

BULLETIN de l'**ASSOCIATION** des **PROFESSEURS** de **MATHÉMATIQUES** de l'**Enseignement Public**

SOMMAIRE

I. ETUDES.

G. CHOQUET : Notions liées à la structure d'un espace métrique	325
Ch. PISOT : Notions de topologie générale, procédés de constructions d'espaces topologiques	335
Espaces compacts et localement compacts	339

II. ESSAIS.

L. SCHWARTZ : Tendances des mathématiques modernes ..	345
V. KOURGANOFF : Sur la pédagogie de l'initiation à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre	349

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.

M. COURTIN : Intérêt culturel de l'histoire de la technique dans l'enseignement des adolescents	355
F. VIVIEN : Remarques sur certaines transformations, sur l'introduction des coniques et sur les équivalences classiques	358
M. DIONOT et A. MARCHAND : Travaux dirigés ou travaux pratiques	361
G. W. : Sur les travaux pratiques de mathématiques	362
PONOCRATES : « Quand l'air était pluvieux... »	364
A. FOUCHÉ : L'enseignement des mathématiques dans les sections littéraires	367
Nouveaux projets de programmes	368
Un projet de licence d'enseignement ès-sciences mathématiques	372
Le questionnaire de l'A.P.M.	373

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE.

J.-L. NICOLET : Le dessin animé appliqué à l'enseignement des mathématiques et des sciences	375
Comptes rendus : « Arithmétique », par Y. CROZES	378
« Le ciel et la terre » (tome III de l'Encyclopédie française)	378
« Grandes découvertes du XX ^e siècle », par LEPRINCE-RINGUET	379
A travers les revues	380

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.

A. PERRICHET : Rapport sur le concours d'admission à l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses	381
J. DESFORGE : Rapport sur l'agrégation féminine de mathématiques, session de 1956 (à suivre)	385

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION	392
--	-----

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
 29, rue d'Ulm, Paris (5^e)
 Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 800 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R.	400 F
Prix de l'abonnement au <i>Bulletin</i>	1 000 F
Prix du numéro	200 F

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11^e). OBE. 56-95.

Vice-Présidents :

- Mlle MASSON (Enseignement féminin), 3, av. de la Porte-de-Montrouge, Paris, 14^e.
- M. BIGUENET (Enseignement Technique), 41, rue Madeleine-Michelis, Neuilly-sur-Seine.
- M. CHAZAL (Formation des maîtres), 2, rue Thimonnier, Paris, 9^e.
- M. DURRANDE (Grandes Ecoles), 4 bis, rue Henri-Moreau, Asnières.
- M. EDDE (Ecoles Normales), 40, avenue du Général-Leclerc, Paris, 14^e.
- M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Gemain, Paris, 5^e.

Secrétaires :

- Mlle FÉLIX (Conférences), 3, rue Pierre-Berland, Versailles.
- M. HUISMAN (Administration de l'A.P.M.), 11, rue Jacques-Cœur, Paris, 4^e.
- M. SIROS (Programmes), 13, avenue Jean-Racine, Sceaux.
- M. CROZES (Recherches pédagogiques), 10, rue du Buissou-St-Louis, Paris, 10^e.
- M. MOUGENOT (Relations avec les régionales), Lycée Poincaré, Nancy.
- M. GIRARD (Classes préparatoires), 37, rue Davioud, Paris, 16^e.

Trésorier : M. LEGRAND, 3 bis, avenue R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité de rédaction du « Bulletin » : Mlle FÉLIX, Mlle MARCHAND ; MM. CHAZAL, ITARD, SIROS. — Secréariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (*Compiègne*) ; M. WALUSINSKI (*St-Cloud*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. DURRANDE (*St-Louis*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; RUFF (*St-Louis*) ; SIROS (*Lakanal*) ; THÉRON (*Louis-le-Grand*).

Sortants en 1961 : M. BAY (*Condorcet*) ; Mlle BIARD (*E.N.S. Fontenay*) ; M. CASSE (*Savigny-sur-Orge*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. LE MÉNAGER (*Angers*) ; Mlle MARCHAND (*Lycée de Sèvres*) ; M. MOUGENOT (*Poincaré, Nancy*) ; Mlle VERVAECKE (*Fénelon, Lille*).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (*Montpellier*) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (*Strasbourg, Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOU (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales* : M. EDDE ; *Premier Cycle* : M. CARALP ; *Seconde et Première* : M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques* : M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (*Sciences Expérimentales*) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles* : M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques* : M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte* : M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours* : Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — Concours général : M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques* : M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement* : M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement* : M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie* : M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon* : M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon* : M. SAUSER ; *Lille* : M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon* : M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier* : M. DUSSOL (*Montpellier*) ; *Nancy* : M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes* : M. RENAULT (*Rennes*) ; *Strasbourg* : M. EHRHART (*Strasbourg, Kléber*) ; *Tunisie* : M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

NOTIONS LIÉES A LA STRUCTURE D'UN ESPACE MÉTRIQUE *

par Gustave CHOQUET

Professeur à la Sorbonne

Dans sa conférence sur les espaces métriques, M. REVUZ a défini la topologie d'un espace métrique et la continuité d'une application d'un espace métrique dans un autre.

Dans une conférence précédente sur la droite numérique, j'avais montré qu'à côté de la continuité existe une continuité uniforme ; nous allons voir que cette notion conserve un sens dans les espaces métriques quelconques ; plus généralement, nous étudierons les conséquences du fait que, dans les espaces métriques, on peut parler de la petitesse d'un ensemble.

Rappelons qu'un espace métrique est un ensemble E muni d'une distance $d(x, y)$ (définie comme application de E^2 dans R_+), telle que :

- 1) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$; $d(x, y) = 0$ si $x = y$.
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$.
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

DÉFINITION 1 : On appelle diamètre d'un sous-ensemble A d'un espace métrique, la borne supérieure $\delta(A)$ de l'ensemble des distances $d(x, y)$ où $x, y \in A$.

C'est un nombre ≥ 0 , fini ou infini.

Par exemple, le diamètre d'un disque plan est la longueur des diamètres au sens élémentaire ; le diamètre d'un triangle équilatéral est la longueur de ses côtés ; le diamètre d'un intervalle de droite $]a, b[$ est $(b-a)$.

On a toujours $\delta(A) = \delta(\bar{A})$ (1) ; on n'a $\delta(A) = 0$ que si A est vide ou réduit à un seul point.

On dit que A est *borné* si son diamètre est fini.

* Conférence prononcée le 6 décembre 1956, à l'Institut Henri-Poincaré, troisième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

(1) $\bar{A}$ désigne la fermeture de A (Cf. *Bulletin* 183, p. 168).

1. CONTINUITÉ UNIFORME

Soit f une application de E métrique dans F métrique. La continuité de f dans E peut s'exprimer en termes de distances de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in E, \quad \exists \eta > 0 \\ \text{tel que } [d(x, y) < \eta] \text{ entraîne } [d(f(x), f(y)) < \varepsilon].$$

Le nombre η dépend de ε et de x ; lorsqu'il existe un tel η qui ne dépende pas de x , on dit que f est uniformément continue ; ou plus simplement :

DÉFINITION 2 : On dit que f est uniformément continue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $A \subset E$, la condition $\delta(A) < \eta$ entraîne $\delta(f(A)) < \varepsilon$.

Si l'on appelle *oscillation* de f sur A le diamètre $\delta(f(A))$, la continuité uniforme de f se traduit encore en disant que l'oscillation de f sur A est petite lorsque le diamètre de A est petit. On peut préciser cette interprétation grâce à un *module de continuité* : Soit φ une fonction numérique croissante définie sur $[0, \infty[$; on dit que f admet φ pour module de continuité si, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)).$$

On vérifiera que la continuité uniforme de f équivaut à l'existence d'un module de continuité φ tel que $\varphi(u) \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow 0$.

Les modules de continuité les plus utilisés sont les fonctions linéaires : $\varphi(u) = ku$; lorsque f admet un tel module de continuité, on dit que f est *lipschitzienne de rapport* k . Cette condition s'écrit donc :

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Exemples : 1) Si f est une fonction numérique dérivable sur R , à dérivée f' telle que $|f'| \leq k$, f est lipschitzienne de rapport k (utiliser le théorème des accroissements finis).

2) Soit A un sous-ensemble de E , et soit $x \in E$; appelons *distance* de x à A le nombre $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ (2).

L'application $x \rightarrow d(x, A)$ de E dans R est lipschitzienne de rapport 1.

C'est en particulier le cas pour l'application $x \rightarrow |x|$ de R dans R .

3) L'application $(x, y) \rightarrow x + y$ de R^2 dans R est lipschitzienne. Il n'en est pas de même de l'application $(x, y) \rightarrow xy$; par contre, elle le devient si l'on impose à x ou à y de rester dans une partie bornée de R .

Il est immédiat que la continuité uniforme d'une fonction f entraîne sa continuité en tout point. La réciproque est fautive ; par exemple, la fonction numérique $x \rightarrow x^2$ est continue, mais la relation :

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

montre qu'aucune condition $|x - y| < \eta$ n'entraîne de majoration pour $|x^2 - y^2|$.

(2) $\inf d(xy)$ désigne la borne inférieure de la fraction $d(x, y)$ $y \in A$ lorsque y décrit A .

On construira de nombreux exemples analogues à partir de la propriété suivante que nous proposons comme exercice :

Soit f une fonction numérique uniformément continue définie dans $E = \mathbb{R}^n$, ou plus généralement dans un ensemble convexe E de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors deux constantes a et $b \geq 0$ telles que $|f(x)| \leq a\|x\| + b$ pour tout $x \in E$.

Composition de fonctions uniformément continues.

1) La composée $g \circ f$ de deux fonctions uniformément continues l'est aussi.

2) Si f et g sont lipschitziennes de rapports k_1 et k_2 , $g \circ f$ est lipschitzienne de rapport $k_1 k_2$.

Applications : Soit f une fonction numérique dans E ; si f est uniformément continue (resp. lipschitzienne de rapport k), $|f|$ l'est aussi. A partir de là, on montrera aisément que si f et g sont uniformément continues (resp. lipschitziennes), il en est de même de $(f + g)$, de $\sup(f, g)$, de $\inf(f, g)$, et de fg lorsqu'une au moins des fonctions f ou g est bornée dans E .

Isomorphisme de deux espaces métriques.

On sait que la topologie d'un espace est entièrement déterminée par ses ensembles ouverts et qu'à cette notion est associée une notion d'isomorphisme de deux espaces E et F . Une application biunivoque f de E sur F est appelée isomorphisme topologique (on dit plus couramment une homéomorphie) si f échange les ouverts de E et ceux de F ; ou, ce qui revient au même, si f et f^{-1} sont continues.

De même, à la notion de continuité uniforme sur un espace métrique, est associée une notion d'isomorphisme :

DÉFINITION 3 : Une application biunivoque f d'un espace métrique E sur un autre F est dite un isomorphisme de leurs structures uniformes si f et f^{-1} sont uniformément continues.

Un isomorphisme topologique n'est pas nécessairement uniforme ; par exemple, l'application $x \rightarrow x^3$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ est une homéomorphie ; mais ce n'est pas un isomorphisme uniforme.

Deux distances d_1 et d_2 sur un même ensemble E peuvent donc définir sur E la même topologie sans définir la même « structure uniforme ». Pour que d_1 et d_2 définissent la même structure uniforme sur E , il faut et il suffit que $d_2(x, y)$ soit petit quand $d_1(x, y)$ l'est, et inversement. Par exemple, si d est une distance sur E , elle est équivalente (pour la structure uniforme) aux distances $\frac{d}{1+d}$ et d^α ($0 < \alpha \leq 1$) ; dans $\mathbb{R}^2$, on utilise couramment les distances associées aux normes :

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad |x_1| + |x_2| \quad \text{ou} \quad \sup(|x_1|, |x_2|)$$

(où x_1 et x_2 sont les coordonnées de x) ; ces diverses distances sont équivalentes.

De même que la continuité d'une application de E dans F ne dépend que des topologies de E et F , la continuité uniforme de f ne dépend que des structures uniformes de E et F .

Applications continues définies dans un espace compact.

Nous avons vu qu'il existe des fonctions continues non uniformément continues : par exemple l'application $x \rightarrow x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; ici, les espaces E et F ne sont pas bornés ; mais il existe des exemples analogues où E et F sont bornés : par exemple, l'application $x \rightarrow \sin 1/x$ de $]0, 1]$ dans $[-1, +1]$ est continue, mais non uniformément continue.

Par contre, on ne peut trouver de pareil contre-exemple où E soit compact : c'est là un théorème fondamental dont voici l'énoncé :

THÉORÈME 1 : *Toute application continue f d'un espace métrique compact E dans un espace métrique quelconque est uniformément continue.*

La démonstration en sera donnée dans la conférence consacrée aux espaces compacts.

2. SUITES DE CAUCHY ; ESPACES COMPLETS ; MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

La définition d'une suite convergente de points d'un espace métrique E fait intervenir le point limite de la suite. Or, il est souvent intéressant de savoir si une suite est convergente sans qu'on ait besoin de sa limite. C'est CAUCHY qui, le premier, a dégagé, pour les suites de nombres réels, un critère de convergence indépendant des valeurs limites.

DÉFINITION 4 : *Soit E un espace métrique ; soit (x_n) une suite de points de E . On dit que cette suite est une suite de Cauchy si $d(x_p, x_q) \rightarrow 0$ lorsque p et $q \rightarrow \infty$, autrement dit si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que les relations p et $q \geq n_0$ entraînent $d(x_p, x_q) < \epsilon$.*

Cette condition peut encore s'interpréter autrement : désignons par X_n l'ensemble $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$; alors (x_n) est une suite de Cauchy si $\delta(X_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Il est immédiat que toute suite qui converge est une suite de Cauchy ; la réciproque est en général fautive ; par exemple la suite $(1 ; 1,4 ; 1,41 ; \dots)$, formée par des fractions décimales qui convergent vers $\sqrt{2}$, est une suite de Cauchy dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ; mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Or, il est très important de disposer d'espaces métriques dans lesquels les suites de Cauchy convergent ; d'où la définition :

DÉFINITION 5 : *On dit qu'un espace métrique E est complet si toute suite de Cauchy de points de E est convergente.*

Nous venons de voir que l'espace $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est

pas complet ; par contre, nous avons vu dans une précédente conférence que R était complet.

Exemples de suites de Cauchy de R : 1) Les sommes partielles S_n de toute série alternée $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ telle que a_n tende vers 0 en décroissant.

2) Les sommes partielles S_n de toute série $b_1 + b_2 + \dots$ telle que la série $|b_1| + |b_2| + \dots$ soit convergente.

Exemples d'espaces complets et d'espaces non complets : 1) Tout intervalle fermé de R est complet ; tout ensemble ouvert de R est non complet (sauf R lui-même).

2) L'espace euclidien R^n est complet ; en effet, toute suite de Cauchy de R^n a une projection sur chacun des axes qui est aussi une suite de Cauchy puisque la projection diminue les distances ; donc, chacune des n suites projetées convergent, d'où aussi la suite donnée.

3) Tout espace métrique compact est complet.

Invariance des espaces complets par isomorphisme.

L'application $x \rightarrow \frac{x}{1 + |x|}$ de R sur $] -1, +1[$ est une homéomorphie ; or, elle transforme l'espace métrique complet R en l'espace métrique non complet $] -1, +1[$; donc, la notion d'espace complet n'est pas une notion topologique ; ceci tient à ce qu'une homéomorphie ne transforme pas toujours toute suite de Cauchy en une suite de Cauchy.

Par contre, toute application uniformément continue f de E dans F transforme toute suite de Cauchy de E en une suite de Cauchy sur F ; donc, tout isomorphisme uniforme entre deux espaces E et F échange leurs suites de Cauchy ; en particulier, si l'un est complet, l'autre l'est aussi.

Donc, le fait pour un espace métrique d'être complet est invariant par les isomorphismes uniformes ; c'est une propriété de sa structure uniforme.

Voici quelques propriétés utiles et dont nous proposons la démonstration comme exercices :

1) Dans E complet, toute suite décroissante d'ensembles fermés F_n dont les diamètres tendent vers 0 a une intersection non vide et réduite à un point ; tout voisinage de ce point contient un ensemble de la suite.

2) Tout sous-ensemble fermé d'un espace complet est un espace complet.

3) Tout sous-espace complet d'un espace métrique est fermé dans cet espace.

4) Dans un espace métrique, la réunion et l'intersection de deux sous-espaces complets est un sous-espace complet.

Prolongement d'une fonction uniformément continue.

L'analyse pose souvent le problème de prolonger continuellement, à tout un ensemble E , une fonction définie sur un sous-ensemble A partout dense de E (c'est-à-dire tel que tout ouvert de E contienne des

points de A). L'existence d'un tel prolongement est souvent une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME 2 : Soit E métrique, soit A un sous-ensemble partout dense de E. Soit f une application uniformément continue de A dans un espace métrique complet F.

On peut prolonger f d'une façon et d'une seule en une application continue de E dans F. Ce prolongement est encore uniformément continu (et a les mêmes modules de continuité que f).

Voici le schéma de la démonstration :

Pour tout $x \in E$ et tout entier n , soit $B(x, \frac{1}{n})$ la boule fermée de E, de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$. Les ensembles $V_n = \overline{f(A \cap B(x, \frac{1}{n}))}$ forment une suite décroissante de fermés dont les diamètres tendent vers 0 (continuité uniforme de f) ; ils ont donc en commun un point et un seul qu'on désignera par $g(x)$.

On a $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. D'autre part, $g(X) \subset \overline{g(A \cap X)}$ pour tout $X \subset E$; il en résulte que $\delta(g(X)) \rightarrow 0$ avec $\delta(X)$. Donc, g est uniformément continue.

Exemples : 1) Prolongement à R de a^x définie sur l'ensemble Q des rationnels.

2) Soit f une fonction numérique dérivable définie sur $]0, 1]$, et telle que $|f'| < k$; f est alors lipschitzienne, donc uniformément continue ; on peut donc la prolonger en une fonction continue définie sur $[0, 1]$.

Méthode des approximations successives.

Il s'agit d'une méthode puissante utilisée dans de nombreux domaines de l'analyse (équations numériques, équations différentielles, équations intégrales), et dont l'intérêt a d'abord été souligné par les travaux de E. PICARD ; elle peut être schématisée très simplement de la façon suivante :

Disons d'abord qu'une application f d'un espace métrique E dans un autre F est contractante (de rapport λ , où $0 \leq \lambda < 1$) si, pour tout couple de points x_1, x_2 de E, on a :

$$d_F(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_F(x_1, x_2).$$

Ce n'est autre qu'une application lipschitzienne de rapport $\lambda < 1$.

Exemple : E est l'espace euclidien R^n et f est une similitude de rapport $\lambda < 1$.

THÉORÈME 3 : Soit E un espace métrique complet et soit f une application contractante de E dans lui-même.

L'équation $x = f(x)$ a une solution et une seule a . Pour tout $x_0 \in E$, la suite des transformés successifs $x_n = f^n(x_0)$ du point x_0 converge vers a .

Démonstration : De la relation $x_{p+1} = f(x_p)$ résulte que, pour tout n , le transformé du couple (x_{n-1}, x_n) est le couple (x_n, x_{n+1}) .

On a donc $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n)$. On tire des n premières relations de cette forme que :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1).$$

D'où :

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{n}^{\infty} \lambda^p$$

Comme $0 \leq \lambda < 1$, la suite des x_n est donc une suite de Cauchy.

Si a est son point limite, comme f est continue, on a :

$$f(a) = \lim f(x_n) ;$$

d'autre part, $x_{n+1} = f(x_n)$, d'où à la limite : $a = f(a)$.

Cette solution a est la seule de l'équation $x = f(x)$, car si a' en est une autre solution, on a :

$$d(a, a') = d(f(a), f(a')) \leq \lambda d(a, a') \quad \text{d'où} \quad d(a, a') = 0 \quad \text{donc} \quad a = a'.$$

Remarquons que la méthode utilisée fournit un procédé de calcul approché de la solution a , puisque la série de terme général $d(x_n, x_{n+1})$ converge plus vite qu'une série géométrique de raison λ . Plus précisément, on a :

$$d(x_n, a) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_0, x_1) \cdot \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}$$

Il peut arriver que la convergence soit encore plus rapide, par exemple lorsque la restriction de f à un voisinage V de a est contractante d'ordre $\lambda(V)$, et que $\lambda(V)$ tend vers 0 avec le diamètre de V .

Lorsque l'espace E est borné, l'existence et l'unicité de a sont plus évidentes encore, car la suite $f^n(E)$ est décroissante et le diamètre de $f^n(E)$ est $\leq \lambda^n \delta(E)$.

Exemples : 1) $E = \mathbb{R}^n$ et f est une similitude de rapport $\lambda < 1$; le point a n'est autre que le centre de la similitude, dont on démontre ainsi l'existence.

2) Soit $y = f(x)$ une fonction numérique dérivable définie sur un intervalle fermé borné $E = [a, b]$, telle que l'ensemble de ses valeurs soit également contenu dans $[a, b]$, et telle que $|f'(x)| \leq \lambda$, où $\lambda < 1$.

L'application f de $[a, b]$ dans lui-même est contractante de rapport λ et la méthode s'applique.

Nous ne pouvons pas indiquer ici les applications de cette méthode aux équations différentielles.

Complétion d'un espace métrique.

Cette étude des espaces complets montre l'intérêt de disposer d'un espace complet. Aussi, lorsqu'une théorie mathématique conduit à l'introduction d'un espace métrique qui n'est pas complet, essaie-t-on presque toujours de lui ajouter de nouveaux éléments pour qu'il devienne complet. Théoriquement, cette complétion est toujours possible ; elle est même, en un certain sens, possible d'une façon et d'une seule ; plus précisément, on démontre, en utilisant les suites de Cauchy de l'espace

donné E , qu'il existe un espace complet $\widehat{E}$, unique (à une isométrie près), contenant un sous-ensemble partout dense isométrique à E (et qu'il est commode d'identifier à E).

Mais cette complétion abstraite n'aurait en général aucun intérêt si l'on ne savait pas interpréter les nouveaux éléments ajoutés à E ; le véritable travail de complétion consiste dans cette interprétation, parfois difficile, mais très souvent fructueuse, car elle montre quel est le cadre naturel dans lequel doit se développer la théorie.

Exemples : 1) Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ muni de la distance associée à la norme :

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Cet espace métrique n'est pas complet. Les éléments de l'espace complété $\widehat{E}$ sont les fonctions intégrables au sens de LEBESGUE sur $[0, 1]$ (avec la convention qu'on identifie deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle).

On a un exemple analogue en remplaçant la norme précédente par celle ainsi définie :

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t) dt.$$

Les nouvelles fonctions sont ici les fonctions mesurables dont le carré est intégrable.

2) Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques définies dans R^2 , nulles en dehors d'un compact, et continuellement dérivables. La norme définie par :

$$\|f\|^2 = \iint \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 dx dy$$

fournit une distance sur E ; l'espace métrique E n'est pas complet ; les éléments à ajouter à E pour le compléter sont de nouvelles fonctions aux propriétés intéressantes.

3. TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE UNIFORME

Nous avons jusqu'ici étudié le comportement d'une fonction ; on peut faire un pas de plus en étudiant le comportement des familles de fonctions. L'aspect le plus élémentaire d'une telle étude est la notion de convergence simple d'une suite de fonctions.

