \times G$ font correspondre u de F et $g(u, v) = v$ sont continues, alors si O_F est un ouvert de F , $f^{-1}(O_F)$ qui est égal au produit $O_F \times G$ doit être ouvert dans $F \times G$, de même $F \times O_G$. Il doit encore en être ainsi des intersections finies et des réunions. Si on appelle alors ensemble élémentaire un produit $O_F \times O_G$, on voit que les ouverts doivent être des réunions d'ensembles élémentaires. Une telle réunion vérifie bien O_1, O_2 et O_3 . En effet, O_1 et O_3 sont évidents ; pour O_2 , si $A = \bigcup O_F$, $B = \bigcup O_G$, on a $A \cup B = \bigcup (O_F \cap O_G)$, en vertu de la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$. L'espace $F \times G$ est alors appelé produit topologique de F et G . De proche en proche, on peut définir un produit de plusieurs espaces topologiques. Ce produit est associatif.

Continuité : Soit φ une application d'un espace topologique E dans un produit topologique $F \times G$. Soit $f = \text{proj}_F \varphi$ et $g = \text{proj}_G \varphi$; f applique E dans F et g dans G . Si φ est continu, f et g le sont. Réciproquement, si f et g sont continus, $f^{-1}(O_F)$ est un ouvert de E et $\varphi^{-1}(O_F \times O_G) = f^{-1}(O_F) \cap g^{-1}(O_G)$ est ouvert ; il en est ainsi de toute réunion, donc de tout ouvert de $F \times G$, donc φ est continu.

On voit de même que la condition nécessaire et suffisante pour que $w_n = (u_n, v_n)$ de $F \times G$ tende vers $w = (u, v)$ de $F \times G$, c'est que $u_n \rightarrow u$ dans F et $v_n \rightarrow v$ dans G .

Exemple : Pour R^2 , ouverts réunion des « pavés » $x \in]a, a'[, y \in]b, b'[,$

Si F et G sont séparés, $F \times G$ l'est aussi, car, si u et u' sont distincts dans F , $v \neq u' \in G$, il existe $O_F \ni u$, $O'_F \ni u'$ avec $O_F \cap O'_F = \emptyset$, de même $O_G \ni v$, $O'_G \ni v'$ avec $O_G \cap O'_G = \emptyset$. Alors $(O_F \times O_G) \cap (O'_F \times O'_G) = \emptyset$ et $(O_F \times O_G)$ est un voisinage de (u, v) disjoint de $(O'_F \times O'_G)$, voisinage de (u', v') .

Réciproquement, supposons $F \times G$ séparé ; soit alors $(u, v) \neq (u', v')$, avec $u \neq u'$; soient O un ouvert contenant (u, v) et O' un ouvert contenant (u', v') , tels que $O \cap O' = \emptyset$; soit $O_F = \text{proj}_F O$, $O'_F = \text{proj}_F O'$, alors $O_F \cap O'_F = \emptyset$, donc F est séparé. On voit qu'il en est de même de G .

Espace de la convergence simple : Soit E l'espace des fonctions $u(x)$ avec $x \in [a, b]$. Nous appellerons ensemble élémentaire :

$$\omega = \omega(u_0, x_1, \dots, x_n, \epsilon)$$

un ensemble de $u \in E$ tel que $|u(x_i) - u_0(x_i)| < \epsilon$ pour $i = 1, \dots, n$. Nous appellerons « ouvert » une réunion finie ou infinie d'ensembles élémentaires. Les propriétés O_1, O_2, O_3 sont alors vérifiées. La topologie obtenue est celle de la convergence simple.

La topologie est séparée. En effet, si $u_1 \neq u_2$, il existe au moins un x_0 tel que $|u_1(x_0) - u_2(x_0)| = 3\delta > 0$, alors $\omega[u_1, x_0, \delta]$ et $\omega[u_2, x_0, \delta]$ sont deux ouverts disjoints, car $\omega[u_1, x_0, \delta]$ est l'ensemble des u tels que $|u(x_0) - u_1(x_0)| < \delta$.