DÉFINITION 6 : Soit f_n une suite d'applications d'un ensemble E dans un espace topologique F . On dit que cette suite converge simplement vers f (application de E dans F), si, pour tout $x \in E$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Bien que ce mode de convergence ait eu une grande importance en Mathématiques et y ait encore une place honorable, de nombreux autres modes de convergence ont été introduits et sont utilisés suivant les besoins (voir les exemples ci-dessus).

En fait, si l'on étudie les graphes d'une suite de fonctions qui converge simplement, on s'aperçoit que la convergence simple traduit mal notre notion intuitive de convergence :

Soit par exemple f_n la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \quad \text{sur } [0, \frac{1}{n}],$$

$$f_n(x) = 0 \text{ ailleurs.}$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f = 0$; or, les graphes des fonctions f_n ne convergent pas vers celui de f . On est donc conduit à introduire un nouveau mode de convergence :

DÉFINITION 7 : Soit f_n une suite d'applications d'un ensemble E dans un espace métrique F . On dit que cette suite converge uniformément vers f (application de E dans F), si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $x \in E$, et pour tout $n > n_0$, on ait $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$.

Dans l'exemple précédent, la suite f_n ne converge pas uniformément vers 0. Donc, la convergence simple n'entraîne pas la convergence uniforme, même si les fonctions f et f_n sont continues, même si E est compact, même si les f_n sont bornées.

Par contre, la convergence uniforme entraîne évidemment la convergence simple.

Notons le fait important que la définition ne suppose aucune topologie sur l'espace de départ E ; par contre, elle exige que F , espace d'arrivée, soit un espace métrique.

Métrique et topologie de la convergence uniforme.

On peut rendre plus intuitive et plus commode l'étude de la convergence uniforme en introduisant une distance sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F (nous supposons pour simplifier que l'espace F est borné) :

Soient f et g deux applications de E dans F ; on dira que f et g sont ε -voisines si $d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in E$; le plus petit de ces nombres ε est appelé la distance entre f et g ; elle est aussi égale à $d(f, g) = \sup_{x \in E} d(f(x), g(x))$.

$$x \in E$$

On vérifie aisément que $d(f, g)$ est une distance sur $\mathcal{F}(E, F)$; la métrique ainsi définie sur $\mathcal{F}(E, F)$ est la métrique de la convergence uniforme.

On peut maintenant interpréter commodément la convergence uniforme : dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f équivaut à dire que $d(f, f_n) \rightarrow 0$, autrement dit que dans $\mathcal{F}(E, F)$ la suite des points f_n converge vers le point f .

Notons que si on remplace la métrique de F par une autre équivalente (pour la structure uniforme), les deux métriques qu'on obtient sur $\mathcal{F}(E, F)$ sont aussi équivalentes ; donc, la notion de convergence uniforme ne dépend que de la structure uniforme de F .

Limite uniforme de fonctions continues.

Si on suppose maintenant que l'espace de départ E est muni d'une topologie, on peut étudier l'effet de la convergence uniforme sur les fonctions continues. Voici l'énoncé essentiel, dont nous proposons la démonstration comme exercice :

THÉOREME 4 : *Soit E un espace topologique, F un espace métrique. Si une suite d'applications continues de E dans F converge uniformément vers une application f , cette application f est continue.*

Exemple : Soit (u_n) une suite de fonctions numériques continues sur $[0, 1]$, telles que $|u_n(x)| \leq a_n$ pour tout x , la série $\sum a_n$ étant convergente. Alors, la série $\sum u_n(x)$ est uniformément convergente (c'est-à-dire que la suite des sommes partielles $S_n(x)$ est uniformément convergente) et sa somme est une fonction continue.

C'est le cas pour la série $\sum \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$.

Notons que l'on ne peut pas énoncer un théorème analogue pour la convergence simple ; on peut construire, par exemple, une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers la fonction f égale à 0 pour $x=0$ et à 1 pour $x \neq 0$.

Les espaces de fonctions continues munis de la métrique de la convergence uniforme ont une grande importance en Mathématiques. En particulier, l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ est d'un usage constant ; c'est un espace vectoriel (de dimension infinie) sur le corps $\mathbb{R}$. Sa métrique de la convergence uniforme est associée à la norme $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Pour cette métrique, il est

complet ; on montre aisément qu'il n'est pas localement compact.

4. CONCLUSION

Au cours de cette étude, nous avons rencontré plusieurs notions : continuité uniforme d'une fonction, suite de Cauchy, espace complet, convergence uniforme.

Ces notions ont été définies à partir de la métrique des espaces étudiés ; toutefois, nous avons remarqué qu'elles étaient invariantes par un changement de métrique qui soit un isomorphisme uniforme. On voit donc que ces notions ne sont pas des notions métriques, et on peut espérer les étendre à des espaces non-métriques.

On peut effectivement définir des notions analogues pour un groupe topologique (c'est-à-dire un groupe muni d'une topologie telle que les applications $x \rightarrow x^{-1}$ et $(x, y) \rightarrow x.y$ soient continues) ; ou plus généralement pour les espaces appelés *espaces uniformes*, qui ne sont autres que des ensembles munis d'une structure permettant de parler d'ordre de petitesse pour les sous-ensembles, avec des axiomes correspondant à ceux des espaces métriques.

G. C.

NOTIONS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE, PROCÉDÉS DE CONSTRUCTIONS D'ESPACES TOPOLOGIQUES *

par Ch. PISOT

Professeur à la Sorbonne

Pour étudier la notion de limite et de continuité, on est conduit à définir ce que l'on entend par élément voisin d'un autre. Jusqu'ici, nous avons vu que l'existence d'une distance $d(x, x')$ permet de donner une telle définition. On dira que x_n tend vers x si la suite des nombres $d(x_n, x)$ est une suite tendant vers 0. Cette notion utilise par conséquent la notion de limite dans l'ensemble des nombres réels. Un certain nombre de propriétés sont cependant indépendantes des nombres réels ; d'autre part, certaines notions de limite, même très simples, ne peuvent pas se définir par une distance. Cela impose par conséquent une définition plus générale du « voisinage » d'un élément.

Considérons, par exemple, la notion ordinaire de convergence d'une fonction $u(x)$ définie dans l'intervalle $[a, b]$. On dira que u tend vers 0 si, pour tout x de $[a, b]$, le nombre $u(x)$ tend vers 0. Si l'on ne fait aucune restriction sur l'ensemble des fonctions $u(x)$, on exprime ainsi une infinité non dénombrable de conditions indépendantes sur la fonction u ; il est facile de montrer qu'il est impossible de trouver une distance dans l'ensemble des fonctions u qui permette de définir les fonctions u tendant vers 0.

Quand nous avons défini la continuité d'une fonction $f(x)$ en x_0 , nous avons vu que l'on pouvait la définir de la manière suivante : L'image réciproque de l'intervalle $]f(x_0) - \eta, f(x_0) + \eta[$ contient un intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Nous appelons alors « voisinage » de x_0 tout ensemble contenant un ouvert qui contient x_0 . Ainsi, $f(x)$ est continu en x_0 , si l'image réciproque d'un voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0 .

Les ensembles ouverts constituent ainsi l'élément important dans cette définition des voisinages. Dans le cas d'un espace métrique E , on peut définir un ensemble ouvert O de la manière suivante : O est ouvert, si, pour tout élément x_0 de O , il existe un nombre $\rho > 0$ tel que tous les x vérifiant $d(x, x_0) < \rho$ appartiennent à O . En vertu de l'inégalité triangulaire, tout ensemble $d(x, x_0) < \rho$ est alors un ouvert. Ces ouverts vérifient les trois propriétés suivantes, qui ne font pas intervenir la distance :

O_1 : Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est un ouvert.

O_2 : Toute intersection FINIE d'ouverts est un ouvert.

O_3 : E et $\emptyset$ sont des ouverts.

O_3 est évident pour E , pour $\emptyset$ c'est une définition. Pour O_2 , on peut remarquer que le mot *fini* est essentiel, car, si on prend les ouverts

* Conférence prononcée le 14 février 1957 à l'Institut Henri-Poincaré, cinquième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

$d(x, x_0) < \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \rightarrow 0$, s'ils ont en commun $x_1 \neq x_0$, on aurait $d(x_1, x_0) < \varepsilon_n$, donc $d(x_1, x_0) = 0$ et $x_1 = x_0$. O_1 est à peu près évident.

Dans un ensemble E quelconque, nous dirons que nous avons défini une topologie, que nous avons fait de E un ensemble topologique, si on a défini un ensemble de parties de E vérifiant O_1, O_2, O_3 ; ces parties s'appellent alors les « ouverts » de E .

Exemple : Considérons la famille formée de E et de $\emptyset$ seuls. Ils vérifient O_1, O_2 et O_3 . La topologie associée est dite topologie grossière.

Autre exemple : Soit E un ensemble totalement ordonné. On appellera « intervalle ouvert » tout ensemble d'éléments x tels que $x < a$, ou $a < x < b$, ou $x > b$. Un ouvert sera alors une réunion finie ou infinie d'intervalles ouverts.

Considérons, par exemple, une fonction monotone $f(x)$. On sait que, pour tout x , il existe la limite à droite $f(x+0)$ et la limite à gauche $f(x-0)$. Cela conduit à considérer un ensemble E déduit de $\mathbb{R}$ en remplaçant chaque nombre réel x par deux quantités notées $x+0$ et $x-0$. Cet ensemble est totalement ordonné par la convention suivante : $x+0 < x'-0$ si $x < x'$ dans $\mathbb{R}$ et $x-0 < x+0$. On pourra donc définir des ouverts dans E , donc une topologie.

A partir de la notion d'ouvert, on définira celle de voisinage. On appellera voisinage d'un élément x (ou plus généralement d'un sous-ensemble A de E) tout ensemble contenant un ouvert qui contient x (ou A).

Cette définition montre qu'un ouvert est voisinage de chacun de ses points. La réciproque est vraie également : tout ensemble A tel que A soit voisinage de chacun de ses points est un ouvert. En effet, si x est un point de A , il existe un ouvert O_x contenant x et contenu dans A ; A est manifestement la réunion de tous les O_x , donc A est ouvert.

Il en résulte que les ouverts d'un espace E sont connus, si on connaît les voisinages de chaque point. Autrement dit, deux topologies sur un même ensemble, qui admettent les mêmes voisinages, sont identiques.

Les voisinages jouissent des propriétés suivantes qui pourraient d'ailleurs servir de départ pour définir une topologie :

V_1 : Tout voisinage de x contient x .

V_2 : Tout ensemble contenant un voisinage de x est un voisinage de x .

V_3 : L'intersection d'un nombre fini de voisinages de x est un voisinage de x .

V_4 : Si V est un voisinage de x , il existe un voisinage W de x , tel que W soit contenu dans V , et que V est voisinage de chaque point de W .

La propriété V_4 exprime le fait que tout point assez voisin d'un point assez voisin de x est lui-même voisin de x . Il se substitue à l'inégalité triangulaire dans les espaces métriques. Pour démontrer V_4 , il suffit de prendre pour W un ouvert contenu dans V et contenant x .

Je signale, sans m'y étendre, qu'en introduisant les ensembles complémentaires relativement à E des ouverts de E , on a une famille

d'ensembles appelés « fermés » qui permettent aussi de définir la topologie de E .

CONTINUITÉ, LIMITES. — Nous dirons que l'application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est *continue* en u_0 de E , si, pour tout voisinage W de $f(u_0)$ dans F , il existe un voisinage V de u_0 dans E tel que $f(V)$ soit contenu dans W ; ou encore, l'image réciproque $f^{-1}(W)$ de tout voisinage W de $f(u_0)$ dans F est un voisinage de u_0 dans E . On dira que l'application f est *continue sur* E , si elle est continue pour tout élément u de E . Pour cela, il faut et il suffit que l'image réciproque $f^{-1}(O_F)$ de tout ouvert O_F de F soit un ouvert O_E de E . En effet, O_F est voisinage de chacun de ses points, donc, si f est continu sur E , $f^{-1}(O_F)$ est voisinage de chacun de ses points dans E , donc c'est un ouvert de E . Réciproquement, pour tout u de E et tout voisinage W de $f(u)$, il existe un ouvert O_F contenant $f(u)$ et contenu dans W . Si $f^{-1}(O_F) = O_E$ pour tout O_F , alors u est contenu dans O_E , donc $f^{-1}(W)$ contient O_E , $f^{-1}(W)$ est donc un voisinage de u et f est continu.

On dira qu'une suite u_n tend vers u , si, pour tout voisinage V de u , il existe un entier $N = N(V)$ tel que $n \geq N$ entraîne que u_n appartienne à V . Malheureusement, une suite peut avoir plusieurs limites, par exemple en topologie grossière, tout u est limite de toute suite u_n . On est ainsi conduit à distinguer les espaces topologiques suivants :

Espace séparé : E est dit séparé, si ses voisinages vérifient la propriété suivante :

S : Deux points distincts de E possèdent deux voisinages disjoints.

Exemple : E totalement ordonné. Soient $x < x'$ deux éléments distincts et soient a et b tels que $a < x < x' < b$.

1° Il existe c tel que $x < c < x'$, alors $]a, c[$ et $]c, b[$ sont deux ouverts disjoints.

2° Il n'existe pas de c tel que $x < c < x'$, alors $]a, x'[$ et $]x, b[$ sont disjoints, car, s'il y avait un élément y commun, on aurait $y < x'$ et $y > x$, donc $x < y < x'$.

SOUS-ESPACE TOPOLOGIQUE. — Soit E un espace topologique et A un sous-ensemble de E . Les traces sur A des ouverts de E vérifient O_1, O_2, O_3 , donc on a ainsi une topologie sur A ; elle rend continue l'application qui à tout u de A fait correspondre u dans E .

Exemples : Topologie dans un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, ou encore sur la circonférence $x^2 + y^2 = 1$, sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

En sens inverse, une famille d'ouverts de A n'est pas nécessairement une famille d'ouverts dans E ; il faut et il suffit pour cela que A soit ouvert de E . En effet, A est un ouvert de A , donc doit être ouvert dans E . Réciproquement, si A est ouvert, la trace sur A de tout ouvert de E est ouvert dans E , car c'est un voisinage de chacun de ses points.

PRODUIT DE DEUX ESPACES TOPOLOGIQUES. — Soient F et G deux

espaces topologiques, $u \in F$, $v \in G$, alors l'espace $F \times G$ est l'ensemble des couples (u, v) . Si les applications f qui à (u, v) de $F \times G$ font correspondre u de F et $g(u, v) = v$ sont continues, alors si O_F est un ouvert de F , $f^{-1}(O_F)$ qui est égal au produit $O_F \times G$ doit être ouvert dans $F \times G$, de même $F \times O_G$. Il doit encore en être ainsi des intersections finies et des réunions. Si on appelle alors ensemble élémentaire un produit $O_F \times O_G$, on voit que les ouverts doivent être des réunions d'ensembles élémentaires. Une telle réunion vérifie bien O_1, O_2 et O_3 . En effet, O_1 et O_3 sont évidents ; pour O_2 , si $A = \bigcup O_F$, $B = \bigcup O_G$, on a $A \cup B = \bigcup (O_F \cap O_G)$, en vertu de la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$. L'espace $F \times G$ est alors appelé produit topologique de F et G . De proche en proche, on peut définir un produit de plusieurs espaces topologiques. Ce produit est associatif.

Continuité : Soit φ une application d'un espace topologique E dans un produit topologique $F \times G$. Soit $f = \text{proj}_F \varphi$ et $g = \text{proj}_G \varphi$; f applique E dans F et g dans G . Si φ est continu, f et g le sont. Réciproquement, si f et g sont continus, $f^{-1}(O_F)$ est un ouvert de E et $\varphi^{-1}(O_F \times O_G) = f^{-1}(O_F) \cap g^{-1}(O_G)$ est ouvert ; il en est ainsi de toute réunion, donc de tout ouvert de $F \times G$, donc φ est continu.

On voit de même que la condition nécessaire et suffisante pour que $w_n = (u_n, v_n)$ de $F \times G$ tende vers $w = (u, v)$ de $F \times G$, c'est que $u_n \rightarrow u$ dans F et $v_n \rightarrow v$ dans G .

Exemple : Pour R^2 , ouverts réunion des « pavés » $x \in]a, a'[, y \in]b, b'[,$

Si F et G sont séparés, $F \times G$ l'est aussi, car, si u et u' sont distincts dans F , $v \neq u' \in G$, il existe $O_F \ni u$, $O'_F \ni u'$ avec $O_F \cap O'_F = \emptyset$, de même $O_G \ni v$, $O'_G \ni v'$ avec $O_G \cap O'_G = \emptyset$. Alors $(O_F \times O_G) \cap (O'_F \times O'_G) = \emptyset$ et $(O_F \times O_G)$ est un voisinage de (u, v) disjoint de $(O'_F \times O'_G)$, voisinage de (u', v') .

Réciproquement, supposons $F \times G$ séparé ; soit alors $(u, v) \neq (u', v')$, avec $u \neq u'$; soient O un ouvert contenant (u, v) et O' un ouvert contenant (u', v') , tels que $O \cap O' = \emptyset$; soit $O_F = \text{proj}_F O$, $O'_F = \text{proj}_F O'$, alors $O_F \cap O'_F = \emptyset$, donc F est séparé. On voit qu'il en est de même de G .

Espace de la convergence simple : Soit E l'espace des fonctions $u(x)$ avec $x \in [a, b]$. Nous appellerons ensemble élémentaire :

$$\omega = \omega(u_0, x_1, \dots, x_n, \epsilon)$$

un ensemble de $u \in E$ tel que $|u(x_i) - u_0(x_i)| < \epsilon$ pour $i = 1, \dots, n$. Nous appellerons « ouvert » une réunion finie ou infinie d'ensembles élémentaires. Les propriétés O_1, O_2, O_3 sont alors vérifiées. La topologie obtenue est celle de la convergence simple.

La topologie est séparée. En effet, si $u_1 \neq u_2$, il existe au moins un x_0 tel que $|u_1(x_0) - u_2(x_0)| = 3\delta > 0$, alors $\omega[u_1, x_0, \delta]$ et $\omega[u_2, x_0, \delta]$ sont deux ouverts disjoints, car $\omega[u_1, x_0, \delta]$ est l'ensemble des u tels que $|u(x_0) - u_1(x_0)| < \delta$.

ESPACES COMPACTS ET LOCALEMENT COMPACTS *

par Ch. PISOT

Professeur à la Sorbonne

La notion de limite dans les espaces fonctionnels conduit à donner une importance particulière aux espaces tels que toute famille infinie possède au moins une fonction limite. Cette propriété, c'est celle des ensembles infinis bornés de nombres réels, exprimée par le théorème de Bolzano-Weierstrass. L'importance de cette propriété dans la théorie des fonctions de variables complexes a été mise en relief par la théorie des « familles normales » de M. Montel. Mentionnons également le calcul des variations qui a puissamment contribué à l'élaboration de la topologie générale.

Il est cependant apparu que le théorème de Bolzano-Weierstrass n'était pas toujours la formulation la plus adaptée aux problèmes qui se posaient dans les espaces fonctionnels. Une propriété plus satisfaisante, équivalente à Bolzano-Weierstrass pour l'espace numérique $\mathbb{R}$, est fournie par le théorème de Borel-Lebesgue, et c'est ce dernier qui va nous permettre de définir des espaces extrêmement utiles.

ESPACE COMPACT. — Un espace E est dit *compact* s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

1° E est séparé.

2° De tout recouvrement de E par des ouverts, on peut extraire un recouvrement formé par un nombre fini de ces ouverts.

Ainsi, tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ est compact, mais $\mathbb{R}$ tout entier ne l'est pas.

La définition d'un espace compact peut, par dualité, être donnée sous la forme suivante : E est compact si E est séparé et si toute famille Φ de fermés de E , telle que toute sous-famille finie ait une intersection non vide, possède la propriété que l'intersection complète de Φ est non vide. Cette dernière définition montre immédiatement que, si, dans un espace compact, on a une famille de fermés Φ ordonnés par inclusion, c'est-à-dire $\Phi_{i+1} \subset \Phi_i$, l'intersection complète de tous les Φ_i est non vide. Le théorème de Bolzano-Weierstrass en résulte pour tout espace compact E . En effet, soit une famille infinie d'éléments a_n de E , soit A_n l'ensemble des a_i avec $i \geq n$, $\overline{A}_n$ la fermeture de A_n , alors $\overline{A}_{n+1} \subset \overline{A}_n$; l'intersection complète des $\overline{A}_n$ n'est donc pas vide et chacun de ses éléments est une valeur d'accumulation de l'ensemble des a_n .

Remarquons ici que la réciproque, à savoir un espace séparé possédant la propriété énoncée par le théorème de Bolzano-Weierstrass, est

* Conférence prononcée le 14 mars 1957, sixième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

un espace compact, n'est pas vraie en général ; nous verrons cependant qu'elle l'est pour les espaces métriques.

On voit facilement qu'un sous-espace d'un espace compact est compact, de même qu'une réunion ou une intersection d'un nombre fini. Un produit d'un nombre fini d'espaces compacts (au sens de produit d'espaces topologiques) est compact ; ainsi, le tore à n dimensions T^n est compact, car la circonférence l'est.

CONTINUITÉ ET COMPACTITÉ. — On a le théorème suivant : *Une application continue f d'un espace compact E dans un espace séparé F transforme E en un espace $f(E)$ compact.*

En effet : 1° L'espace $f(E)$ est séparé, comme sous-espace de l'espace séparé F .

2° Soit un recouvrement de l'espace $f(E)$ par des ouverts ω_i de $f(E)$; ces ouverts sont tels que $\omega_i = f(E) \cap \Omega_i$, où Ω_i est un ouvert de F . Il résulte de la continuité de f que les ensembles $f^{-1}(\omega_i) = f^{-1}(\Omega_i)$ sont des ouverts de E et ils forment un recouvrement de E . Comme E est compact, on peut en extraire un recouvrement fini, qui, par l'application f , donne un recouvrement fini de $f(E)$, extrait des ouverts ω_i ; donc $f(E)$ est compact.

En particulier, si f est une fonction numérique, donc $F = \mathbb{R}$, alors le théorème précédent s'applique. Il s'ensuit que l'image continue d'un compact E dans $\mathbb{R}$ est compacte ; en particulier, $f(E)$ est alors borné et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure pour des éléments particuliers de E .

ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS. — Tout espace métrique est séparé ; pour qu'un espace métrique soit compact, il faut et il suffit que le théorème de Borel-Lebesgue soit vrai. S'il est compact, il en résulte, comme on a vu, le théorème de Bolzano-Weierstrass. Mais, réciproquement, pour de tels espaces, ce dernier théorème entraîne la compacité.

En effet, considérons un recouvrement d'un espace métrique E par des ouverts ω_i . Pour tout élément x de E , soit $\rho(x, i) \geq 0$, le rayon de la plus grande boule ouverte, de centre x , contenue dans ω_i , et soit $\rho(x) = \sup \rho(x, i)$ pour tous les ouverts ω_i . Si $d(x, x')$ désigne la distance entre x et x' , on a :

$$|\rho(x, i) - \rho(x', i)| \leq d(x, x'),$$

donc $|\rho(x) - \rho(x')| \leq d(x, x')$; par suite, $\rho(x)$ est une fonction continue sur E . Comme $\rho(x) > 0$, pour tout x de E , car x est contenu dans au moins un ω_i , on voit facilement que Bolzano-Weierstrass entraîne que la borne inférieure $\rho = \inf \rho(x)$ sur E vérifie $\rho > 0$. Pour tout x , il y a donc

un indice i_x tel que $\rho(x, i_x) > \frac{\rho}{2}$. Si x_1 est alors un élément tel que

$\omega_1 = \omega_{i_{x_1}}$ ne recouvre pas E , on prend un élément x_2 , non contenu dans ω_1 , et ainsi de suite. La suite $x_1, x_2, \dots$ ne peut avoir de valeur d'accumulation, car la distance mutuelle de deux de ses éléments

dépasse $\frac{\rho}{2}$; si donc le théorème de Bolzano-Weierstrass est vrai dans E ,

la suite est finie et nous avons extrait de la famille des ω_i un nombre fini recouvrant E.

CONTINUITÉ UNIFORME. — Soit E un espace métrique, f une application continue de E dans un espace métrique F. Si E est compact, l'application f est « uniformément continue ». En effet, à tout ε de F et à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $d_E(x, y) < \eta_\varepsilon$ entraîne $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Or, l'ensemble des y vérifiant $d_E(x, y) < \frac{1}{2} \eta_\varepsilon$ est une boule ouverte B_x de E, et l'ensemble des B_x forme un recouvrement de E. Si E est compact, on peut en extraire un recouvrement fini B_{x_i} .

Soit alors $\eta = \min \frac{1}{2} \eta_{x_i}$; considérons un élément x de E, il est contenu dans l'une des B_{x_i} , soit B_{x_1} . Soit y un autre élément de E tel que $d(x, y) < \eta$, alors $d(y, x_1) \leq d(y, x) + d(x, x_1) < \eta + \frac{1}{2} \eta_{x_1} \leq \eta_{x_1}$, donc y est aussi contenu dans B_{x_1} et on a :

$$d_F(f(x), f(y)) \leq d_F(f(x), f(x_1)) + d_F(f(x_1), f(y)) < 2\varepsilon.$$

Un espace métrique E est appelé *bien enchaîné* si, à deux éléments a et b quelconques de E et à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une *chaîne* $a = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = b$ d'un nombre fini d'éléments de E (pouvant dépendre de ε), tels que $d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$. Ainsi, un intervalle borné et fermé de R est bien enchaîné, de même un intervalle borné et fermé de Q.

Si E est un espace métrique compact bien enchaîné, et f une application continue sur un espace métrique F, alors $f(E)$ est compact, f est uniformément continue et par suite $f(E)$ est bien enchaîné.

Un espace compact métrique bien enchaîné est *connexe*, c'est-à-dire ne peut pas être décomposé en deux ensembles fermés disjoints non vides. En effet, dans le cas contraire, soient E' et E'' ces deux fermés non vides disjoints. On a $\inf d(x', x'') \neq 0$ pour $x' \in E', x'' \in E''$, sinon il y aurait $x'_0 \in E$ et $x''_0 \in E''$ avec $d(x'_0, x''_0) = 0$, donc $x'_0 = x''_0$, et E' et E'' ne seraient pas disjoints.

En particulier, sur R, tout compact bien enchaîné est un intervalle fermé. Par suite, toute fonction continue numérique f sur un compact métrique E prend toute valeur entre $\sup f(E)$ et $\inf f(E)$.

ESPACE LOCALEMENT COMPACT. — L'espace R n'est pas compact, cependant, au voisinage de chaque point; il se comporte comme un espace compact. De façon précise, nous dirons qu'un espace E est *localement compact* si E est séparé et si tout point de E possède un voisinage compact. Ainsi, R est localement compact.

Un espace localement compact peut être complété par l'adjonction d'un seul élément, dit *point à l'infini*, de sorte que le nouvel espace obtenu soit compact. Pour cela, considérons les complémentaires dans E des ensembles de E dont la fermeture est compacte. Ces complémentaires forment une famille V d'ensembles vérifiant les propriétés suivantes : tout ensemble contenant un ensemble de V appartient à V; toute inter-

section finie d'ensembles de V appartient à V . Ces propriétés font partie de celles qui définissent les voisinages d'un élément en topologie. On définira alors un élément ω supplémentaire, en posant comme définition que la famille V constitue la famille des voisinages de ω . L'ensemble $E + \omega$ est alors compact, car soit un recouvrement de $E + \omega$, considérons un ouvert Ω contenant ω , le complémentaire de cet ouvert est alors un compact et peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts Ω_i . Les ouverts Ω_i et Ω forment ainsi un recouvrement fini de $E + \omega$.

ESPACE MÉTRIQUE COMPLET. — Un espace métrique est dit *complet* si toute « suite de Cauchy » est convergente. L'ensemble R des nombres réels est complet, tandis qu'il n'en est pas ainsi de l'ensemble Q des nombres rationnels. On a la proposition suivante :

Tout espace métrique compact est complet.

En effet, soit a_n une suite de Cauchy, c'est-à-dire à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer n tel que $d(a_h, a_k) < \varepsilon$ pour tout $h \geq n, k \geq n$. Soit A_m l'ensemble des a_i avec $i \geq m$ et $\overline{A_m}$ la fermeture de A_m . On a $\overline{A_{m+1}} \subset \overline{A_m}$. Si a' et a'' sont deux éléments de $\overline{A_n}$, on a :

$$d(a', a'') \leq d(a', a_h) + d(a_h, a_k) + d(a_k, a''),$$

avec $h \geq n, k \geq n$; à tout $\varepsilon' > 0$, on peut associer h et k tels que $d(a', a_h) < \varepsilon'$ et $d(a_k, a'') < \varepsilon'$, donc $d(a', a'') \leq d(a_h, a_k) \leq \varepsilon$, car la suite a_n est une suite de Cauchy. Soit A l'intersection complète de tous les $\overline{A_n}$. Comme l'espace est compact, A n'est pas vide. Si a et b sont deux éléments de A , ils appartiennent à tout $\overline{A_n}$, donc $d(a, b) \leq \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$, et par suite $d(a, b) = 0$, $b = a$, et A est formé du seul élément a . La suite de Cauchy a donc une seule valeur d'accumulation, c'est une suite convergente.

ESPACE DE BANACH. — Nous définirons plus loin la notion de valeur absolue dans un corps K . Soit alors E un espace vectoriel sur un corps K dans lequel est définie une valeur absolue, notée $|\alpha|$ pour $\alpha \in K$. On appelle *norme* une application $x \rightarrow \|x\|$ de E sur les nombres réels positifs vérifiant les propriétés suivantes :

$$1^\circ \quad \|x\| > 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \|0\| = 0.$$

$$2^\circ \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ pour tout } \alpha \in K.$$

$$3^\circ \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

L'espace E s'appelle alors *espace vectoriel normé*.

Un tel espace est un espace métrique lorsque l'on pose :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Un corps K peut toujours être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même. On appelle alors *valeur absolue* d'un élément $\alpha \in K$, notée $|\alpha|$, une norme sur cet espace vectoriel.

DÉFINITION : Un espace vectoriel sur un corps possédant une valeur absolue est appelé *espace de Banach* s'il est *normé et complet*.

COMPLÉTION D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ. — Tout espace vectoriel E possédant les propriétés précédentes, mais sans être complet, peut

toujours être plongé dans un espace $\widehat{E}$ de Banach.

En effet, soit $X = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ une suite de Cauchy dans E , c'est-à-dire, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer n tel que $\|x_h - x_k\| < \varepsilon$ pour tout $h \geq n, k \geq n$. Soit $Y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ une autre suite de Cauchy.

On pose ${}_a X = ({}_a x_1, \dots, {}_a x_n, \dots)$ pour $\alpha \in K$,

et $X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$.

On voit immédiatement que ${}_a X$ et $X + Y$ sont des suites de Cauchy, celles-ci forment donc un nouvel espace vectoriel sur K .

On a $\|x_h\| = \|x_h - x_k + x_k\| \leq \|x_h - x_k\| + \|x_k\|$, donc $\|x_h\| - \|x_k\| \leq \|x_h - x_k\| < \varepsilon$ si $h \geq n, k \geq n$.

De même, en échangeant x_h et x_k , on a :

$$\|x_k\| - \|x_h\| \leq \|x_k - x_h\| < \varepsilon.$$

La suite de nombres réels $\|x_1\|, \dots, \|x_n\|, \dots$ est donc une suite de Cauchy, c'est-à-dire elle converge vers un nombre réel ≥ 0 .

Nous posons $\|X\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

On aura $\|{}_a X\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|{}_a x_n\| = |\alpha| \|X\|$

et $\|X + Y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

Par contre, $\|X\| = 0$ n'entraîne pas $X = 0 = (0, \dots, 0, \dots)$, donc $\|X\|$ n'est pas une norme. En effet, soit ζ l'ensemble de toutes les suites $Z = (Z_1, \dots, Z_n, \dots)$, pour lesquelles $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Z_n\| = 0$. Ces suites sont

des suites de Cauchy et si $Z \in \zeta$ et $Z' \in \zeta$, on a ${}_a Z \in \zeta$ et $Z + Z' \in \zeta$; pour toutes ces suites, $\|Z\| = 0$. La relation $X \sim X'$ si $X' - X \in \zeta$ est une relation d'équivalence. Soit ξ la classe d'équivalence de X et η celle de Y . On posera ${}_a \xi =$ classe de ${}_a X$ et $\xi + \eta =$ classe de $X + Y$; ces opérations sont définies ainsi pour les classes et l'ensemble de ces classes constitue un espace vectoriel $\widehat{E}$. La classe ζ est l'élément 0 de $\widehat{E}$.

Si $X' \sim X$, on a $X' = X + Z$, donc $\|X'\| \leq \|X\|$, car $\|Z\| = 0$, de même $\|X\| \leq \|X'\|$, donc $\|X'\| = \|X\|$. Nous posons $\|\xi\| = \|X\| = \|X'\|$; $\|\xi\|$ est alors une norme; en effet, les propriétés 2 et 3 sont vérifiées et 1 également, car, si $\|\xi\| = 0$, on a $\|X\| = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $X \in \zeta$, donc $\xi = \zeta$.

Si $x \in E$, posons $\widehat{x} =$ classe de $(x, x, \dots, x, \dots)$, alors $\widehat{ax} = a \widehat{x}$ et $\widehat{x + y} = \widehat{x} + \widehat{y}$, il y a donc isomorphie de E avec un sous-espace de $\widehat{E}$; on identifie ce dernier sous-espace de $\widehat{E}$ avec E , de sorte que $\widehat{E}$ est un espace vectoriel normé contenant E .

Le procédé appliqué au corps K donne un espace vectoriel $\widehat{K}$ et on montre que $\widehat{K}$ est lui-même un corps. Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ est une suite de

Cauchy pour la valeur absolue de K , sa classe α est dans $\widehat{K}$. D'autre part, la suite $(\alpha_1 x, \dots, \alpha_n x, \dots)$ est alors une suite de Cauchy de E , donc sa classe appartient à $\widehat{E}$; on la notera $\alpha \cdot \widehat{x}$. On en déduit sans peine que $\widehat{E}$ est un espace vectoriel sur $\widehat{K}$.

L'espace vectoriel $\widehat{E}$ est *complet*. En effet, soit $(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ une suite de Cauchy de $\widehat{E}$, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que :

$$\|\xi_h - \xi_k\| < \varepsilon \quad \text{si } h \geq n \text{ et } k \geq n.$$

Soit $\xi_m =$ classe de X_m , avec $X_m = (x_{m,1}, \dots, x_{m,p}, \dots)$

On a $\|\xi_m - \widehat{x_{m,p}}\| = \lim_{q \rightarrow \infty} \|x_{m,q} - x_{m,p}\| \leq \varepsilon$ si $p \geq N_m$. Associons à

ξ_m l'élément $\widehat{y_m}$ tel que $y_m = x_{m,N_m}$, alors on aura $\|\xi_m - \widehat{y_m}\| \leq \varepsilon$ et, par suite :

$$\|\widehat{y_h} - \widehat{y_k}\| \leq \|\widehat{y_h} - \xi_h\| + \|\xi_h - \xi_k\| + \|\xi_k - \widehat{y_k}\| < 3\varepsilon$$

pour $h \geq n, k \geq n$. Or $\|\widehat{y_h} - \widehat{y_k}\| = \|y_h - y_k\|$,

la suite $Y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ est donc une suite de Cauchy de E , et si $\eta =$ classe de Y , on a :

$$\|\eta - \xi_m\| \leq \|\eta - \widehat{y_m}\| + \|\widehat{y_m} - \xi_m\|.$$

Mais $\|\eta - \widehat{y_m}\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|y_p - y_m\| \leq 3\varepsilon$ si $m \geq n$,

et $\|\widehat{y_m} - \xi_m\| \leq \varepsilon$, donc $\|\eta - \xi_m\| \leq 4\varepsilon$ si $m \geq n$;

ainsi, $\xi_m \rightarrow \eta$ et l'espace $\widehat{E}$ est complet.

Application : Considérons le corps Q des nombres rationnels. En cherchant toutes les valeurs absolues possibles sur Q , on trouve, d'une part la valeur absolue ordinaire, d'autre part la valeur absolue suivante :

Soit $p \geq 2$ un nombre premier fixe. Soit $r = \frac{u}{v}$ un nombre rationnel.

On peut mettre $\frac{u}{v}$ sous la forme $p^n \frac{u'}{v'}$, où u' et v' ne sont plus divisibles par p et où n est un exposant entier positif, nul ou négatif. On pose

$|r|_p = \frac{1}{p^n}$ et on vérifie sans peine que l'on a bien une valeur absolue.

En complétant Q par rapport à la valeur absolue ordinaire, on obtient R . En complétant Q par rapport à la valeur absolue $|r|_p$, on définit un nouveau corps complet R_p sur lequel on peut construire une analyse qui permet d'atteindre des résultats impossibles à obtenir par l'analyse sur les nombres réels.

II. ESSAIS

TENDANCES DES MATHÉMATIQUES MODERNES*

par Laurent SCHWARTZ
Professeur à la Sorbonne

Les Mathématiques sont la plus abstraite des sciences et en même temps la plus indépendante du monde extérieur et de la vie courante ; aussi est-il pratiquement impossible de parler des Mathématiques modernes à des non-mathématiciens. Il n'y a pas d'ouvrages de vulgarisation mathématique comme il y en a pour la physique, la chimie, la biologie ; les livres d'histoire des Mathématiques portent avant tout sur les Mathématiques de l'Antiquité. Il est toutefois possible, et c'est ce que j'essaierai de faire ici, d'indiquer certaines tendances générales de la Mathématique actuelle.

Les fondements des Mathématiques

Tout d'abord, les Mathématiques se sont émancipées, de façon, semble-t-il, définitive, de l'espèce de « physique expérimentale » qu'elles constituaient autrefois. Des générations de géomètres, depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours, ont étudié la géométrie plane, en croyant être rigoureux, alors qu'ils n'avaient jamais défini la droite, le plan, les distances, les angles, l'égalité des figures, l'orientation, etc... Il est pourtant évident que si l'on définit la droite comme une ligne dont un fil tendu donne une bonne image, on fait de la physique et non des Mathématiques, et qu'on ne peut pas espérer raisonnablement démontrer une propriété quelconque de cette droite. Le mot « droite » rendait d'ailleurs possibles toutes les illusions ; une figure qu'on a eu l'imprudence d'appeler « droite » ne peut plus « raisonnablement » ne pas posséder toutes les propriétés que nous voyons aux lignes droites dans notre univers, et il deviendra impossible de savoir ce qu'il faut ou ne faut pas démontrer, ce qui est démontrable et ne l'est pas, etc... Ce point de vue de physicien est aujourd'hui complètement abandonné. Le physicien doit trouver les lois de notre monde par l'expérience, le mathématicien doit poser en principe un certain nombre d'axiomes qui sont, en quelque sorte, les règles du jeu qu'il va utiliser ; de ces axiomes il déduira des théorèmes, par des démonstrations rigoureuses. Ainsi le joueur d'échec pose au départ les règles du jeu d'échec, parfaitement arbitraires et indémonstrables ; ces règles posées, il pourra jouer correctement la partie ; de même, le géomètre dira que le plan est un ensemble dont les éléments sont appelés points dans lequel il y a des sous-ensembles appelés droites vérifiant certaines propriétés (parmi lesquelles : par deux points distincts passe une droite et une seule), etc... L'énoncé des axiomes de la géométrie est assez long ; plusieurs de ces axiomes sont couramment considérés dans l'Enseignement Secondaire comme des théorèmes qu'il faut démontrer et pour cela on « découpe » un triangle avec des « ciseaux » pour le porter ailleurs, on « plie » la feuille de papier en deux, alors que les Mathématiques ne connaissent évidemment ni ciseau, ni papier ; l'un de ces axiomes est celui d'Euclide, sur les parallèles, qui ne mérite pas plus que les autres une place à part, de même qu'aux échecs les mouvements du cheval ne méritent pas plus une place à part que ceux du fou ou de la tour. On peut poser l'axiome d'Euclide et obtenir une géométrie eucli-

(*) Article publié dans le n° 107 (mai 1957) de *L'Ecole du Grand Paris*, organe du Syndicat de l'Enseignement de la Région Parisienne (F.E.N.) et reproduit ici avec l'aimable autorisation de l'auteur et des responsables du S.E.R.P.

diennne, ou poser son contraire, et obtenir des géométries non euclidiennes (comme on peut, avec les mêmes cartes et des règles différentes, jouer à la belote ou à la manille), mais tous les autres axiomes laissent de pareils choix et il existe une infinité de géométries possibles et d'ailleurs dignes d'intérêt ; il faut seulement que les axiomes ne soient pas contradictoires, c'est-à-dire qu'on ne puisse pas, à partir d'eux, démontrer à la fois une proposition et son contraire.

Cette axiomatisation de la géométrie date déjà du XIX^e siècle. Mais l'algèbre a suivi le même trajet ; les nombres réels (c'est-à-dire rationnels et irrationnels) ne sont plus des « données *a priori* », on les construit par déduction rigoureuse à partir des nombres rationnels, qui, eux-mêmes, se construisent à partir des nombres entiers. Les nombres entiers, eux-mêmes, ne sont plus des données de la nature, nécessaires au berger pour compter ses moutons, on les construit à partir des axiomes de la théorie des ensembles, c'est-à-dire des règles de la logique. Et ces règles de la logique enfin ne sont plus des absolus. Nous posons au début des Mathématiques les règles logiques dont nous nous servirons, ce sont les axiomes des Mathématiques en général. Nous aurions pu en poser d'autres : les Mathématiques, fondées sur d'autres règles de logique, ne seraient pas erronées, elles ont les mêmes droits à l'existence ; nous ne nous y intéressons que médiocrement, car elles sont trop loin de notre monde physique, mais c'est leur seul titre d'infériorité. Une école mathématique, dite intuitionniste, fait des Mathématiques où la règle du *tiers exclu* n'est pas utilisée : ils supposent que l'on n'a pas nécessairement une propriété ou sa négation, c'est-à-dire que la négation de la négation n'est pas nécessairement l'affirmation : pour eux, un nombre qui n'est pas irrationnel, n'est pas nécessairement rationnel. La Mathématique ainsi construite est extrêmement compliquée ; elle n'a, semble-t-il, que l'intérêt historique et démonstratif de donner un exemple d'une Mathématique cohérente fondée sur d'autres principes logiques que ceux de la vie courante.

La classification en Mathématiques. — Les structures

Les animaux et végétaux ont été autrefois classés d'après de vagues ressemblances extérieures. La baleine était un poisson puisqu'elle vivait dans l'eau, la chauve-souris un oiseau puisqu'elle volait. La classification zoologique et botanique repose aujourd'hui sur de toutes autres bases que l'habitat ou la couleur ; elle cherche un certain nombre de caractères fondamentaux, qui permettent de classer les êtres vivants, d'abord en embranchements, puis chaque embranchement en classes, chaque classe en ordres, puis ensuite en familles, genres, espèces. Un naturaliste même ignare trouvera tout de suite que telle plante exotique qu'il voit pour la première fois, fait partie de telle famille, voire de tel genre ; l'examen de quelques traits caractéristiques lui suffira.

De même, l'ancienne distinction en Mathématiques, entre algèbre, géométrie, analyse, arithmétique, a perdu beaucoup de sa valeur ou, tout au moins, beaucoup changé. Ce qui distingue l'ensemble des nombres entiers, dont l'étude a pu s'appeler l'arithmétique, de l'ensemble des points d'un plan, dont l'étude s'est appelée la géométrie, ce sont les *structures* que portent ces ensembles. Il y a un grand nombre de structures possibles, mais un nombre très limité de types de structures utilisables dans les Mathématiques courantes.

On dit qu'on a défini sur un ensemble E une *structure algébrique* si l'on a défini une loi de composition qui, à deux éléments quelconques x, y , de E , en fait correspondre un troisième noté $f(x, y)$. Si cette loi est associative [c'est-à-dire si

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)),$$

s'il existe un élément neutre e de E tel que $f(e, x) = f(x, e) = x$ pour tout x de E , et si tout élément x de E a un symétrique noté $s(x)$, tel que

$$f(x, s(x)) = f(s(x), x) = e,$$

on dit que E , muni de cette loi, est un groupe.

Par exemple, si E est l'ensemble R des nombres réels $\neq 0$, et si la loi de composition est la multiplication, $f(x, y) = xy$, E est un groupe ; ici $e = 1$, et

$$s(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

est l'inverse de x (on peut prendre comme loi la multiplication si E est l'ensemble de tous les nombres réels, y compris 0 , mais alors 0 n'a pas d'inverse et E n'est pas un groupe).

Si maintenant E est l'ensemble de tous les nombres réels, et si la loi de composition est l'addition, $f(x, y) = x + y$, E est un groupe, avec $e = 0$, et $s(x) = -x$, opposé de x .

Si alors nous considérons l'ensemble R des nombres réels, nous voyons qu'il y a une structure assez complexe ; il est muni d'une première loi de composition, l'addition, pour laquelle il est un groupe ; il est aussi muni d'une loi de multiplication, pour laquelle il n'est pas un groupe, mais si on lui retire 0 , élément neutre de l'addition, il devient un groupe pour la multiplication ; en outre, cette addition et cette multiplication ne sont pas arbitraires, elles sont commutatives, et reliées entre elles par certaines conditions (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $(x + y)z = xz + yz$) ; ces propriétés permettent de dire que l'ensemble R , muni de ces deux lois, est un *corps*. Les structures algébriques sont celles qui ne font intervenir que des lois de composition. Mais comme un même ensemble peut porter diverses lois de composition, agencées les unes aux autres de façon plus ou moins compliquée, on obtient des structures de plus en plus riches, dont il est possible de faire une classification détaillée, et qui portent des noms tels que groupe, anneau, module, corps, espace vectoriel, algèbre, algèbre de Lie, et parmi les anneaux, anneaux d'Artin, anneaux noethériens, etc... Le mathématicien qui, étudiant un anneau déterminé, reconnaîtra un anneau noethérien, en connaîtra tout de suite les propriétés fondamentales, et saura le type de méthodes à utiliser pour démontrer les théorèmes qui le préoccupent.

Une structure topologique est de nature tout à fait différente. Elle est introduite pour définir les suites convergentes. Une suite d'éléments $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de E sera dite convergente de limite x , si, quel que soit le voisinage V de x , il existe un entier $N(V)$ tel que x soit dans V pour $n > N(V)$, autrement dit si, à partir d'une certaine valeur de n tous les x_n sont dans V . Mais qu'entendons-nous par *voisinage* V de x ? Toute tentative de définir de tels voisinages *a priori* est vouée à l'échec, et précisément on dit que E est un *espace topologique* ou qu'il est muni d'une *structure topologique* si, pour chaque élément x de E , on s'est donné une collection de sous-ensembles de E , contenant x , appelés les voisinages de x ; ces collections ne sont pas arbitraires, mais presque, elles ne sont astreintes qu'à quelques conditions très simples (par exemple : l'intersection de deux voisinages de x doit être un voisinage de x). Il y a sur un ensemble E une infinité de topologies possibles, comme il y a une infinité de structures algébriques.

Sur l'ensemble R des nombres réels, on peut définir une topologie comme suit : un voisinage de x est un ensemble contenant au moins un intervalle non nul de centre x ; avec cette topologie, la convergence des suites est celle que tout le monde connaît en analyse classique. L'étude des structures topologiques permet aussi de classer les espaces suivant les propriétés de leur topologie : il y a des espaces discrets, compacts, localement compacts, connexes, localement connexes, simplement connexes, métrisables, etc... Sur l'ensemble R des nombres réels, nous avons à la fois une structure algébrique de corps, et une structure topologique ; ces deux structures sont reliées entre elles de façon très particulière, puisque la loi d'addition et la loi de multiplication sont continues pour la topologie (la limite d'une somme est la somme des limites la limite d'un produit le produit des limites) ; on dit que R est un *corps topologique*. En combinant ainsi des structures algébriques et topologiques et d'autres

encore, on obtient un grand nombre de structures qu'on peut encore classer par des noms tels que : espace vectoriel topologique, espace de Hilbert, variété différentiable, variété analytique, espace fibré, etc... Une équipe de mathématiciens, sous le nom de Nicolas Bourbaki, a entrepris une publication des Mathématiques à partir du début, suivant cette classification par structures. Il y a déjà dix-neuf fascicules parus, groupés en livres (Livre I : Théorie des ensembles ; Livre II : Algèbre ; Livre III : Topologie générale ; Livre IV : Fonctions d'une variable réelle ; Livre V : Espaces vectoriels topologiques ; Livre VI : Intégration, etc...). L'étude des nombres réels, utilisant à la fois les structures algébriques et topologiques, ne vient qu'au Livre III, après neuf fascicules, alors qu'autrefois la théorie des ensembles était intimement mêlée aux nombres réels. Par contre, le théorème de Pythagore et le développement d'une fonction périodique en série de Fourier sont reliés aux mêmes propriétés des espaces de Hilbert. Naturellement, une telle architecture des Mathématiques ne tient absolument pas compte de la pédagogie ; mais un traité de zoologie étudiera d'abord les êtres unicellulaires, puis les êtres de plus en plus compliqués depuis les éponges jusqu'à l'homme qui, lui aussi, viendra tard parce que sa structure est très compliquée. Devant un problème quelconque, le mathématicien un peu averti verra immédiatement de quelles structures il s'agit, où se place son problème dans l'architecture des Mathématiques, quelles méthodes sont utiles pour le résoudre. Naturellement tous les problèmes ne sont pas pour cela résolus mais bien simplifiés. Les Mathématiques modernes sont devenues très abstraites, les physiciens ne s'y reconnaissent plus, on ne s'y reconnaît plus toujours d'une génération à la suivante, mais les jeunes générations y sont très à leur aise. Et surtout les Mathématiques ont acquis une unité qu'elles n'avaient pas avant.

L. S.

SUR LA PÉDAGOGIE DE L'INITIATION A LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU 1^{er} ORDRE

par V. KOURGANOFF

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille

1^o INTRODUCTION.

On commence à comprendre un peu partout qu'en France on abuse de l'enseignement abstrait et déductif des Mathématiques. Après avoir été dédaignées comme « impures », les Mathématiques appliquées commencent à reprendre la haute estime où les tenaient des mathématiciens aussi distingués que CAUCHY ou EULER. L'usage des machines électroniques conduit continuellement au remplacement des méthodes analytiques par des méthodes faisant intervenir des « ordonnées discrètes » et des « différences finies ».

Il nous a donc semblé opportun d'attirer l'attention des professeurs de Mathématiques Spéciales, de M.P.C., de Mathématiques générales et peut-être même de Calcul différentiel, sur les multiples avantages que présenterait, du point de vue pédagogique, le remplacement de la méthode « traditionnelle » de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre, par une méthode qui, tout en se rapprochant de celles, très anciennes, employées par les créateurs du calcul différentiel, placerait d'emblée les étudiants dans le climat des Mathématiques appliquées modernes.

La résolution des équations linéaires du premier ordre représente généralement le premier contact des étudiants avec les équations différentielles, on comprend donc combien il est regrettable que ce premier contact se fasse sous le signe de l'*artifice* le plus arbitraire. Car, quand on fait le grand effort nécessaire pour s'affranchir de la fausse évidence qu'engendrent l'habitude et la tradition, ou quand on consulte les jeunes sur leur réaction devant l'enseignement traditionnel, on est frappé du caractère artificiel de la méthode qui consiste à chercher d'abord la solution de l'équation « privée de son second membre », puis une solution *particulière* de l'équation « complète », et cela en faisant « varier la constante » de la solution générale de l'équation homogène.

Voici les critiques que l'on peut formuler au sujet de cette méthode. Elle viole d'abord l'essence de l'esprit de la recherche mathématique, tel que l'ont défini H. POINCARÉ et J. HADAMARD [1], [2], en réduisant l'étudiant au rôle passif de celui qui constate que toutes les transformations représentent une suite de syllogismes corrects, au lieu de lui révéler le « pourquoi » de ces transformations. Elle confirme l'étudiant dans l'idée fausse qu'une intégrale est avant tout une primitive (1), et ne peut être « devinée » que lorsqu'on connaît la « formule » correspondante ; idée qui se prolonge par la conception, non moins pernicieuse suivant laquelle on ne sait résoudre que celles des équations différentielles pour lesquelles l'artifice « résolvant » a déjà été trouvé. Enfin, sur un plan plus élevé, elle ne met pas suffisamment en évidence le fait, essentiel pour les applications concrètes, que la solution d'une équation

(1) Il est intéressant de remarquer, du point de vue historique, qu'à l'origine, le Calcul intégral était conçu essentiellement comme une évaluation des aires. Pendant longtemps, le lien entre ce problème et celui des dérivées, avait entièrement échappé aux inventeurs du calcul différentiel [3]. La réduction des intégrales aux primitives, œuvre de Newton et de Leibnitz, a évidemment constitué un énorme progrès. Mais cette grande idée a subi, comme c'est le sort de toutes les grandes idées, une sorte de *dégradation* progressive, dont la principale est celle que nous venons de signaler.

tion différentielle du premier ordre est une *fonctionnelle* de son « second membre ».

La méthode que nous proposons nous a été suggérée par la théorie physique du transfert du rayonnement (équivalente à la théorie de la diffusion des neutrons), mais il est évident qu'elle garde toutes ses vertus pédagogiques indépendamment de ce contexte physique particulier [4].

2° EXPOSÉ DE LA MÉTHODE.

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + f_1(x)y = f_2(x),$$

où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux fonctions données (dont on précisera plus ou moins les propriétés suivant le niveau de l'enseignement) et $y(x)$ la fonction inconnue.

L'interprétation physique générale la plus simple d'une fonction $y(x)$, qui satisfait à l'équation (1) est celle de l'intensité d'une grandeur qui *se propage* dans un milieu matériel stratifié en couches planes parallèles perpendiculaires à la direction Ox de propagation (fig. 1).

En effet, en considérant l'équation comme la limite de :

$$\Delta y = -f_1(x)y \Delta x + f_2(x) \Delta x,$$

ou encore

$$(2) \quad y(x + \Delta x) = y(x) [1 - f_1(x) \Delta x] + f_2(x) \Delta x,$$

on montre aux étudiants que l'équation (1) définit essentiellement l'intensité de la grandeur y au point $(x + \Delta x)$ à partir de son intensité au point x .

La forme (2) met en évidence une première propriété « physique » importante de l'équation (1), à savoir, le rôle important joué par la combinaison $f_1(x) \Delta x$, qui permet de définir « l'épaisseur efficace » ΔX des couches par la relation simple

$$(3) \quad \Delta X = f_1(x) \Delta x \quad (\text{ou } \frac{dX}{dx} = f_1(x)),$$

d'où la fonction $X(x)$ se déduit au moyen d'une quadrature.

Si l'on adopte X comme nouvelle variable, les propriétés du « milieu transmetteur » se simplifient et, en posant

$$(4) \quad y(x) = Y(X) \quad \text{et} \quad \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = B(X),$$

l'équation (2) prend la forme :

$$(5) \quad Y(X + \Delta X) = Y(X) [1 - \Delta X] + B(X) \Delta X,$$

ou encore, en introduisant le « facteur de réduction » r , au cours de la traversée de la couche ΔX :

$$(6) \quad r = 1 - \Delta X,$$

et, la fonction de « restitution » de la couche ΔX

$$(7) \quad R(X) = B(X) \Delta X ;$$

la relation

$$(8) \quad Y(X + \Delta X) = r \cdot Y(X) + R(X)$$

La signification physique générale de (8) est parfaitement claire : l'intensité de la grandeur étudiée, qui était $Y(X)$ à l'entrée de la couche $(X, X + \Delta X)$, a été « atténuée » dans le rapport r au cours de la traversée de (ΔX) (effets d'absorption, de freinage, d'amortissement, de dissipation, etc. .), tout en recevant une *contribution* (infinitement petite de l'ordre de ΔX) de la part du milieu, qui « restitue » une *partie* (fonction de X) de l'intensité prélevée.

Les phénomènes physiques deviennent encore plus clairs si nous revenons aux « différences finies » en numérotant .. $n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ les « couches » successives (fig. 1),

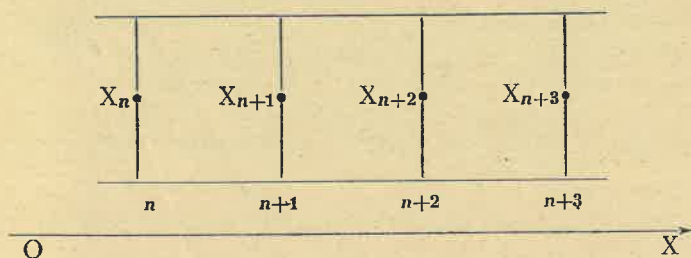


FIG. 1

La relation (8) prend alors la forme d'une *loi de récurrence* :

$$(9) \quad Y_{n+1} = r Y_n + R_{n+1}.$$

Ici on remarquera qu'on a posé R_{n+1} , au lieu de $R_{n+\frac{1}{2}}$, ce qui serait plus naturel, puisqu'il s'agit de la contribution de la couche *comprise* entre X_n et X_{n+1} . Mais en écrivant R_{n+1} on simplifie l'écriture, et il est encore légitime de considérer que la contribution de X ne se manifeste qu'à la *sortie*, c'est-à-dire sur la face X_{n+1} .

On remarquera également que l'intervention de la loi de récurrence (9) donne une des rares occasions (la seule peut-être) d'illustrer dans un contexte élémentaire, la profonde remarque de H. POINCARÉ, sur l'importance du raisonnement par récurrence en Mathématiques.

La relation (9) montre comment la grandeur se propage à travers une couche (X_n, X_{n+1}) , et il est évident désormais que la *solution du problème sera trouvée quand on aura trouvé l'effet de k couches successives*, où k est un entier quelconque.

Il suffit d'aller jusqu'à $k = 3$ (ici on notera le caractère *inductif* de la méthode, caractère particulièrement proche de l'esprit de recherche).

En remplaçant successivement n par $n + 1$ et $n + 2$, il vient d'abord :

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} r + R_{n+2},$$

$$Y_{n+3} = Y_{n+2} r + R_{n+3}.$$

En éliminant Y_{n+2} entre ces deux relations on a la « loi de propagation » pour $k = 2$:

$$(10) \quad Y_{n+3} = Y_{n+1} r^2 + (R_{n+2} r + R_{n+3}).$$

Et en éliminant Y_{n+1} entre (9) et (10) on a la « loi de propagation » pour $n = 3$, sous la forme :

$$(11) \quad Y_{n+3} = Y_n r^3 + (R_{n+1} r^2 + R_{n+2} r + R_{n+3}).$$

La loi « générale », pour k quelconque, s'induit immédiatement et s'écrit :

$$(12) \quad Y_{n+k} = Y_n r^k + \sum_{m=1}^k R_{n+m} r^{k-m}$$

Le problème est donc entièrement résolu en termes des « différences finies » — et la solution (12) est évidemment tout à fait classique pour les spécialistes de « l'alimentation » des machines électroniques modernes.

Mais ici nous pouvons faire un pas de plus (qui n'intéresse pas en général ceux qui opèrent sur les différences finies en vue du calcul purement numérique) et revenir à la forme analytique de la solution.

En effet, on a évidemment :

$$(13) \quad r^k = (1 - \Delta X)^k \approx 1 - k\Delta X \approx e^{k\Delta X} = e^{-(X-X_0)}$$

en se bornant aux termes du premier ordre, et en remarquant que

$$(14) \quad X_{n+k} - X_n = k \cdot \Delta X = X - X_0.$$

Par conséquent, la solution (12) devient, par un passage à la limite, physiquement évident :

$$(15) \quad Y(X) - Y(X_0) = Y(X_0)e^{-(X-X_0)} + \int_{X_0}^X B(t)e^{-(X-t)} dt$$

ou t désigne une valeur « courante » de X .

3° APPLICATIONS.

La forme (15) de la solution obtenue sans aucun artifice, permet de constater que la solution de l'équation différentielle proposée :

1) dépend de la valeur « initiale » (ou plus physiquement de la valeur « à la frontière ») $Y(X_0)$;

2) comprend le terme $Y(X_0) \cdot e^{-(X-X_0)}$ qu'on peut interpréter, *mathématiquement* comme la solution générale de l'équation

$$(16) \quad \frac{dY}{dX} - Y(X) = B(X),$$

privée de son second membre, qui pour $X = X_0$, se réduit à $Y(X_0)$; mais qui possède un sens physique beaucoup plus clair comme l'effet cumulé de toutes les « transmissions » partielles *lorsqu'on néglige les restitutions* $B(X)$;

3) comprend le terme $\int_{X_0}^X B(t)e^{-(X-t)} dt$ que l'on peut interpréter mathématiquement comme une solution *particulière* de l'équation complète de la forme

$$e^{-X} \varphi(X) \quad \text{où} \quad \varphi(X) = \int_{X_0}^X B(t)e^t dt,$$

c'est-à-dire, d'une forme obtenue en « faisant varier la constante » dans la solution générale Ce^{-X} de l'équation homogène.

On comprend maintenant pourquoi $e^{-X}\varphi(X)$ est une solution particulière : c'est celle qu'on obtient pour $Y(X_0) = 0$.

Mais on voit surtout :

a) Que le sens profond de

$$\int_{X_0}^X B(t)e^{-(X-t)} dt$$

est celui de l'effet cumulé de toutes les « restitutions » *atténuées* plus ou moins selon qu'elles ont leur siège à une distance $(X - t)$ plus ou moins grande du point X envisagé.

b) Que la solution (15) met en évidence le fait que $Y(X)$ est une *fonctionnelle* linéaire de $B(X)$, c'est-à-dire dépend linéairement de l'ensemble des valeurs que prend $B(X)$ dans le domaine d'intégration.

4° UNE VARIANTE DE LA MÉTHODE.

Une fois mis en évidence le caractère de *fonctionnelle* de $B(X)$ de la solution cherchée, il peut être instructif de retrouver la solution en utilisant uniquement comme point de départ ce caractère physiquement intuitif, si l'on songe que la solution doit être un agrégat linéaire de « restitutions » affectées de *poids* qui pourraient

dépendre de la profondeur ($X - t$) à laquelle s'opère la restitution. La solution comprendra de plus, évidemment, la partie relative à l'équation homogène ($B = 0$).

On posera alors :

$$(17) \quad Y(X) = Y_0 e^{-X} + \int_0^X B(t) \varphi(X - t) dt.$$

Ici, nous avons pris X_0 comme origine ($X_0 = 0$) pour simplifier l'écriture. Le problème est ici de trouver la fonction « poids » $\varphi(Z)$.

En utilisant la relation élémentaire de dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre dont elle dépend, et qui s'écrit ici :

$$(18) \quad \frac{d}{dX} \left[\int_0^X f(X, t) dt \right] = f(X, X) + \int_0^T \left(\frac{df}{dX} \right) dt,$$

on trouve immédiatement, en imposant à $\varphi(X - t)$ la condition $\varphi(0) = 1$ (physiquement évidente) que $\frac{d\varphi}{dZ} = -\varphi(Z)$ avec $Z = X - t$. D'où $\varphi(Z) = e^{-Z}$.

5° REMARQUE I.

Dans la théorie du transfert du rayonnement, il est d'usage courant [5], d'interpréter l'équation (15), obtenue par les méthodes traditionnelles, comme entièrement *intuitive*. Cette manière de voir nous paraît aussi artificielle, du point de vue physique, que la méthode traditionnelle l'est du point de vue mathématique. On voit difficilement, en effet, un étudiant, même très intelligent, écrivant d'emblée la solution (15) à partir de l'équation (16). Notre exposé fournit donc une *explication* utile aux vues « pseudo-intuitives » des spécialistes de la théorie du transfert.

6° REMARQUE II.

Nous n'ignorons pas que le caractère artificiel de la méthode traditionnelle est atténué quand on prend la précaution classique d'établir d'abord d'une manière générale que la connaissance d'une intégrale particulière permet de ramener certaines équations différentielles à une forme plus simple. Pourtant, même dans ce cas, le débutant reste dérouté par la dissymétrie du rôle que l'on fait jouer à la partie de la solution supposée connue (intégrale *particulière*) et celle qui reste à trouver (intégrale *générale* de l'équation homogène).

De plus, même quand on attire l'attention des débutants sur la généralité de la méthode qui consiste à utiliser des changements de fonction inconnue, il leur reste l'impression que la *forme* du changement de fonction doit être *devinée*.

Avant de terminer, nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à MM. J. KAMPE DE FERIET et M. DECUYPER, qui ont bien voulu relire notre manuscrit et nous faire plusieurs suggestions intéressantes.

V. K.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. POINCARÉ : *La Valeur de la Science*, Ed. Flammarion, p. 27.
- [2] J. HADAMARD : *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover Publ., Ed., 1954, p. 104.
- [3] J. HADAMARD : *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover Publ., Ed. 1954, p. 144.
- [4] V. KOURGANOFF : *Basic Methods in Transfer Problems*, Oxford Univ. Press, 1952.
- [5] A. UNFOLD : *Physik der Sternatmosphären*, 2^e Edit. (Springer, Berlin, 1955), p. 110.

A propos du produit vectoriel

M. GLAESER, chef de travaux à la Faculté des Sciences de Nancy, a bien voulu me signaler deux erreurs de raisonnement que j'ai commises dans mon article « Une définition axiomatique du produit vectoriel » (*Bulletin* 180, p. 127). Ces deux erreurs ne modifient d'ailleurs nullement mes conclusions, mais il est préférable de les rectifier.

1° J'ai donné une première démonstration A) du fait que $\vec{W}$, s'il existe, ne peut être dans le plan des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Mon raisonnement est faux, car les deux scalaires α et β que j'introduis peuvent *a priori* dépendre des deux vecteurs U et V eux-mêmes, alors que je les ai traités comme deux constantes.

Mais la démonstration B), qui utilise une rotation de π autour de la normale au plan des deux vecteurs, subsiste intégralement.

2° J'ai cru faire appel à la condition de continuité énoncée dans mon article sous le numéro 5. En réalité, cette condition n'intervient pas dans les raisonnements ; au surplus, elle est une conséquence des axiomes de linéarité et d'alternance.

En effet, soit :

$$\begin{aligned}\vec{U} &= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \\ \text{et} \quad \vec{V} &= X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}.\end{aligned}$$

On en déduit nécessairement :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = (YZ' - ZY')\vec{i} + (ZX' - XZ')\vec{j} + (XY' - YX')\vec{k},$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ désignant respectivement les produits vectoriels :

$$\vec{j} \wedge \vec{k}, \vec{k} \wedge \vec{i}, \vec{i} \wedge \vec{j}.$$

Les composantes du produit vectoriel, relativement aux nouveaux vecteurs de référence sont des fonctions bilinéaires des coordonnées des vecteurs donnés. Par suite, la continuité est bien réalisée.

La lettre de M. GLAESER contient par ailleurs des observations sur la nature du produit vectoriel, qui, je l'espère, pourront être soumises aux lecteurs du *Bulletin*.

Je remercie M. GLAESER de l'aimable attention qu'il a manifestée pour mon article ; cet article m'a été suggéré par une question posée aux examens oraux de l'Ecole Polytechnique.

M. WEBER,
professeur honoraire au Lycée Condorcet.

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

INTÉRÊT CULTUREL DE L'HISTOIRE DE LA TECHNIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES ADOLESCENTS (*)

Il y a trois ans, j'ai eu l'honneur, au Congrès qui s'est tenu à Jérusalem, de montrer l'intérêt culturel qui s'attache à l'emploi de la méthode historique dans l'enseignement des sciences physiques ; je n'ai eu aucun mérite à convaincre des historiens des sciences de la valeur éducative d'une telle méthode, puisque nous sommes tous d'accord ici avec A. COMTE qu'on « ne connaît pas complètement une science, tant qu'on n'en sait pas l'histoire ». Mon but était, en attirant l'attention sur ce point, de faire prendre des vœux capables, tôt ou tard, d'une réalisation pratique (1).

Aujourd'hui, je voudrais plus particulièrement insister sur l'histoire de la Technique, qui peut jouer un rôle analogue, et rechercher dans quelles limites elle peut être introduite dans l'Enseignement Secondaire, sous son aspect *humain*, donc éducatif. Ainsi comprise, elle serait alors, sous cette forme originale, un élément de culture générale.

N'oublions pas que nos élèves vont être jetés, en quittant le lycée, — qui les isole du monde pendant une longue durée de leur vie consciente — dans une société en évolution, hautement technicisée.

Une réflexion bien orientée sur l'histoire de la Technique semble pouvoir, jusqu'à un certain point, combattre quelque pessimisme juvénile et préparer l'adolescent à réagir sainement devant les difficultés variées et inattendues qui l'attendent ; c'est la forme de culture la plus directement liée à la vie moderne.

Pour comprendre et essayer de résoudre des problèmes concrets, et s'adapter plus facilement à un présent bien mouvant, ne faut-il pas avoir déjà une perspective éclairée sur les expériences du passé, c'est-à-dire connaître quelque peu l'histoire de la civilisation et du progrès humain liée à l'évolution de la science et de la technique, en ses diverses directions ?

La formation scientifique des adolescents doit donc, pour être valable, s'imprégner, à propos d'une leçon *précise*, de quelques notions historiques bien choisies ; il est possible sans grande perte de temps (mais il n'y a jamais temps perdu s'il y a eu motif à réflexion) d'attirer, à l'occasion, l'attention sur les causes qui ont pu favoriser ou entraver tel progrès technique (structure de la société, conditions démographiques, financières et économiques, d'une part ; tradition et routine, ou connaissance insuffisante, à l'époque, des lois naturelles d'autre part), puis, sur les répercussions sociales, voire politiques, qui ont pu en résulter. Enfin, c'est au cours de ces deux cents dernières années que la technique, qui ne fut d'abord qu'artisanale, est devenue « Science appliquée » ; il convient d'en dessiner la physionomie caractérisée par une évolution accélérée de la « civilisation industrielle » que nous vivons. Pourquoi cette accélération ? parce qu'il y a égale accélération, depuis deux siècles, de la science pure sur laquelle la technique s'appuie de plus en plus, illustrant cette phrase écrite, dès le *xvi^e* siècle par F. BACON, « Savoir, c'est pouvoir ». Et, si PÉGUY a pu dire de DESCARTES « qu'il conduit sa pensée comme une action », aujourd'hui plus que jamais, la pensée se déroule dans l'action.

Enfin, autre motif de réflexion, et aussi objet d'inquiétude et de discussion pour beaucoup : à quelles fins doit viser la science appliquée ? La réponse n'appartient pas au fief d'un seul éducateur, mais de tous, qui doivent placer l'adolescent devant la responsabilité morale, civique et internationale qu'entraîne le développement actuel de la puissance technique.

(*) Communication au VIII^e Congrès International d'Histoire des Sciences (Florence, septembre 1956).

(1) Actes du VII^e Congrès international d'Histoire des Sciences, page 62, Résolutions.

Alors, l'histoire de la Technique devient une source d'enrichissement pour la pensée, en même temps qu'elle complète l'éducation des jeunes dans le domaine du concret. J'ajouterai que l'aspect historique d'une question a l'avantage de la rendre plus vivante, il en supprime le caractère dogmatique et utilitaire, tel qu'il ressort trop souvent de leçons faites à nos élèves entre 14 et 18 ans.

*
**

Mais comment, pratiquement, faire place à cette étude ? Deux moyens me semblent particulièrement efficaces.

D'abord, en classe, nous avons déjà suffisamment indiqué, pour ne pas insister davantage, la possibilité de procéder par allusions au cours d'une leçon, à l'occasion de certains sujets ; la leçon gagne en intérêt, et le professeur aux yeux des élèves n'apparaît plus toujours enfermé dans une étroite spécialité, il n'en est que plus écouté et plus respecté.

Le thème le plus fréquent sera sans doute celui de l'influence réciproque Technique-Science pure ; d'ailleurs, l'épistémologie scientifique ne peut plus maintenant négliger la technique. Les exemples de répercussion de l'une sur l'autre abondent ; citons, au hasard, les applications pratiques des connaissances théoriques acquises en chimie (vêtements, produits pharmaceutiques et de beauté, agriculture, matériaux de synthèse en tous genres...) ; celles chaque jour plus nombreuses d'une science cependant bien jeune : l'électronique ; la mécanique ondulatoire elle-même a déjà donné lieu à des applications concrètes, et l'on ne compte plus les applications médicales et industrielles des radioisotopes.

Inversement il est banal de rappeler que le technicien stimule les recherches du biologiste et du physicien, et celui-ci du mathématicien. Est-ce que ce ne sont pas des problèmes posés par l'industrie qui ont orienté PASTEUR vers l'étude des maladies ?

L'invention technique est donc *collective* : de tout temps, d'ailleurs, il ne semble pas qu'une invention soit jamais apparue brusquement sous sa forme définitive. Pour la plupart d'entre elles, son origine est souvent assez éloignée de son utilisation actuelle : la machine à vapeur est née, en Angleterre, du souci de pomper l'eau des galeries des mines.

Quelques dates au travers des siècles, quelques grands noms (sans oublier ceux des pionniers), mais surtout des idées, des bilans et l'évocation de quelques révolutions importantes — agissant même sur la pensée (2) —, suffiront à exciter et à entretenir un intérêt chez nos élèves pour la promotion de la Technique. Il conviendrait aussi de signaler le malaise (dont ils souffrent eux-mêmes inconsciemment) que crée une évolution trop rapide du progrès technique pendant que se transforme beaucoup plus lentement la structure sociale.

En résumé, un mot, une phrase, un court développement donné bien à propos sont souvent plus évocateurs que quelque long discours où se noie l'idée essentielle à mettre en relief.

Le second moyen, celui-ci de choix, serait la création d'un *Club scientifique* qui fonctionne hors des heures de cours et qui ne réunit que des volontaires. Jouissant d'une entière liberté dans l'organisation du travail de groupe, il est possible de satisfaire les préoccupations dominantes de l'auditoire, en particulier en ce qui concerne le choix d'exposés, suivis de débats sur diverses questions. Ainsi les techniques modernes ont la grande faveur des jeunes, mais une technique locale peut aussi donner lieu à une recherche documentaire par équipe.

En alternance avec ces débats très fructueux, peuvent être tracées les grandes étapes de l'évolution de la Technique, c'est-à-dire des phases techniques de la civilisation, d'une importance capitale pour l'histoire de l'esprit humain. Là serait inté-

(2) Pensons à l'imprimerie et à ses conséquences, par exemple.

ressante, sinon indispensable, la collaboration des historiens qui précisément se préoccupent en ce moment d'introduire dans leur enseignement quelques chapitres sur le rôle, dans l'Histoire, de la science et de la technique, à côté de celui des lettres et des arts.

Voici, brièvement, pour terminer, l'essentiel d'un développement que je proposerais à l'attention de nos élèves, et qui devrait être accompagné d'une documentation qui peuvent nous fournir des *Musées*.

Passage assez rapide sur les techniques primitives nées du besoin qu'a l'homme de s'assurer de meilleures conditions de vie et de sécurité (avec l'aide du naturaliste), pour aborder la période historique marquée depuis l'antiquité jusqu'au XVIII^e siècle par *des progrès discontinus*, dont il est intéressant de souligner les causes. Après une phase brillante de mise au point qui se situe en Grèce entre le IX^e et le VII^e siècles avant Jésus-Christ, s'opposent Sparte, dédaigneuse du travail manuel, et Athènes, bien plus libérale ; ensuite, survient un arrêt de la civilisation causé par les désastres subis par les grandes cités helléniques. Mais au III^e siècle avant Jésus-Christ surgit la figure d'ARCHIMÈDE, savant et ingénieur, qu'on ne peut oublier. Deux siècles plus tard, l'essor technique a repris à Alexandrie, à Rome surtout, qui apprécie le talent des ingénieurs. Puis l'écroulement de l'empire romain, la poussée des Barbares, créent, à nouveau, une très longue période sans progrès appréciable. Les étapes de la technique et de l'histoire se conditionnent les unes les autres pour des raisons analogues que nous retrouvons à des siècles de distance.

Au Moyen Age, la technique se relève peu à peu pour retrouver un éclat particulier entre les XI^e et XIII^e siècles, puis au XV^e siècle, où la forme artisanale, encore à peu près indépendante de la science, qui doit surtout son essor à l'ingéniosité et à l'observation, réagit au contraire sur la science du moment.

Jusqu'à la Renaissance, les savants sont à la fois ingénieurs et techniciens : LÉONARD DE VINCI n'en est-il pas le plus brillant exemple ?

Le XVII^e siècle mérite un arrêt : DESCARTES et HUYGHENS affirment la valeur des techniques, et PASCAL, à l'époque, n'est-il pas un très habile expérimentateur ?

Le XVIII^e siècle, plus soucieux encore de la technique, construit d'admirables instruments scientifiques pour les savants (et aussi pour les Princes et les Rois), donne en France l'*Encyclopédie* « Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers », et l'Académie des Sciences récompense ceux qui apportent des solutions à des problèmes pratiques qu'elle met au concours ; ainsi LAVOISIER, à 23 ans, obtient un prix pour son mémoire sur « les différents moyens pour éclairer une grande ville ».

A cette époque, la Révolution industrielle est commencée en Angleterre, plus précocement qu'en France. Enfin, dès que la technique industrielle est devenue tributaire de la Science, nous assistons à un progrès *en chaîne*. Ce sont les grands travaux entrepris sur toute la planète, et les applications les plus surprenantes que les jeunes sont très avides de connaître (3).

N'oublions pas enfin que l'homme a toujours recherché de nouvelles sources d'énergie ; or, l'histoire passionnante de l'Énergie menée jusqu'à la dernière en date, l'énergie nucléaire, qui nous réserve bien des possibilités pratiques, et souhaitons pacifiques, encore à l'état de rêve, explique en grande partie l'histoire du monde : nos élèves ne peuvent pas l'ignorer.

Pour conclure, il nous semble donc indispensable que la jeunesse ne termine pas des études secondaires sans être instruite des réalités qui font honneur à l'intelligence de l'homme, et sache que l'avenir d'une nation réside dans son équipement technique, c'est-à-dire finalement dépend de la valeur de son capital scientifique en savants, en ingénieurs, en techniciens et en ouvriers spécialisés.

M. COURTIN, *Inspectrice de l'Académie de Paris*.

(3) Quel n'est pas l'étonnement des jeunes filles lorsqu'elles apprennent que, pour obtenir un remplissage parfait des boîtes de poudre de beauté, il est fait usage de radioéléments.

REMARQUES SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS, SUR L'INTRODUCTION DES CONIQUES ET SUR LES ÉQUIVALENCES CLASSIQUES

Partir d'une définition ou d'une autre des coniques n'aurait aucune importance si nos élèves étaient des êtres dominés par la logique. En fait, beaucoup d'entre eux accordent un rôle prépondérant à la première définition qu'ils voient mettre en œuvre, d'où l'existence de deux « écoles » parmi eux. En ce sens, les suggestions de la Commission des programmes marqueront un progrès sur les programmes actuels qui obligent les professeurs à prendre en quelque sorte parti entre des définitions planes qui se valent et ont toutes deux des exceptions gênantes.

En attendant que ces programmes voient le jour, on peut trouver intérêt à introduire deux définitions planes simultanément (cela a dû être proposé déjà), en commençant par établir une équivalence. Mais des spéculations sur des propriétés de tous les points du plan ne semblent-elles pas alors un peu gratuites aux élèves ?

Il m'a semblé que l'étude de diverses transformations fournissait un centre d'intérêt et une raison aux considérations qu'impose ce genre d'exposés (recherche de diverses constructions de points homologues, d'invariants...). Un avantage d'une telle entrée en matière est aussi de fournir — comme le voulait H. LEBESGUE — un fil directeur pour l'étude ultérieure des coniques (résolution de certains problèmes en transformant la conique en cercle et extensions de propriétés du cercle aux coniques).

J'ai pris deux transformations en exemple (transformations qui n'ont pu manquer d'être rencontrées par des collègues, peut-être nombreux). Je me serais limité à une seule, si elle n'avait le tort de ne pas servir pour la parabole. Par contre, elle frappe les élèves lorsqu'on obtient la construction des points d'intersection d'une conique à centre et d'une droite en ne traçant que trois droites.

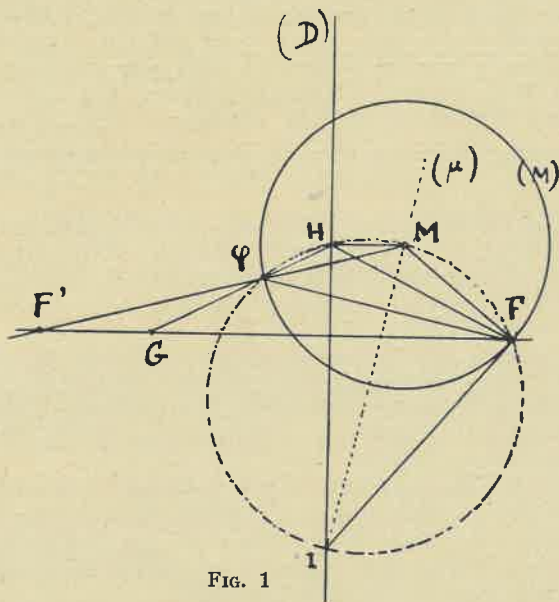


FIG. 1

Soient, dans un plan, une droite (D) et deux points F et G, symétriques par rapport à cette droite et distincts.

A tout point M du plan, se projetant en H sur la droite (D), on fait corres-

pondre le point φ tel que les triangles FHM et FG φ soient directement semblables (triangles éventuellement aplatis). φ est sur la droite GH puisque, (mod. π) :

$$(GF, GH) = (FH, FG) = (HF, HM).$$

La similitude directe de centre F transformant G en φ , transforme le triangle isocèle FGH et son axe de symétrie (D) en le triangle F φ M et la médiatrice (μ) de F φ . φ est sur le cercle (M) de centre M passant par F. Si M n'est pas sur la droite FG, l'égalité des angles en M et H des triangles isocèles mentionnés entraîne que FMH φ sont sur un cercle et les bissectrices (D) et (μ) de ces angles (d'axes) passent par le point I, diamétralement opposé à M sur ce cercle et les droites IF et I φ sont tangentes à (M).

Notons maintenant que φ est sur le lieu (F') des points dont les distances à F et G sont dans le rapport $\frac{MF}{MH}$. Si $\frac{MF}{MH} = 1$, ce lieu (F'), se confond avec (D) et le

cercle (M) lui est tangent. Si $\frac{MF}{MH} \neq 1$ (F') est un cercle du faisceau $\mathcal{G}$ de cercles-points F et G. Montrons que (F') est encore tangent à (M). La question ne se pose que si M n'est pas sur la droite FG et nous pouvons parler du cercle passant par FMH φ I. I a même puissance par rapport au cercle (M), au cercle-point F et au cercle (F') du faisceau $\mathcal{G}$ d'axe radical (D). L'axe radical des cercles (F') et (M) est donc φ I, comme il est tangent à l'un des cercles, les deux cercles sont tangents en φ . Ainsi, sans aucune exception, le cercle de centre M passant par F est tangent en φ à (F'), lieu des points dont les distances à F et G sont dans le rapport $\frac{MF}{MH}$.

On déduirait de la situation de ces divers éléments des constructions diverses liées à la correspondance ($M \rightarrow \varphi$). Mais, à ce stade, se pose assez naturellement la question de la correspondance de certaines propriétés du cercle (M) et du rapport $\frac{MF}{MH}$.

Soit un nombre positif e :

1° Si $\frac{MF}{MH} = e$, le cercle (M) est tangent au lieu (F') des points dont les distances à F et G sont dans le rapport e .

2° Si $\frac{MF}{MH} > e$, le cercle (M) passe par le point φ tel que FG φ soit directement semblable à FHM, donc point tel que $\frac{\varphi F}{\varphi G} > e$. Si l'on considère les deux régions séparées dans le plan par le lieu (F') déterminé au 1°, φ et G sont dans une région et le point F dans l'autre. Le cercle (M) passant par F et φ coupe donc nécessairement (F').

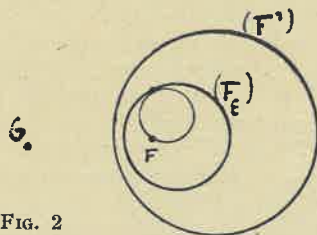


FIG. 2

3° Si $\frac{MF}{MH} < e$, désignons par ϵ ce rapport $\frac{MF}{MH}$. Le cercle (M) est tangent au

lieu (F_ϵ) des points dont les distances à F et G sont dans le rapport ϵ . Considérons les deux régions séparées dans le plan par ce lieu. Puisque $e > \epsilon$, le lieu (F') et le point G sont dans l'une de ces régions et F dans l'autre. Le cercle (M), passant par F et tangent à (F_ϵ), n'a donc aucun point commun avec (F').

En résumé, les hypothèses $\frac{MF}{MH} = e$, $\frac{MF}{MH} > e$, $\frac{MF}{MH} < e$ impliquent respectivement (M) tangent à (F'), (M) sécant à (F'), (M) sans point commun avec (F'). Ces hypothèses épuisant toutes les possibilités, les réciproques sont vraies.

En particulier, il y a coïncidence du lieu des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ et du lieu des centres de cercles passant par F tangents à (F').

(F') est déduit du système de données [F, (D), e] (assujetties aux restrictions : F non situé sur (D), $e > 0$) par la condition : (F') est lieu des points dont les distances à F et G sont dans le rapport e . Obtient-on ainsi tous les systèmes [F, (F')] formés par un point F donné et un cercle (F') donné ?

Soit un tel système [F, (F')]. (D), s'il existe, est nécessairement axe radical de (F') et du cercle-point F. (D) n'existe donc pas si F est centre de (F') et (D) ne convient pas si F est sur (F'). Ces cas écartés, G est nécessairement le symétrique de F par rapport à (D) et e est le rapport des distances d'un point quelconque de (F') à F et à G (on en tire aisément $e = \frac{c}{a}$, avec les notations usuelles). Il est alors clair que [F, (F')] se déduit du système [F, (D), e] qu'on vient de déterminer par les règles énoncées plus haut.

Avec les restrictions faites sur les systèmes [F, (D), e] et [F, (F')] on a établi l'équivalence des propriétés mises en correspondance plus haut, relatives au cercle (M) et au rapport $\frac{MF}{MH}$ et, en particulier, une double définition d'une famille de courbes Γ (e variant seul) qui peut être transformée en un faisceau de cercles.

Après avoir étudié les courbes Γ suivant les méthodes usuelles, on pourra revenir utilement sur la correspondance [$M \rightarrow \varphi$], à titre d'exercice.

Lorsque $\frac{MF}{MH} = c \neq 1$ et que φ décrit un cercle (F'), la correspondance [$M \rightarrow \varphi$] peut être définie autrement. L'homothétie de centre M, qui transforme φ en F' , transforme (D) en une droite fixe (D') (car H est transformé en H' et $\overline{MH} = \overline{GF'}$). Cette nouvelle loi, déterminée à partir des données F, (D), (D'), peut être appliquée à tous les points du plan. Elle donne une nouvelle correspondance ($\mathcal{H}$) telle que, lorsque M décrit une droite, φ décrit une droite et réciproquement (inutile de parler d'homologie, des considérations simples basées sur l'homothétie suffisent). On arrive aisément à constater qu'on peut définir cette correspondance ($\mathcal{H}$) par les conditions :

- une droite correspond à une droite et réciproquement ;
- le point F' et les points de (D) sont points doubles ;
- quand φ est en F, M est en O milieu de FF' .

De sorte que ($\mathcal{H}$) donne lieu à des constructions par la règle analogues à celles que les élèves rencontrent dans la correspondance rabattement-projection orthogonale. Une conique Γ est transformée en son cercle directeur et, en particulier, le problème de l'intersection d'une conique avec une droite Δ se réduit au tracé de trois droites :

Si Δ coupe (D) en P et (D') en P' , si la parallèle à $F'P'$ menée par P coupe le cercle directeur (F') en φ' et φ'' , les points d'intersection de Γ avec Δ sont les points où Δ est coupée par les droites $F\varphi'$ et $F\varphi''$.

Enfin, grâce à ($\mathcal{H}$) la théorie des polaires et pôles s'étend immédiatement aux coniques à centre en partant d'une des définitions des points conjugués par rapport à un cercle : sommets opposés d'un quadrilatère complet qui a ses quatre autres sommets sur le cercle.

F. VIVIEN (Nice).

TRAVAUX DIRIGÉS OU TRAVAUX PRATIQUES

Tous les professeurs de Mathématiques se réjouissent de l'augmentation des horaires dans les classes du premier cycle par l'addition d'une heure (ou, seulement peut-être pour commencer d'une demi-heure) de travail dirigé par semaine et par demi-classe.

Mais, malgré tout ce qui a été dit et écrit sur ce sujet dans ces dix dernières années, on s'aperçoit que les expressions « travail dirigé » ou « travaux pratiques » ont chacune des significations diverses. C'est pourquoi nous croyons utile de rappeler ici, pour ceux de nos collègues qui n'en ont pas l'expérience et pour les débutants, ce qui a été institué dans les classes nouvelles et continue à être réalisé dans les classes pilotes sous le nom de travail dirigé.

Bien des confusions sont créées par les *mots* : travaux *pratiques*, en faisant penser aux travaux pratiques de Physique, c'est-à-dire à des manipulations, avec appareils, mesures, graphiques, semble insister sur l'utilisation pratique des Mathématiques, en laissant dans l'ombre la nécessaire élaboration des notions abstraites ; travail *dirigé* évoque pour beaucoup l'idée d'une intervention autoritaire du professeur qui *montre* à l'élève ce qu'il doit faire, sans lui laisser l'initiative et la possibilité de commettre une erreur, tandis que, pour d'autres, il s'agit d'une sorte d'*étude surveillée* par le professeur qui contrôle le travail.

Les séances de travail dirigé peuvent revêtir des formes très différentes suivant les classes et les professeurs, mais, toujours, elles sont, pour les élèves, l'occasion d'apprendre à travailler. Nous trouvons, dans les Instructions officielles de 1938 :

« Il y a une façon de diriger le travail des élèves qui aura pour effet de leur épargner, dans toutes les disciplines, bien des efforts sans fruits ; c'est celle qui consiste à leur apprendre à travailler. Ce qui fatigue, c'est moins le travail intellectuel excessif que le travail mal fait, le travail sans méthode ; c'est le surcroît de besogne matérielle que s'impose vainement l'enfant qui ne sait pas régler et organiser matériellement son travail. Il convient que le professeur initie ses élèves à la technique du travail scolaire, qu'il leur en fasse faire sous sa direction et sous ses yeux l'apprentissage... »

De nombreux exemples pourront être trouvés dans les *Cahiers pédagogiques*, en particulier dans les numéros 1 et 2 de la 6^e année, qui sont en grande partie consacrés au Travail dirigé.

Nous nous bornons donc à indiquer ici sommairement, d'après l'expérience poursuivie depuis octobre 1945, les principaux résultats atteints grâce au travail dirigé et les conditions de son efficacité.

I. — RÉSULTATS

a) Apprentissage du travail par les élèves :

1. lecture et explication d'une page du livre, d'un énoncé de problème ;
2. recherche de la solution d'un problème ;
3. emploi des instruments ; mesures, constructions, graphiques ;
4. synthèse des notions acquises et associations d'idées en vue de la mémorisation, de la recherche ;
5. rédaction ;
6. exposé

b) Connaissance des élèves par le professeur, grâce à l'observation :

- i. de l'attitude de l'élève au travail : étude d'une leçon, recherche d'un problème et rédaction ,

2. de l'attitude de l'élève à l'interrogation : attention, étourderie, timidité, facilité d'expression.

c) *Connaissance de l'état de l'élève :*

1. découverte des questions mal comprises ou mal sues ; bien des échecs s'expliquent par le fait qu'un élève ayant « perdu pied » après avoir mal compris (ou n'avoir pas compris) pour des raisons diverses, il n'a pas été possible au professeur de s'en apercevoir assez vite pour y porter remède aussitôt ;

2) *individualisation du travail* : soit, retour sur les questions mal comprises ou mal sues ; soit, travail à un rythme plus rapide ou sur des problèmes plus difficiles suivant les aptitudes des élèves.

II. — CONDITIONS DU TRAVAIL DIRIGÉ

a) *Petit nombre d'élèves, donc :*

1. plus de liberté donnée aux élèves dans leurs rapports avec le professeur ;
2. facilités d'observation pour le professeur ;
3. possibilité de guider les élèves, s'il y a lieu, individuellement, ce qui suppose :

b) *Liberté et souplesse :*

1. grande liberté dans le choix des exercices et l'organisation de la séance de travail (ce qui ne signifie pas fantaisie ou laisser-aller) ;
2. adaptation constante à l'« état » des élèves (ce qui ne signifie pas improvisation, mais exige au contraire une sérieuse préparation).

Dans un prochain article, nous donnerons des comptes rendus de quelques séances de travail dirigé, non pour servir de modèles, mais pour rassurer ceux qui nous disent « n'avoir pas d'idées » sur ce sujet.

Il serait intéressant d'avoir des exemples aussi variés que possible ; aussi nous seront très reconnaissantes aux collègues expérimentés qui voudront bien nous en envoyer, et à tous ceux qui nous poseront des questions.

M. DIONOT, *professeur honoraire ;*

A. MARCHAND, *professeur au Lycée de Sèvres.*

Remarques sur les travaux pratiques de Mathématiques

Je voudrais insister sur l'appel par lequel nos Collègues, Mlles DIONOT et MARCHAND terminent leur article. Que l'expression employée soit « travail dirigé » ou « travaux pratiques », elle surprend encore bon nombre de Collègues qui, avec une modestie tout à fait exagérée, disent ne pas savoir comment organiser ces séances. Quelques exemples bien choisis et présentés par leurs auteurs les persuaderont qu'ils avaient pensé au « travail dirigé » bien avant que nous en parlions ici.

L'innovation que l'A.P.M. a souhaitée et que nous nous réjouissons de voir entrer dans la voie d'une réalisation progressive consiste à généraliser à *toutes* les classes, grâce à une amélioration de l'horaire, ce qui n'était possible que dans les classes les moins nombreuses et en particulier dans les classes pilotes. Au moment où le *Bulletin* est composé nous ignorons encore selon quelles modalités administratives ces séances seront organisées. Quoi qu'il en soit, nous pouvons et nous devons nous préoccuper de savoir comment nous les concevrons ; c'est une question que chacun de nous peut se poser, que chacun de nous résoudra à sa manière, une grande liberté de conception étant naturellement associée à la formule.

Nos Collègues, dans l'article ci-dessus, insistent justement sur l'*apprentissage de la recherche*. Au fond, c'est l'objectif n° 1 de tout notre enseignement, plus

préoccupé des méthodes que de connaissances accumulées sans ordre. J'avouerai que c'est même la raison pour laquelle je préfère l'expression « travaux pratiques » à celle de « travail dirigé », toutes considérations administratives mises à part (1). Je m'explique.

Dans nos classes normales, nous sommes soucieux d'obtenir une active participation des élèves à l'élaboration des notions, au développement des théories qui constituent *le cours*, aussi bien qu'à la solution des *exercices* qui servent d'exemples et permettent de vérifier que la théorie générale a été bien comprise. J'imagine que, parmi nous, il y a peu de partisans d'un enseignement dogmatique, et nous sommes certainement très nombreux à nous efforcer, — reconnaissons que ce n'est pas toujours facile —, d'être plutôt des « meneurs de jeu » que des « démonstrateurs en théorèmes ». La classe est, dans cette conception, une perpétuelle séance de travail dirigé (les effectifs trop lourds, les horaires ridiculement étriés, sont les principaux obstacles à une bonne application de cette pédagogie de l'action). Les séances spéciales de T.P. peuvent faciliter, pour chacun de nous, la mise au point effective d'une pédagogie de cette sorte, adaptée à notre tempérament personnel (« je ne sais pas si j'ai une pédagogie personnelle, mais j'ai certainement *ma* manière d'enseigner ») et, dans cette perspective, les T.P. sont donc utiles pour les professeurs. Mais, j'en arrive enfin à l'explication annoncée, *les T.P. permettront aux élèves de se poser des problèmes* : sans la préoccupation légitime du programme (qui est une limitation évidente à la liberté du travail en classe), avec la garantie, cependant, que la présence du maître éliminera les tentatives dangereuses, les élèves pourront se demander si, dans l'état de leurs connaissances, tel problème réel pourrait être étudié. Il arrivera sans doute que les problèmes ainsi posés seront souvent d'origine très concrète : questions de mécanique, de statistique, voire même de physique. Y a-t-il le moindre inconvénient à ce que l'étude mathématique prenne son départ dans le réel ? Je crois plutôt que les inconvénients sont dans le cas inverse, au moins au stade de l'enseignement élémentaire. Car il reste bien entendu que la motivation réelle de l'étude n'abolit pas la vocation du travail mathématique : analyse des faits, élaboration des notions suffisamment générales et par conséquent abstraites, utilisation des méthodes générales à l'étude de nouveaux problèmes réels. Les T.P., de façon modeste mais réelle, ne peuvent-ils donc pas placer nos élèves dans la condition même des hommes qui, bien avant Bourbaki, Hilbert et même Cauchy ou Descartes, se sont posé les problèmes que la nature et les besoins de la vie plaçaient devant eux ?

Y a-t-il le moindre inconvénient à ce que nos élèves voient de leurs yeux, touchent de leurs mains cette réalité complexe dont il faut dégager des notions claires et utiles ? Est-ce qu'il ne faut pas leur donner le goût de l'action et même celui de l'audace ?

Est-ce qu'ils n'auront pas un goût plus vif pour l'étude des Mathématiques s'ils en perçoivent directement l'utilité pratique et en même temps s'ils en *vivent* le développement ? Perdront-ils le goût de la rigueur, l'aspiration à une rigueur de plus en plus fine, parce qu'ils auront mieux pris conscience que les Mathématiques sont une science de la nature ?

(1) D'un point de vue administratif, l'expression « T.P. » a des avantages évidents : 1. comme en Physique, le dédoublement des groupes supérieurs à 24 élèves est de droit ; 2. les T.P. existent dans les classes de Mathématiques Supérieures ou Spéciales, ils peuvent donc être généralisés de la Sixième à Mathématiques ; 3. les T.P. de Physique étant maintenant bien établis (le mérite en revient, je crois bien, à l'*Union des Physiciens*), des salles spécialement aménagées sont prévues à cet effet ; pourquoi n'en serait-il pas un jour de même pour *tout* l'enseignement des Mathématiques ? (Les T.P. de Mathématiques poseront, de façon plus évidente, la question du matériel d'enseignement).

Mieux que ces considérations générales, il faudrait donner des exemples. En voici quelques ébauches.

1. *Identification des constellations* : cela suppose qu'on dispose d'une carte du ciel. Est-elle construite comme une carte géographique ? Que signifie l'échelle ? Comment dessiner ce qu'on observe ? Comment mesurer les angles (principe de l'arbalétrille) ? Angle au centre et arc. Ces questions sont-elles hors de portée des élèves de Quatrième ?

2. *Mouvement des roues d'une locomotive à vapeur* : composition des mouvements de translation et de rotation ; problème de la bielle et propriétés du parallélogramme. Développement du problème très variable selon les niveaux, de la Quatrième à Mathématiques.

3. *Longueur du sillon d'un disque microsillon* : forme du sillon, notion de spirale, recherche des spirales dans la nature ; problème de la longueur, approximation (ensemble de cercles concentriques), exemple de progression arithmétique. Problème accessible à des élèves de Cinquième.

4. *Construction d'une maquette* (en classe de Troisième) : rapport de réduction des longueurs ; rapport des aires, des volumes, des poids ; aperçu sur l'aéromodélisme.

5. *Elaboration d'une statistique locale* : sur la population du lycée ou de la ville ; organisation de l'enquête ; méthodes de dépouillement ; présentation des résultats ; calcul de moyennes ; interprétation des résultats.

Répétons, pour finir, que les exemples ci-dessus n'ont pas d'autre prétention que d'amorcer d'autres envois et de susciter les observations. Je ne souhaite rien tant que les critiques, persuadé que les T.P. me permettront d'apprendre beaucoup sur les Mathématiques elles-mêmes et sur leur enseignement.

G. W.

« QUAND L'AIR ÉTAIT PLUVIEUX »...

«...Semblablement, ou alloient voir comment on tiroit les métaux, ou comment on fondoit l'artillerie, ou alloient veoir les lapidaires, orfèvres et tailleurs de pierreries, ou les alchymistes et monoyeurs, ou les haultelissiers, les tissotiers, les velotiers, les horologiers, miralliers, imprimeurs, organistes, tinturiers et autres telles sortes d'ouvriers, et, partout donnans le vin, aprenoient et considéroient l'industrie et invention des mestiers. »

RABELAIS (*Gargantua*, XXIV).

Projet d'organisation d'Ecoles scientifiques d'été destinées à préparer des bacheliers première partie à entrer dans les sections scientifiques de la deuxième partie du baccalauréat.

1. INTRODUCTION. — Les élèves du Second Degré doivent être orientés vers les études scientifiques en nombre de plus en plus grand. Il y a là une exigence impérieuse qui tient autant à la réalité de la culture de notre temps qu'aux nécessités présentes de la vie sociale. Dans cet esprit des classes de Mathématiques, réservées à des bacheliers de philosophie désirant préparer le baccalauréat de Mathématiques ont été ouvertes pendant l'année scolaire 1956-57 ; il faut souhaiter la poursuite et l'extension de cette expérience.

Le présent rapport a pour but, dans la même perspective, de montrer qu'il serait possible de favoriser l'entrée en classe de Mathématiques d'élèves récemment reçus

au baccalauréat première partie, en particulier ceux des sections dites littéraires. En fait un trop grand nombre d'élèves de Première, faute de pouvoir atteindre le niveau désirable pour suivre utilement une classe de Mathématiques, sont écartés des études scientifiques (et cela se produit même pour des élèves de la section moderne). Ou bien, si, courageusement, ils entreprennent ces études, l'insuffisance de leur formation leur est un lourd handicap et ils risquent ensuite, ou de redoubler la classe de Mathématiques (ce qui alourdit les effectifs scolaires et accentue encore les inconvénients provoqués par la pénurie de professeurs), ou d'abandonner avant terme des études trop difficiles pour eux.

Le vrai remède à cet état de chose réside, il n'en faut pas douter, dans le développement, tout au long de la scolarité normale, d'études scientifiques assez approfondies pour être réellement attrayantes. On ne répétera jamais assez que c'est en faisant étudier les sciences (et d'une façon assez vivante) qu'on développera les vocations scientifiques. Et il faudra donc bien qu'un jour le baccalauréat première partie consacre cette orientation par l'organisation de véritables options scientifiques.

Cependant, dans l'immédiat et pour aller au plus pressé, un effort doit être tenté pour faciliter l'orientation vers les sciences de certains bacheliers première partie encore hésitants sur le choix de leur carrière, et rendre par conséquent moins difficile leur adaptation à la classe de Mathématiques.

Le présent projet, sans prétendre apporter une réponse complète et définitive à ces exigences, se propose donc de préciser comment pourraient être organisées des *Ecoles scientifiques d'été* qui donneraient à des bacheliers première partie :

- un complément de connaissances de base indispensables ;
- un entraînement aux méthodes de recherche ;
- un aperçu de quelques réalisations scientifiques ou industrielles susceptible d'attirer l'attention des jeunes gens sur l'intérêt des études scientifiques.

2. PRINCIPES D'ORGANISATION. — Les cours d'une *Ecole scientifique d'été* (E.S.E.) durent quatre semaines complètes, au mois de septembre. Ils sont ouverts à des bacheliers première partie, garçons ou jeunes filles, reçus à la session de juin précédente, et qui désirent entrer en classe de Mathématiques d'un établissement de l'Enseignement public au 1^{er} octobre suivant.

Les cours consacrés exclusivement aux Mathématiques et aux Sciences physiques, occupent quatre matinées par semaine. Une journée complète est consacrée à des conférences spéciales et à des visites d'intérêt scientifique ou technique. Un week-end de repos de deux jours est réservé chaque semaine et permet aux élèves, de même que pendant les quatre après-midi libres, ou de faire du sport, ou de s'occuper librement.

Les élèves sont groupés par équipes de 24 au maximum ; le niveau des membres d'une équipe sera aussi homogène que possible, compte tenu des études antérieures de ses membres (équipe d'anciens élèves de A, d'anciens élèves de B, et même d'anciens élèves de Moderne ayant eu des difficultés en sciences).

L'enseignement sera donné sous forme active et moins pour accumuler des connaissances (le délai imparti aux études d'une E.S.E. est trop court) que pour donner de bonnes méthodes de travail, stimuler l'intérêt des élèves pour les études scientifiques. Une part importante des cours sera donc consacrée à la direction de travail ; il ne sera pas donné de travail à la maison. Par contre un travail personnel sera demandé aux élèves pour être remis en fin de session : il pourra être constitué par la rédaction d'une courte monographie sur un sujet de Mathématiques ou de Sciences physiques, aussi bien que par la réalisation d'un modèle de Mathématiques ou d'un appareil de physique. Un concours permettra de récompenser les meilleures réalisations, grâce à de nombreux prix (dont le montant pourra être couvert par des dons d'industriels, de grandes écoles ou des grands services nationalisés).

3. HORAIRE. — Pour septembre 1957 : du lundi 2 au vendredi 27 septembre.

Chaque semaine, cours de 8 heures à 12 heures, les lundi, mardi, jeudi et vendredi (4 fois 2 heures de Mathématiques ; 4 fois 2 heures de Physique).

La journée du mercredi serait consacrée à des conférences d'intérêt scientifique ou technique pour lesquelles toutes les équipes d'une E.S.E. seraient réunies. La conférence serait suivie ou précédée d'une visite préparée et expliquée (exemples : l'énergie atomique et Saclay, les récentes découvertes astronomiques et Meudon, rôle de la recherche dans l'industrie moderne et Renault, les Mathématiques modernes et l'industrie, les Mathématiques de l'ingénieur, etc...). « ...encore que icelle journée feust passér sans livres et lectures, poinct elle n'estait passée sans proffit », remarquait déjà le bon Ponocrates.

4. PROGRAMMES (pour les Mathématiques) :

— Révision de calcul numérique pratique ; opérations sur les nombres entiers, fractionnaires ou irrationnels ; utilisation (sans justification) de la table de logarithmes et de la règle à calcul.

— Calcul algébrique ; application de la formule du binôme.

— Vecteurs ; vecteurs équipollents ; somme vectorielle ; produit d'un vecteur par un scalaire ; théorème des projections.

— Coordonnées cartésiennes, construction de graphiques ; problèmes simples sur la géométrie analytique de la droite, résolution et discussion de systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré.

— Problèmes du second degré, fonction du second degré, notion de dérivée ; applications à des problèmes de cinématique.

— Mesure des angles ; fonctions circulaires, calcul direct et calcul inverse, usage des tables de valeurs naturelles. Utilisation de la trigonométrie dans des problèmes de géométrie pratique.

— Problèmes de constructions géométriques. Problèmes de mesure (longueurs, angles, aires et volumes).

— Révision des lieux géométriques classiques dans le plan et dans l'espace.

— Problèmes de géométrie sphérique.

— La méthode des projections.

N.-B. — 1° Le programme n'est, ni limitatif, ni impératif ; par entente entre les professeurs de Mathématiques et de Physique, l'ordre et le choix des matières enseignées est fixé en fonction du niveau moyen des élèves de l'équipe.

2° Des suggestions de programme seront demandées, pour les Sciences physiques, à l'Union des Physiciens.

Remarques sur l'organisation pratique : Le régime d'une E.S.E. serait calqué sur celui des cours de vacances fonctionnant dans les établissements publics ; même rétribution des professeurs volontaires.

Présenté au Ministre par le Bureau de l'A.P.M., ce projet a été agréé par le Directeur de l'Enseignement du Second Degré. Avis et observations de tous les Collègues intéressés par cette entreprise sont sollicités par le signataire.

Pour Ponocrates, G. W.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES SECTIONS LITTÉRAIRES

Dans le but de récupérer une partie des élèves qui abandonnent les études scientifiques à l'entrée en Seconde, éventuellement en vue d'un rattrapage possible au niveau Mathématiques Élémentaires et de donner à l'autre partie une idée plus saine de ce qu'est la science et de la préserver de la réactivité de défense des littéraires ignorants, on peut repenser l'enseignement des Mathématiques à l'intention des élèves de Seconde et Première AB, Philosophie et Sciences Expérimentales.

Les principes à suivre semblent se grouper en quatre parties :

1° Utiliser la plus grande maturité d'esprit due à l'âge et à la plus grande somme d'expériences de toutes natures, heureuses ou malheureuses, réussites ou insuccès. Cette maturité se complétant de la plus grande activité physique et mentale due à l'évolution physiologique.

2° Elargir la base expérimentale de l'enseignement des Mathématiques en donnant au mot et à l'idée d'expérience leur sens plein, c'est-à-dire depuis l'expérience physique concrète (balance...), jusqu'aux problèmes demandant de l'initiative et une activité réellement libre, avec échec possible accepté sans crainte. Nous avons la manie — pour gagner du temps soi-disant — de prévoir tous les menus incidents des vraies expériences, de trop guider les élèves et de les préserver de l'échec ; ce qui nous incite à le leur reprocher quand ils se trompent.

3° Appuyer davantage l'éducation scientifique sur le caractère en développant l'observation, en mettant en garde contre les idées préconçues, en acceptant et précisant l'intuition et en abandonnant les formulations axiomatiques. En insistant davantage sur la cohérence d'une démonstration, des hypothèses aux conclusions, aller et retour, que sur la cohérence générale d'ensemble de l'axiomatique.

4° Ne pas forcer la mémoire, dite « logique », en diminuant le nombre des règles techniques, en les rendant parfaitement claires en tant que moyen d'action sans trop chercher à les imprégner de logique formelle, même si cela conduit à un peu de dogmatisme.

A. Pour l'*algèbre* cela impose :

1° De reprendre les fractions numériques depuis l'expérimentation pratique de la définition même, jusqu'aux calculs avec et sur les fractions, celles-ci étant considérées comme opérateurs composés (multiplication par une fraction, division par une fraction, simplification, complication, comparaison, addition, soustraction et règles techniques de composition, produit et division de fractions).

2° Une étude systématique de la proportionnalité sous toutes ses formes utilitaires et sous toutes ses formes logiques :

a) rapport et coefficient avec lien direct avec le début du troisième livre de géométrie, pour former et aider le jeu de l'intuition figurative ;

b) rapports de grandeurs, de nombres ; définition de la division exacte comme opération inverse de la multiplication ;

c) représentation graphique de la fonction linéaire, pentes, calculs inverses ;

d) trigonométrie en liaison avec les rapports de configuration ;

e) calculs algébriques en liaison avec des calculs vrais de géométrie ; relations métriques.

3° Limitation du 2° aux exemples numériques. Il faut que les problèmes traités puissent représenter une expérimentation complète, conclue par des résultats numériques et portant sur des phénomènes véritables, géométriques ou physiques.

4° Trigonométrie. Arc généralisé par l'idée de tour comme unité d'angle. Pratique du théorème des projections. Formules d'addition. Transformations s'opposant fortement à l'idée de proportionnalité.

B. Pour la *géométrie* cela impose :

1° Le retour aux livres I et II, uniquement dans le but de développer l'esprit d'analyse, expérimentale ou méditative, qui est surtout une initiative patiente et calme dans l'examen de toutes les possibilités.

On lance les souvenirs à l'assaut de la situation inconnue et on cherche à ajuster l'un ou l'autre à ce qu'on a devant soi. Quant aux faits nouveaux, hors des souvenirs, ils ne peuvent être perçus que par une observation sincère, pure de toute idée préconçue. C'est ainsi que les élèves, en général, devant un problème, tournent en rond pendant quelques minutes et restent impuissants et mornes devant un mur apparemment sans fissure.

Il faut se limiter à des problèmes très simples où l'analyse reste diverse, ouverte devant un champ de possibilités large et fourni. Il faut, par ce moyen et à cette occasion, apprendre aux élèves à lutter, à lutter sans espoir, à recommencer malgré l'échec, à estimer et pratiquer l'effort gratuit.

2° Pour la *géométrie* dans l'espace, il faut apprendre à voir dans l'espace par expérimentation pratique et dessins réels. Quant au reste, il faut se limiter aux formules et à quelques controverses considérées surtout comme exercices de rhétorique.

De façon générale, aussi bien en *géométrie* plane que spatiale, il semble nécessaire d'éviter toute tentative de généralisation par algébrisation de la *géométrie* cherchant à affranchir de la diversité des cas de figure.

A un autre point de vue, signalons que l'idée d'expérimentation qui domine tout cet exposé doit être étendue jusqu'à sa base numérique : une expérimentation nombreuse fournit, non seulement une idée possible de la solution, mais une mine de contre-exemples précieux pour essayer les idées préconçues sympathiques ou simplement accidentelles.

A. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*).

NOUVEAUX PROJETS DE PROGRAMMES

Classe de Quatrième.

Algèbre

I. Définition des nombres relatifs (positifs, négatifs, nuls). Abscisse d'un point sur un axe. Vecteur. Relation de Chasles.

II. Opérations sur les nombres relatifs. Nombres inégaux. Extension aux nombres relatifs des propriétés des sommes, différences, produits, puissances, quotients, établies en Cinquième pour les nombres arithmétiques.

III. Expressions algébriques (calcul de la valeur numérique d'une expression algébrique).

IV. Monômes. Produit et quotient de deux monômes ; monômes semblables ; somme des monômes semblables.

V. Polynômes à une variable. Addition, soustraction. Produit d'un polynôme par un monôme. Mise en facteur. Produit de deux polynômes. Exemples simples de polynômes à deux variables.

VI. Identités remarquables. Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs.

VII. Applications aux fractions rationnelles.

VIII. Equations simples du premier degré à une inconnue, à coefficients numériques. Résolution de problèmes simples à l'aide de ces équations.

Géométrie

I. Révision du programme de Cinquième.

II. Droites parallèles. Angles avec une sécante. Angles à côtés parallèles. Angles à côtés perpendiculaires.

III. Somme des angles d'un triangle et d'un polygone convexe.

IV. Parallélogramme. Propriétés caractéristiques : rectangle, losange, carré.

V. Inégalités dans le triangle. Perpendiculaires et obliques.

VI. Intersection de droites et de cercles. Tangente. Positions relatives de deux cercles.

VII. Droites concourantes dans le triangle.

VIII. Construction de triangles. Cercle circonscrit. Cercles inscrit et exinscrits.

IX. Angle inscrit et angle au centre interceptant le même arc.

Classe de Troisième.

Compléments d'arithmétique

I. Rapport de deux nombres entiers, décimaux ou fractionnaires. Opérations sur ces rapports. Proportions. Nombres proportionnels.

II. Rapport de deux grandeurs de même espèce. Grandeurs proportionnelles.

III. Carré et racine carrée. Racine carrée approchée. Règle pratique d'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal avec une approximation donnée. Usage d'une table de carrés. Calculs simples sur les radicaux.

IV. Extension aux nombres relatifs de la notion de racine carrée. Formule $\sqrt{x^2} = |x|$.

Algèbre

I. Révision du calcul algébrique.

II. Equations et inéquations numériques du premier degré à une inconnue.

III. Equations simples se ramenant au premier degré.

IV. Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.

V. Problèmes conduisant à de telles équations.

VI. Exemples concrets conduisant à la notion de fonction. Représentation de ces fonctions à l'aide de graphiques. Variations et représentation graphique de la fonction linéaire à l'aide de papier quadrillé. Usage des graphiques pour la résolution des problèmes.

Géométrie

I. Exemples de théorèmes réciproques et de propriétés caractéristiques empruntés au programme de Quatrième.

II. Rapport de deux segments. Points divisant un segment dans un rapport donné.

III. Théorème de Thalès. Application à des constructions géométriques.

IV. Triangles semblables. Cas de similitude.

V. Relations numériques dans les triangles rectangles. Applications à des calculs de segments et à des constructions.

VI. Projections orthogonales.

Définition des lignes trigonométriques d'un angle aigu à l'aide du triangle rectangle, usage des tables de valeurs naturelles, calculs d'angles et de segments.

Construction par points de courbes représentant la variation du $\sin.$, du $\cos.$ et de la tang. d'un angle aigu.

VII. Polygones réguliers les plus simples inscrits dans un cercle. Construction avec règle et compas. Calcul des côtés.

VIII. Rappel des formules donnant l'aire du rectangle, du parallélogramme, du triangle.

Rappel de la formule donnant la longueur de la circonférence et l'aire du cercle. Aire d'un secteur circulaire.

IX. Notions sommaires de géométrie dans l'espace : notion de plan. Positions relatives de deux droites dans l'espace et de deux plans. Notion de plans parallèles. Intersection de deux plans parallèles avec un troisième.

Notion de droite perpendiculaire au plan et de plans perpendiculaires (les théorèmes d'existence ne seront pas établis, mais on en fera sentir la nécessité).

Application des relations métriques dans les triangles rectangles et des triangles semblables au calcul de certains éléments de polyèdres simples (diagonales de parallélépipèdes, hauteur de pyramides...). Aire latérale de ces polyèdres.

*
**

La notion de lieu géométrique peut être introduite par le professeur, mais les problèmes comportant la recherche d'un lieu géométrique sont au programme de Seconde.

Classe de Sciences Expérimentales.

Commentaire

L'ordre des questions inscrites au programme n'est pas impératif.

Ces questions, surtout en ce qui concerne les paragraphes III et IV, seront établies en vue des applications, ainsi qu'il est explicitement dit au paragraphe V.

Leur étude ne devra donc pas comporter les développements théoriques qui, malgré leur beauté et leur rigueur, pourraient rebuter des élèves dont certains peuvent venir des sections non scientifiques. Il est conseillé alors, plutôt que de donner des « démonstrations approximatives » de préciser clairement les résultats admis sans démonstration.

Les Mathématiques enseignées dans cette classe doivent être considérées comme outil (une réserve étant faite cependant pour l'arithmétique).

Le libellé du paragraphe V. est volontairement imprécis : le professeur, tenant compte du niveau de la classe, décidera de l'ampleur et du nombre des exercices qu'il peut faire étudier.

Arithmétique

I. Notion du nombre naturel (ou entier) liée au dénombrement des collections. Numération décimale. Autres systèmes de numération, changement de base. Définition et propriété des somme, différence, produit, puissance, quotient entier des nombres naturels. Théorie des opérations permettant de les trouver. Divisibilité. Recherche des caractères de divisibilité usuels : 2, 4, 5, 25, 3, 9, 11.

Preuve des opérations.

Diviseurs communs de deux ou plusieurs nombres : P.G.C.D. Nombres premiers entre eux. Nouveaux caractères de divisibilité. Multiples communs à deux ou plusieurs nombres, P.P.M.C.

Nombres premiers. Décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Application aux diviseurs et multiples.

II. Notion de fraction, liée à la notion de fraction de grandeur. Egalité et inégalité des fractions. Simplification. Fractions irréductibles. Réduction au même dénominateur.

Définition et propriétés des somme, différence, produit, puissance et quotient exact des fractions.

Fractions décimales et fractions convertibles en fractions décimales. Notion de nombre décimal. Opérations sur ces nombres.

Valeurs approchées d'un nombre à moins de $1/10^6$ près par défaut et par excès.

Application à la détermination d'un quotient à une approximation donnée. Erreur absolue. Erreur relative.

III. Notion de rapport (ou quotient exact) de deux nombres naturels, fractionnaires ou décimaux. Extension aux rapports des propriétés des fractions.

IV. Définition des arrangements, permutations, combinaisons, en vue des exercices de dénombrement. Probabilités simples. Notions très élémentaires de calcul statistique.

Binôme de Newton.

Trigonométrie

Rappel, contrôle et mise en ordre des questions fondamentales des programmes de Seconde et Première C.M.

Variation et représentation graphique des fonctions du type

$$x = a \cos (wt + \varphi) + x_0.$$

Formules de transformation en produit de la somme et de la différence de deux cosinus ou de deux sin., ou de deux tg.

Dérivés de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

Usage des tables de valeurs naturelles, des tables de logarithmes à cinq décimales et des règles à calculs.

Variation de fonctions trigonométriques.

Calcul vectoriel

Révision du cours de Seconde : vecteur libre, somme vectorielle ; produit d'un vecteur par un scalaire, rapport de deux vecteurs de même direction. Définition du produit scalaire et du produit vectoriel.

Composantes d'un vecteur.

Barycentre.

Fonctions vectorielles d'une variable. Dérivation vectorielle.

Algèbre

Fonction d'une variable, fonction monotone, fonction inverse.

Fonction dérivée (révision du cours de Première). Dérivée seconde.

Dérivées d'une somme, d'un produit, d'une puissance, d'un quotient, d'une racine carrée. Dérivée logarithmique.

Dérivée d'une fonction de fonction, de la fonction inverse.

Variation et représentation graphique de fonctions polynômes, rationnelles et irrationnelles simples.

Notion de différentielle, interprétation graphique, différentielle logarithmique.

Application aux calculs d'erreurs.

Primitives. Interprétation graphique.

Fonction $y = \operatorname{Log} x$; formule $\operatorname{Log} ab = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b$.

Logarithme décimal.

Suites arithmétique et géométrique. Questions de limites relatives à ces suites.

Fonction exponentielle $y = \exp x$. Formule $\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$.

Notation $y = e^x$. Dérivée.

Fonction $y = a^x$. Dérivée.

Usage d'exposants fractionnaires et négatifs. Dérivée de $y = x^n = e^{n \operatorname{Log} x}$

Usage du papier millimétrique et des graphiques.

Notion de géométrie analytique

Définition des coordonnées d'un point dans le plan et dans l'espace.

Application à l'étude de quelques courbes dont la connaissance sera utile dans des questions d'astronomie, de physique, de chimie et de sciences naturelles.

SUR UN PROJET DE LICENCE D'ENSEIGNEMENT ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Dans le rapport publié dans le *Bulletin* 184 (Cf. p. 308 et sq.), il a été insuffisamment précisé que le projet présenté émanait du groupe des professeurs de Mathématiques de l'Université de Paris. Depuis, le projet soumis à une large audience a été complété et il a été adopté sous sa nouvelle forme par la Commission de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Paris (3 avril 1957).

Contentons-nous de citer ici quelques passages du nouveau rapport, l'économie générale du projet n'étant pas altérée :

« Ce projet reprend dans ses grandes lignes un projet antérieur ; mais il inclut maintenant un programme de Mathématiques Générales.

Dans la rédaction des programmes, on a tenu compte, autant que possible, d'observations faites par des mathématiciens de diverses Universités ; toutefois, on n'a pu suivre toutes les suggestions, soit parce qu'elles s'opposaient entre elles, soit parce qu'elles n'étaient pas réalisables dans le cadre prévu par le Ministère, soit pour garantir une certaine unité de conception.

Il ne semble pas souhaitable que des programmes rigides soient imposés et appliqués dans toutes les Universités, ne serait-ce que pour sauvegarder l'indépendance des enseignants et permettre une adaptation et une évolution continue des enseignements. Notre but, en proposant des programmes détaillés, est donc surtout de préciser quels sont, d'après nous, les points importants dans un enseignement moderne de Mathématiques au niveau de la licence.

Pour éviter toute sclérose de l'enseignement, on pourrait envisager qu'une adaptation des méthodes et des programmes soit faite tous les cinq ans, en tenant compte des progrès et des besoins de la Science, et de la façon dont nos étudiants ont assimilé notre enseignement. »

Voici les indications essentielles données sur la propédeutique :

« Une année de Mathématiques Générales (6 heures de Mathématiques ; le projet de la Commission de Réforme prévoit également 3 heures de Physique ; notre Commission ne saurait donner son accord à ce nouvel enseignement avant d'en avoir examiné le programme, jusqu'ici inexistant).

Le programme de Mathématiques a été modifié et allégé (suppression de la mécanique et d'une grande partie de la géométrie) ; il a été conçu pour convenir à la fois aux futurs mathématiciens et aux futurs physiciens. »

Il comporte : « Notions générales d'algèbre. Algèbre linéaire et géométrie. Analyse. Applications pratiques (étude de courbes et surfaces, calcul numérique). »

D'autre part, l'unité de mécanique comporterait :

« Au premier semestre, 3 heures de mécanique rationnelle allégée ; au second semestre, une heure de mécanique (avec un peu de relativité restreinte), et 2 heures consacrées à un enseignement à options : mécanique des fluides, mécanique céleste, astronomie, probabilités, mécanique physique, équations différentielles et aux dérivées partielles simples de la physique, etc... (suivant les possibilités de la Faculté). »

Enfin, voici ce qui est précisé du certificat d'Analyse générale :

« Au delà de la licence d'enseignement existe un certificat d'Analyse générale. L'enseignement correspondant (3 heures annuelles) est un enseignement de base, et non spécialisé (s'opposant en cela aux actuels « certificats de diplômes »).

α) Les futurs chercheurs sont invités à passer ce nouveau certificat et un certificat spécialisé ; il est obligatoire pour les futurs docteurs.

β) Les candidats à l'agrégation peuvent passer au choix, en guise de diplôme, « Analyse générale » ou un certificat spécialisé. »

Je me contenterai, pour aujourd'hui, de livrer cette documentation complémentaire à la réflexion des Collègues.

G. W.

Le questionnaire de l'A.P.M.

Réponses à la question 184-1.

Je n'enseigne pas dans un lycée mixte. Mais j'enseigne depuis 1945 dans les Ecoles normales de Charleville, où j'ai eu, selon les années, des classes mixtes, des classes de filles et des classes de garçons (Seconde, Première, Sciences Expérimentales).

Je n'ai jamais éprouvé le besoin d'enseigner les Mathématiques de façons différentes aux filles et aux garçons. Je me demande de quelle nature sont les différences évoquées par la Collègue du Lycée de Toulouse. Je n'ai jamais noté de différences entre filles et garçons, globalement parlant, tant pour les résultats que pour les aptitudes.

J'ajoute que l'atmosphère de saine camaraderie que comportent les classes mixtes, si on sait la maintenir, crée une émulation très propice à l'enseignement.

P. JACQUEMIER (Charleville).

La phrase : « on n'enseigne pas les Mathématiques de la même façon aux filles et aux garçons », me paraît quelque peu exagérée.

A la lueur de mon expérience personnelle, le cours ne me semble pas devoir être différent pour l'un ou l'autre sexe. Ce qui est clair et précis pour l'un, l'est aussi pour l'autre. Ce qui est confus, ou trop subtil, ou trop rapide pour l'un, l'est généralement pour l'autre. Il faut, bien entendu, adapter sans cesse le cours aux réactions propres à l'auditoire. Mais ceci est éternellement vrai.

Que ces réactions soient parfois différentes d'un sexe à l'autre, je ne saurais le nier.

Le « garçon moyen » se satisfait de vues plus générales et plus hâtives en géométrie. Il peut aller plus vite en cette matière... mais reste alors superficiel. Il est remarquablement plus ouvert à la géométrie cotée, à la descriptive, que la « jeune

filles moyenne ». A celle-ci, par contre, l'algèbre (et ses subtilités, et toutes ses possibilités) apparaît beaucoup plus naturelle qu'au garçon. En géométrie pure, si elle est moins rapide, elle est beaucoup plus minutieuse. Elle peine beaucoup en cotée et descriptive.

Je trouve également que les garçons ont beaucoup plus de facilité que les filles pour la géométrie (en classe de Première : géométrie cotée, triangles qui tournent autour d'un axe) et pour la cinématique. Ils comprennent beaucoup plus vite, mais un peu superficiellement, et les explications supplémentaires données aux filles ne peuvent que leur être profitables. Aucune différence en algèbre.

Personnellement, la classe mixtée me plaît, justement par la diversité de ses dons et de ses réactions qui fait, du reste, qu'aucune matière n'est plus particulièrement ingrate (et par suite particulièrement redoutée) pour l'ensemble de la classe.

M. ARNOUX (*Lycée mixte de St-Dié, Vosges*).

19 ans d'enseignement féminin,

7 ans d'enseignement mixte.

Il est assez vraisemblable que les filles ont, dans l'ensemble, l'esprit moins tourné vers l'abstraction que les garçons. Mais cela ne dépasse pas les différences que nous trouvons entre individus d'un même sexe et dont nous sommes bien obligés de tenir compte dans la pédagogie (du moins quand les effectifs sont raisonnables). Opposé aux avantages incontestables de la mixité, l'argument me paraît faible et de portée bien limitée.

CHEVALLIER (*Marcelin-Berthelot*).

Précisons que la publication de ces réponses, même si elles sont convergentes, ne clôt pas le débat qui reste ouvert à qui voudra y participer.

Voici deux nouvelles questions :

185-1. — *Existe-t-il un objet mathématique ?* (question posée à l'écrit du certificat de Philosophie générale et de Logique, Alger, 1956).

185-2. — Les étudiants de la Faculté des Lettres de Bordeaux, avaient, à la même session, à commenter et discuter cette phrase de Durkheim : « Entre la logique du primitif et la nôtre, il n'y a point d'abîme. » Question pour les professeurs de Mathématiques : la logique de l'enfant et la nôtre ne sont-elles pas trop souvent séparées par un abîme ?

≡ IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE ≡

LE DESSIN ANIMÉ APPLIQUÉ A L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES *

Examinons d'abord, à propos des Mathématiques, la méthode et son application.

L'enseignement des Mathématiques se présente tout hérissé de difficultés, au maître, et à l'élève, trop souvent, comme un tourment inutile et cruel. La plupart des hommes cultivés non mathématiciens se souviennent avec terreur ou rancœur des leçons de géométrie ou d'algèbre qu'ils subirent dans leur enfance.

Le Nombre, pour beaucoup, est un être hostile.

Cet enseignement peut devenir pour le maître et pour l'élève une source de profonde joie. En Mathématiques, toute vérité est bonne à dire.

Le maître n'a jamais à redouter d'égarer l'esprit de son disciple en l'influençant suivant ses propres tendances. Il n'a jamais à redouter non plus la contradiction ou le démenti. Il y a environ 3.000 ans que le théorème de Thalès est démontré. Les théories chimiques du XVIII^e siècle sont caduques.

Pour l'élève, l'étude des Mathématiques doit devenir une occasion de certitude, une profonde satisfaction de l'esprit, une éducation du sens esthétique et, en général, un moyen puissant de cultiver son esprit. Il n'y a d'enthousiasme que dans le savoir, et l'adage : « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre » n'est pas valable seulement en un lieu et un temps déterminés ; il est universel et concerne l'élite intellectuelle de tous les temps et de tous les pays.

L'ensemble des notions mathématiques constitue la collection d'images les plus simples, et leur agencement obéit à un très petit nombre de règles. L'enseignement de ces notions devrait être des plus faciles, et l'on vient de voir qu'il est des plus arides.

Seule, dit Henri Poincaré, l'habitude qu'on a de cet état de choses fait qu'on n'y prend plus garde.

Dans ses deux célèbres chapitres de *Science et Méthode* : « L'invention mathématique » et « Les définitions mathématiques et l'enseignement », le grand savant français fait ressortir le rôle dévolu à ce qu'il appelle le moi subliminal, qui est dépeint comme étant le siège de l'intuition et d'où jaillit la vérité.

Bien avant Henri Poincaré, on trouve chez les auteurs les plus divers, mathématiciens ou non, des pages extrêmement suggestives concernant la façon dont l'esprit humain devrait appréhender les vérités mathématiques. Le dialogue de Platon, « Le Ménon » est tout à fait caractéristique à cet égard.

Archimède, dans une lettre à Eratosthène, explique comment la vérité doit être suggérée tout d'abord, pour être ensuite démontrée.

Dans les temps modernes, Clairaut et Rousseau ont eux aussi magistralement défendu l'idée que la vérité mathématique se fait jour au plus profond de notre moi, qu'elle en surgit, impérieuse, et réclamant sa démonstration.

L'enseignement des sciences fut pendant longtemps scolastique et verbal. On sait combien les modernes ont dû lutter pour abattre le prestige d'Aristote dans ce domaine et faire reconnaître à la science son caractère inductif et expérimental. C'est chose faite actuellement et, dans l'enseignement des sciences, on utilise un

(*) M. J.-L. NICOLET, professeur à Lausanne, est l'auteur et le réalisateur de nombreux films mathématiques. Nous le remercions d'avoir autorisé la reproduction dans notre *Bulletin* des réflexions que l'expérience de cette méthode d'enseignement lui a inspirées. (Extraits d'une brochure publiée en 1944).

matériel des plus complets qui permet d'atteindre à la vérité scientifique par des expériences. L'expérience conduit à l'expression de la loi.

Lorsque la science en question s'est élevée au rang de science exacte, la loi découverte cesse de relever du domaine de l'induction pour entrer dans celui de la déduction.

Tout ceci repose sur l'importance à attribuer aux sens dans la genèse de la vie intellectuelle.

Cette vie, dans ce qu'elle a de plus élevé et de plus pur, n'est pas autre chose que la vie de la Raison. Nous ne pouvons naître à cette vie qu'en améliorant et en affinant notre activité sensorielle et, de là, en disciplinant notre imagination. Lorsque dans celle-ci se forment des images exactes, on peut apprendre, toujours par voie expérimentale, à classer ces images, à en établir une hiérarchie, c'est-à-dire élaborer un syllogisme, et naître à la vie de la Raison.

Il faut donc que le pédagogue dispose d'un moyen matériel pour améliorer et affiner la vie sensorielle de l'élève, et ainsi discipliner son imagination.

Aujourd'hui, le pédagogue dispose d'un moyen exactement approprié au but à atteindre. C'est le dessin animé.

Ce but avait été aperçu par les auteurs cités plus haut, mais le moyen de l'atteindre leur faisait défaut.

Le dessin animé, technique admirablement souple et variée, extrêmement riche en possibilités de toute nature, permet littéralement de montrer à un élève ce qui se passe dans l'esprit du maître. Son emploi est appelé à rénover complètement certaines branches de l'enseignement.

On présente trop souvent à l'enfant les vérités mathématiques dans l'ordre inverse de celui dans lequel elles se sont révélées à l'inventeur. Or l'enfant n'est pas un logicien. Il a besoin d'être convaincu d'avance de l'exactitude des vérités qu'on lui propose.

Rappelons-nous que l'enfant est un imaginaire et même un visionnaire. Il faut, non seulement respecter, mais chercher à développer chez lui ce mécanisme intellectuel qui est très voisin de celui du savant.

Il faut donc parler à l'imagination de l'enfant et lui faire parcourir les étapes de la connaissance dans l'ordre où l'inventeur lui-même les a parcourues. Ceci est très important.

Dans ce domaine également, le dessin animé permet une amélioration incontestable des méthodes d'enseignement. Il offre des ressources multiples. Expérience faite, il donne tout ce qu'on peut en attendre, à condition d'être réalisé et employé judicieusement.

En composant les schémas des films qui sont une application de cette méthode, nous nous sommes efforcés de nous adapter exactement au mécanisme intellectuel qui vient d'être esquissé. Notre objectif sera atteint si les élèves cessent d'être à peu près réceptifs pour devenir actifs, observateurs et curieux, s'ils cherchent à exprimer, donc à analyser leurs sensations, et, en parcourant par exemple un fragment du domaine des mathématiques, ils en devinent ou pressentent l'étendue illimitée.

Le souvenir visuel que l'enfant conservera du dessin animé facilitera chez lui le passage du concret à l'abstrait. En effet, les images fugitives et immatérielles qui passent sur l'écran représentent en quelque sorte déjà un état intermédiaire entre le concret et l'abstrait, favorable à la compréhension mathématique. Le dessin animé amène au raisonnement abstrait, but suprême de l'enseignement des Mathématiques, et ceci en faisant voir qu'une vérité est indépendante de certaines circonstances variables, précisément bien mises en lumière par l'application de notre méthode.

Le processus de la compréhension se déroule donc ainsi :

Le dessin animé est projeté une ou plusieurs fois sans commentaires. L'élève voit des images mobiles sur l'écran. Il décrit ce qu'il voit et développe ainsi ses facultés d'attention et d'expression. La vérité apparaît à son esprit, elle s'impose par

son élégance, sa simplicité, et fait désirer sa généralité. Le besoin de démonstration se fait sentir. Dès lors, le maître peut éduquer la raison, l'exercer puisqu'elle ne travaille plus à vide, mais qu'elle porte sur des images claires et vivantes. La logique se présente sous forme de science expérimentale ; elle tend vers l'autonomie et s'empare d'un domaine de plus en plus vaste de notre champ de conscience.

L'application de cette méthode, que nous venons d'étudier à propos des Mathématiques, est possible à d'autres sciences. Son champ d'application est presque sans limite et comprend aussi bien l'arithmétique élémentaire que les mathématiques supérieures et toutes les sciences exactes. En somme, toutes les branches de l'enseignement qui font appel au raisonnement, de l'école primaire aux écoles supérieures, ou aux cours spécialisés d'instruction professionnelle, bénéficieront grandement de son introduction.

En résumé, la conception des dessins animés conformes à notre méthode, est caractérisée par l'observation des règles suivantes :

1. Dissocier l'activité intuitive de celle de la Raison. Le résultat sera d'autant meilleur que cette dissociation sera plus complète.
2. Faire parcourir à l'élève les étapes de la compréhension dans l'ordre où elles ont été parcourues par l'inventeur.
3. Faire surgir dans l'esprit de l'élève l'énoncé d'une vérité antérieurement à toute démonstration.
4. Choisir parmi les moyens d'expression utilisés dans le dessin animé ceux qui favorisent le plus l'abstraction.

J.-L. NICOLET.

N.D.L.R. — Nous publions ici, à titre documentaire, la liste des films de « géométrie animée » réalisés par M. NICOLET, et qui sont distribués par : The Cuisenaire C^o, Ltd, 14, Basingstoke Road, Reading (Grande-Bretagne). Ce sont tous des films de format 16 mm, muets.

A. Niveau élémentaire : 1. Cercle passant par trois points ; 2. Lieu des centres des cercles tangents à deux cercles concentriques ; 3. Lieu des centres des cercles tangents à un cercle donné et passant par son centre ; 4. Cercle comme lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés passent par deux points fixes ; 5. Arcs capables ; 6. Bissectrices intérieures d'un triangle ; 7. Bissectrices extérieures ; 8. Angles inscrits dans la circonférence ; 9. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée à des cercles égaux à un cercle donné et passant par un point donné ; 10. Construction du pentagone régulier ; 11. La section d'or et le pentagone régulier ; 12. Triangles formés par des côtés de polygones réguliers ; 13. Lieu des points d'où l'on voit deux cercles donnés fixes sous des angles égaux.

B. Niveau supérieur : 14. Mouvement hypocycloïdal avec des cercles dont le rapport des rayons est $1/2$; 15. La section d'or et la strophoïde ; 16. Pôles et polaires par rapport au cercle ; 17. Ellipse comme lieu d'un point d'un segment de droite de longueur donnée dont les extrémités glissent sur deux droites perpendiculaires ; 18. Ellipse comme lieu des centres des cercles tangents à un cercle fixe et passant par un point fixe intérieur au cercle fixe ; 19. Hyperbole comme lieu des centres des cercles tangents à un cercle fixe et passant par un point fixe extérieur au cercle fixe ; 20. Parabole comme lieu des centres des cercles tangents à une droite fixe et passant par un point fixe ; 21. Parabole comme lieu des centres des cercles orthogonaux à un cercle donné et tangents à une droite fixe ; 22. Génération commune des trois coniques.

IL FAUT ENSEIGNER L'ARITHMÉTIQUE

Arithmétique, par Y. CROZES, professeur au Lycée Henri-IV, Masson, éditeur (Cours Cagnac et Thiberge), Paris, 1956.

Ce livre destiné aux élèves de Mathématiques Élémentaires est maintenant connu. Mais j'aurais du remords de ne pas consacrer quelques lignes du *Bulletin* de l'A.P.M. à un ouvrage d'une qualité aussi exceptionnelle. Les Collègues qui connaissent Y. CROZES, et qui ont apprécié son dévouement à la cause de l'A.P.M., n'en sont pas étonnés. Mais précisons un peu les raisons de notre estime pour cet ouvrage.

En premier lieu, je crois qu'il faut souligner le soin avec lequel il a été rédigé. Sans doute le texte est-il servi par une présentation soignée, très aérée, qui, hélas ! participe à l'élévation du prix de vente. Mais, même sans cela, la clarté, la précision de la rédaction, sauteraient aux yeux. J'apprécie l'introduction sur le langage mathématique et les symboles ; les notions d'ensemble, d'intersection ou de réunion d'ensembles méritent d'être bien dégagées. A le faire au début d'un cours de Mathématiques Élémentaires, on y gagne un temps précieux. De plus, ce symbolisme est parlant, et les élèves n'éprouveront que du profit pour leurs études ultérieures à se familiariser dès que possible avec lui. De ce point de vue, le livre de CROZES peut servir d'introduction à toute étude sérieuse des Mathématiques et je crois qu'il donnera le goût de s'y consacrer ; il n'est pas de meilleur éloge.

L'ensemble des entiers naturels a des propriétés qui tiennent à sa qualité d'être complètement ordonné. Sans introduire les axiomes d'une façon qui pourrait paraître arbitraire, sans donner jamais l'impression d'une construction *a posteriori* et où, par conséquent, il n'y a plus rien à découvrir, le livre nous fait construire logiquement les lois de composition des entiers. L'étude des restes permet de poser clairement la notion de congruence que les projets de programme de l'A.P.M. souhaitent introduire ; ainsi se trouve facilement dégagée la notion de classes résiduelles (mod. m). De même, il est souligné que la divisibilité est une relation d'ordre.

La deuxième partie du livre, « quelques extensions de la notion de nombre », traite de la mesure des grandeurs et les fractions sont considérées comme opérateurs. Cependant, en fin du livre, deux notes élargissent la perspective : définition des nombres rationnels relatifs, mesures des grandeurs et suites chiffrées.

Mentionnons aussi les diagrammes originaux et suggestifs qui illustrent l'ouvrage et l'index final, bien pratique.

On dira que ce compte rendu manque de critiques. Mais si je n'en vois pas à formuler, pourquoi ne pas le dire ? Pourquoi ne pas recommander à l'attention de tous et peut-être plus particulièrement à celle des candidats à l'agrégation et au C.A.P.E.S. un livre qui leur sera très utile ?

G. W.

L'ASTRONOMIE D'AUJOURD'HUI

Le Ciel et la Terre, tome III, de l'*Encyclopédie Française*, dirigé par MM. A. DANJON, P. PRUVOST et J. BIACHE, Larousse, distributeur.

Par sa seconde partie, consacrée à la Terre, cet ouvrage intéressera plus les géographes et les physiciens que les professeurs de Mathématiques. Mais toute sa première partie, sur le Ciel, leur présente une documentation de première main et comme il n'existe pas d'équivalent en langue française.

Sous la direction de M. A. DANJON, Directeur de l'Observatoire de Paris, les meilleurs spécialistes français présentent les récentes découvertes et surtout les problèmes de l'astronomie d'aujourd'hui. Nous sommes sur le front de la recherche.

Il n'y a donc pas de meilleure source d'information pour mettre à jour notre enseignement élémentaire d'astronomie ; cet ouvrage de référence doit figurer dans toutes les bibliothèques d'établissement (recommandons aux Collègues de le faire inscrire sur la liste des achats « en priorité »).

Voici un aperçu de la table des matières (nous nous excusons de ne pouvoir citer tous les auteurs).

A. *La Terre et le système solaire* : forme et dimensions de la Terre ; l'atmosphère ; la Terre et le temps ; Lune, planètes, satellites, petites planètes ; les comètes ; météores et météorites.

B. *Le Soleil et les étoiles* : la photosphère, le rayonnement du Soleil, les éclipses, la chromosphère et la couronne, instruments nouveaux pour observer le Soleil, la radioastronomie solaire.

Le rayonnement des étoiles ; le diagramme de Hertzsprung-Russell et son interprétation ; les étoiles doubles ; les étoiles singulières ; l'intérieur des étoiles ; source de l'énergie stellaire.

C. *Les galaxies* : peuplement de l'Univers. Structure et mouvement de la Galaxie (en particulier amas et associations stellaires, matériaux interstellaires, structure fine et dynamique de la Galaxie). Enfin, les galaxies et leurs problèmes ; cosmologies.

D. *Problèmes d'évolution.*

Les dernières lignes de ce sommaire suffisent à montrer que nous trouvons dans cet admirable ouvrage les dernières questions de l'astronomie. Dans 20 ans, peut-être moins il aura perdu ce caractère. Il gardera alors l'intérêt considérable de préciser, dans toute son ampleur, l'état de l'interrogation audacieuse que l'homme raisonnable ne cessera jamais de se poser sur l'Univers.

G. W.

Grandes découvertes du XX^e siècle, ouvrage publié sous la direction de L. LEPRINCE-RINGUET, Larousse, Paris, 1956.

Ce livre est un recueil d'articles écrits par des spécialistes pour le grand public moyennement cultivé, mais curieux des progrès de la science. Cela ne pouvait pas être un tableau complet de la science du xx^e siècle ; mais des aspects spécialement remarquables sont habilement présentés et font bien apparaître le caractère conquérant et en quelque sorte aventureux de la recherche moderne. L'ouvrage plaira à tous nos grands élèves et pourra, ou satisfaire un peu de leur curiosité, ou orienter leur vocation.

Notons, au sommaire : Exploration de la matière, par L. LEPRINCE-RINGUET et A. ASTIER ; Etat des sources d'énergie et énergie des marées, par R. GIBRAT ; Energie solaire, par F. TROMBE ; Energie nucléaire par J. GUÉRON ; Exploration du temps et de l'espace, par M. NAHMIAS ; Découverte progressive de l'Univers : la radioastronomie, par M. DENISSE, et l'essor de l'astronomie contemporaine par M. P. COUDERC. Dans ce dernier chapitre on trouve l'exposé des techniques nouvelles et leurs principaux résultats. Manque, cependant, tout ce qui concerne l'expansion de l'Univers, omission que les rééditions de ce beau livre devront réparer.

G. W.

Parmi les Revues

— La radioastronomie et l'Observatoire de Nançay ont fait l'objet d'une présentation, par le Directeur de Nançay, M. DENISSE, dans *La Nature* (avril 1957) et par MM. LUCAS, BASSET, STEINBERG et BOISCHOT, dans *Atomes* (avril 1957).

— *Revue Universitaire* (nov.-déc. 1956) : A. CHAUVIN, Retour aux Mathématiques ?

— *Mathematica et Paedagogia* (n° 10) : G. CHOQUET, L'enseignement dans les écoles secondaires et la recherche ; W. SERVAIS, L'enseignement des Mathématiques dans les écoles secondaires (rapport présenté à Genève en juillet 1956).

— *Les Amis de Sèvres* (mars 1957) : F. PERRIN, Rôle actuel de l'enseignement des Mathématiques.

— *Revue d'histoire des Sciences* (janvier-mars 1957) : J. ITARD, Les lois de la réfraction de la lumière chez Replet ; M. LACARRET, Les traductions françaises des œuvres d'Euclide ; B. ROCHOT, Gassendi et les Mathématiques.

— *Le Facteur X*, n° 34, avril 1957 : Le train de Jules Verne ; Le mot Parallaxe ; parallaxe du Soleil ; les heurts entre les théories et les faits ; la création de la géométrie descriptive ; sur la construction d'un triangle connaissant ses trois hauteurs ; rapports et rapports. Rappelons qu'on peut ou qu'on doit s'abonner à *F. X* : neuf numéros par an : 500 francs. Editions du Levier, C.C.P. Paris 10 020.06. A la même adresse, *le calculateur Facteur X*, règle circulaire à calcul (prix : 1 200 F).

Livres reçus

— *Amusements mathématiques*, par A. BAKST ; Dunod, Paris, 1957, prix 750 F.

— *Comment poser et résoudre un problème*, par G. POLYA ; Dunod, 1957, prix 960 F.

— *Notions de trigonométrie*, par R. FOUCAUX ; Eyrolles, 1957, prix 950 F.

— *Cours de calcul opérationnel*, par DENIS-PAPIN et KAUFMANN, Albin Michel, 2^e édition, 1957, prix 1 200 F.

— *Précis de Mathématiques Spéciales*, par R. GOUYON ; Vuibert, 1957, prix, 6 300 F (relié).

— *Cours de Mathématiques* (Ecole Nationale des Mines de Paris), par J. BASS ; Masson, 1956, prix, 8 500 F (relié).

— *L'origine des planètes*, par A. DAUVILLIER ; Les Presses Universitaires de France, 1956, prix, 800 F.

— *Origine et évolution des mondes*, par E. SCHATZMANN ; Albin Michel, 1957, prix, 1 500 F.

— *Cours et compléments de Mathématiques générales*, par M. DAVID (cours de l'Ecole des sciences de Reims) ; C.D.U., 1957.

— *Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires*, par L. COUFFIGNAL ; Gauthier-Villars, 1956.

≡ V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS ≡

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE FONTENAY-AUX-ROSES

Session de 1956

Première composition de Mathématiques

(Option Mathématiques) *

Répartition des notes (cotées de 0 à 60). — L'étalement des notes est très régulier avec accumulations vers 34-35 et entre 25 et 28.

A part une copie se détachant du lot, l'ensemble est très terne, toutes les candidates ayant perdu un temps considérable dans les deux premières parties malgré la facilité des questions posées. La quatrième partie du problème a perdu ainsi beaucoup de son importance, puisque la grande majorité des candidates n'a pu l'aborder avec fruit ; c'est regrettable, car le calcul devait alors faire place à la géométrie, et la valeur des candidates, en ce qui concerne cette partie du programme, n'a pu être appréciée.

Observations générales. — Le problème proposait l'étude d'une des familles de coniques passant par les sommets d'un triangle équilatéral et ayant pour foyer F un point du cercle circonscrit à ce triangle, famille pour laquelle la directrice associée à F passait par le centre O du triangle.

Pour éviter que certaines candidates soient arrêtées par la recherche de l'équation des familles de coniques, les questions 1 et 2 du texte demandaient une étude algébrique d'un système d'équations linéaires qui devait être utile dans la suite et permettait d'alléger la recherche analytique du § 3.

Le but que l'on se proposait ainsi n'a pas été atteint, car, pour presque toutes les candidates, cette étude élémentaire d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues s'est transformée en une masse inextricable de calculs aussi maladroits qu'inutiles et a absorbé tout le temps de l'épreuve.

Savoir calculer n'est peut-être pas une preuve d'intelligence, mais il faut tout de même beaucoup de réflexion et quelque finesse pour éviter de faire des calculs inutiles ou stupides. C'est dans ce même esprit qu'on se plaît aussi à répéter que l'orthographe n'est pas une preuve d'intelligence ; cela prouve surtout beaucoup de négligence, de laisser-aller, une absence regrettable de volonté et surtout de ténacité ; on aime beaucoup philosopher sur une question, mais on n'a plus le goût de la traiter en toute rigueur et de façon complète ; cela exige en effet, non seulement de l'intelligence et de l'imagination, mais une solide technique qu'on n'a peut-être plus le temps ou le goût d'acquiescer.

Voici, à propos du problème, des remarques qui vont illustrer ce qui précède :

1) Dans la plupart des copies, les déterminants du troisième ordre ne sont développés que par la règle de Sarrus (baptisé Syrus... par une candidate) ou par rapport aux éléments d'une rangée (laquelle est toujours la première ligne, sans même avoir regardé si une autre rangée donnerait des calculs plus simples).

On semble ignorer l'intérêt de faire apparaître des zéros, soit par soustraction de rangées (quand on a par exemple une colonne de 1, comme dans la première partie du problème), soit par combinaison linéaire de rangées parallèles (pour le déterminant, précité du problème, la somme des termes des deux premières colonnes était

(*) Voir les énoncés dans le *Bulletin* 178, p. 540 et sq.

nulle, conséquence du fait que la somme de trois vecteurs de même module faisant entre eux des angles de 120° est nulle). On devrait aussi songer qu'un déterminant du troisième ordre a des significations géométriques simples (aire d'un triangle, volume d'un parallélépipède) ; pour le § 1, il suffisait de reconnaître l'aire d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1, pour trouver, *sans aucun calcul*,

sa valeur $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (le côté ayant pour longueur $\sqrt{3}$).

2) A cette maladresse dans le maniement des déterminants est venue s'ajouter pour le § 2 la faiblesse en calcul trigonométrique ; les formules les plus simples sont ignorées, en particulier celles transformant les produits en sommes et les sommes en produits.

Il suffisait d'ailleurs de faire un *seul calcul*, par exemple celui de u ; en effet, v s'en déduisait en changeant θ en $\theta - \frac{\pi}{2}$ et α en $\alpha - \frac{\pi}{2}$. w , qui n'intervenait pas de la même façon, était donné par la première équation (la plus simple) une fois u et v déterminés.

Donc, au lieu d'appliquer automatiquement trois fois de suite la règle de Cramer, il eût mieux valu réfléchir et s'apercevoir qu'on pouvait se borner au calcul d'un seul déterminant.

Naturellement, ces calculs inutilement longs, maladroits et le plus souvent faux, sont présentés de façon inadmissible. Beaucoup de copies sont de véritables brouillons. Faut-il aussi rappeler que tous les calculs doivent être transcrits sur la copie, sinon les résultats indiqués sont sans valeur.

3) Dans le § 3, où il s'agissait de calculs analytiques, on retrouve encore des maladresses et beaucoup d'écritures inutiles (on laisse courir le stylo-bille au lieu de réfléchir à l'utilité de ce que l'on écrit). Malgré les indications de l'énoncé, certaines candidates partent de l'équation générale d'une conique $Ax^2 + 2Bxy + \dots = 0$ dans l'espoir de déterminer les coefficients par un système de cinq équations à cinq inconnues !!! D'autres, par un automatisme tout aussi condamnable, décrètent que les coniques forment un faisceau linéaire, comme si la seule famille de coniques concevable soit le faisceau.

Au lieu de partir de l'équation focale de la conique, comme le suggérerait l'énoncé, beaucoup traduisent analytiquement et lourdement l'égalité des rapports

$$\frac{PF}{Pp} = \frac{\varphi F}{\varphi q} = \frac{RF}{Rr}$$

Pp étant la distance à une droite à déterminer qui sera la directrice (à ce sujet, il faut signaler que dans un très grand nombre de copies la formule de la distance d'un point à une droite est fautive, car on écrit $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ au dénominateur).

Maladresse également pour introduire l'excentricité ; au lieu d'écrire simplement $(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 = (ux + vy + wR)^2$ l'excentricité étant égale à

$\frac{e^2 (ux + vy + w)^2}{u^2 + v^2}$, on écrit le deuxième membre $\frac{e^2 (ux + vy + w)^2}{u^2 + v^2}$; ceci suffit d'ailleurs à

gêner les candidates qui ne retrouvent plus exactement le système (S). Le plus grave est que la plupart des candidates ne remarquent pas que u, v, w ne sont définis qu'*au signe près*, puisqu'ils ne figurent que dans une expression au carré. Elles ont donc trouvé dans le système déterminant u, v, w un ξ de plus que dans le système (S).

Certaines affirment alors qu'elles obtiennent deux systèmes différents pour $\xi = +1$ et $\xi = -1$ et affirment que chacun d'eux caractérise une des deux familles de coniques demandées ; cela ne les dérange pas d'avoir montré au § 2 que le système (S) admettait déjà deux solutions distinctes (en groupant les trois solutions déduites par rotation de 120°).

Une fois l'équation de la famille (H) trouvée, pourquoi se dépêcher de la développer et de l'ordonner ; cela ne sert à rien et mieux vaut conserver l'équation sous sa forme focale ; on retrouve constamment cette manie d'écrire des calculs avant de s'inquiéter de leur utilité.

Que dire aussi des candidates qui, après avoir trouvé que l'excentricité est égale à 2, s'acharnent à démontrer que les coniques sont des hyperboles en étudiant les directions asymptotiques.

4) Pour le lieu des centres des hyperboles (H) dans le § 4, la recherche des coordonnées ne présente pas de difficultés, mais les fautes de calcul et les maladresses

(on passe en $\frac{\theta}{2}$ au lieu de garder les fonctions trigonométriques de θ) se font plus nombreuses : elles sont dues sans doute à la fatigue et à l'énerverment des candidates.

Même celles qui avaient les expressions exactes des coordonnées du centre, n'ont pas su construire exactement la courbe. Très peu ont justifié géométriquement que le point O était un centre de répétition d'ordre 3 ; quant à la vérification analytique de cette propriété, ou elle a fait appel à des calculs bien pesants, ou elle n'a pas abouti (faute par exemple de reconnaître les expressions de $\cos 3\theta$ ou $\sin 3\theta$).

La dernière partie du problème que l'on pouvait traiter entièrement par la géométrie, n'a été traitée de façon d'ailleurs assez complète que par une candidate ; les autres, prises par le temps, ont aligné rapidement des calculs qu'elles n'ont su ni exploiter, ni terminer.

Composition de Mathématiques

(Option Sciences naturelles)

Répartition des notes (cotées de 0 à 40). — Le texte proposé a permis de bien classer les candidates. On trouve un lot (trop important) de 19 candidates (notes inférieures ou égales à 6) n'ayant pas préparé leur programme ou incapables de l'assimiler, un lot de 18 vraiment trop médiocres et un lot égal (notes de 15 à 18) de candidates passables, d'où sortiront sans doute, l'an prochain, quelques bons éléments, et enfin une douzaine de candidates honnêtes (notes de 21 à 26), plus solides que brillantes, et une demi-douzaine ayant vraiment appris et compris leur programme.

Observations générales. — Rien dans le texte proposé ne pouvait gêner les candidates, suffisamment entraînées pendant l'année à étudier des variations de fonctions. D'ailleurs, dans le plus grand nombre de copies, toutes les parties du problème ont été abordées, et ce n'est pas l'ignorance des méthodes, mais la maladresse ou faiblesse des calculs, qui empêche les candidates d'aboutir.

Il est navrant de voir le peu d'intelligence et de réflexion apportées dans la recherche et la résolution du problème. Le but de l'étude du programme de Mathématiques pour les candidates de l'option « Sciences naturelles » n'est pas l'acquisition d'un mécanisme de calcul qu'on applique plus ou moins adroitement, mais l'acquisition d'habitudes de travail et d'esprit, le développement de qualités qui sont utiles dans les travaux les plus divers. On pardonne facilement des fautes de calcul ou d'étourderie, mais on ne peut admettre que les candidates ne pensent jamais à se vérifier, à rapprocher les divers résultats obtenus, à voir si ces derniers ne sont pas contradictoires.

Le problème donné proposait aux candidates un très grand nombre de vérifications ou recoupements. En voici quelques exemples :

1) Dans l'étude d'une fonction, le signe de la fonction est souvent connu ou facile à étudier ; il est bon de le noter au début afin d'éviter des fautes stupides.

Il est facile de vérifier une direction asymptotique calculée à partir de $\frac{y}{x}$ en regardant la valeur de y' ; de vérifier une valeur de la dérivée en un point (x_0, y_0) par la limite de $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ quand son calcul est simple (par exemple dans le problème le point sur Oy où le calcul de la tangente est inexact dans presque toutes les copies).

2) Un certain nombre de candidates ont bien établi que y'' restait constamment positif ; elles ne pensent pas à en déduire la croissance de y' qui, dans le cas du problème, variait de -1 à 0 quand x variait de $-\infty$ à $+\infty$. On vérifiait ainsi que y' était toujours négative. Beaucoup de candidates qui s'étaient trompées dans l'étude du signe de y' n'ont pas aperçu l'incompatibilité de leurs résultats faux avec le signe positif constant de y'' .

3) Le § 2 du problème conduisait au résultat suivant obtenu par la grande majorité des candidates : $y + \frac{x}{2}$ est une fonction paire de x . Quelques-unes seulement ont

vu que cela signifiait que Oy était le lieu des milieux des cordes de pente $-\frac{1}{2}$. Ce résultat permettait pourtant un grand nombre de vérifications, à savoir :

α) la tangente à la courbe au point $(0, 1)$ sur Oy a pour pente $-\frac{1}{2}$;

β) les directions asymptotiques se correspondent dans cette propriété diamétrale ; l'une ayant pour coefficient angulaire 0, l'autre devait avoir -1 pour coefficient angulaire ;

γ) le développement limité de $y + \frac{x}{2}$ ne comporte que des puissances paires de x ;

δ) les aires que l'on demande de comparer à la fin du § 4 sont égales.

Faute d'avoir fait ces observations très simples, les candidates se sont perdues dans des calculs longs et inutiles, en particulier pour le développement de y qui n'a été obtenu correct et complet dans aucune copie ; il fallait en effet prévoir l'absence des termes en x^3 et x^5 , ce qui permettait de retrouver une faute de calcul toujours possible. Il fallait surtout partir de $y + \frac{x}{2}$ qui s'écrivait $\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2}$, fonction *paire*

qu'on développait facilement suivant les puissances de $\frac{x}{2}$, avec trois termes seulement à calculer en dehors du terme constant égal à 1. L'idée la plus fâcheuse fut de développer $\frac{1}{e^x - 1}$ par la formule du binôme $(1 + u)^{-1}$ avec $u = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots !!!$

4) Ayant étudié les variations de y , celles de $z = \log y$ étaient connues ; pourtant presque toutes les candidates calculent z' et étudient son signe.

Pour la tangente à l'origine, on peut chercher la limite de $\frac{3}{x} = \frac{\text{Log } y}{x}$, rapport équivalent à $\frac{y - 1}{x}$, lequel a été étudié pour la fonction y .

Signalons, pour terminer, les ignorances, erreurs, maladroites et oublis les plus graves :

1° Remplacement, dans n'importe quelles conditions, d'infiniment petits, par des équivalents ; par exemple dans une somme $(\sin x - x)$ est remplacé par 0 ; $u = e^x(1 - x) - 1$ est considéré comme équivalent à $x - xe^x$, or $e^x - 1$ et xe^x sont deux infiniment petits équivalents et leur différence est d'ordre supérieur.

2° Le signe de y' est celui de la fonction u précitée, qui admet un seul maximum nul pour $x = 0$; donc u est toujours négatif ; pourquoi, dans ces conditions, perdre son temps à chercher son signe pour x tendant vers $\pm \infty$?

Il est très mauvais pour chercher le signe de u de construire deux courbes $y = e^x$ et $y = \frac{1}{1-x}$; on ne peut rien conclure (deux branches asymptotes à une même droite) et beaucoup de candidates se sont trompées. C'est une méthode qu'il faut éviter le plus possible.

3° On oublie de chercher s'il y a une asymptote quand la direction asymptotique a été obtenue et surtout on oublie de chercher la position de la courbe par rapport à l'asymptote, bonne occasion, pourtant, de *vérifier* les résultats obtenus pour la concavité.

Epreuves orales de Mathématiques

(Option Mathématiques)

Répartition des notes. — Les notes obtenues par les 35 candidates interrogées sont : un 19, deux 17, deux 16, cinq 15, six 14, deux 13, un 12, sept 11, deux 10, trois 9, deux 8, un 7, un 5.

Observations. — L'oral a été beaucoup plus satisfaisant que les deux années précédentes et beaucoup plus en harmonie avec les résultats de l'écrit.

Si l'on peut regretter encore de nombreuses lacunes dans la préparation de certaines candidates (même parmi celles qui ne se présentent pas pour la première fois), beaucoup ont montré une bonne compréhension du cours et ont su faire preuve d'imagination et de bon sens dans les exercices.

Pour les candidates moyennes, on retrouve les défauts signalés dans le rapport sur les épreuves écrites : manque de réflexion au départ, confiance illimitée dans le calcul qui est mené sans adresse, oubli de comparer les résultats, de les vérifier, de les interpréter.

Les candidates ayant des connaissances en géométrie, ou simplement du goût pour la géométrie, deviennent rares. Il y a cependant un programme de géométrie élémentaire, la plupart du temps délaissé faute de temps. Les candidates espèrent sans doute conserver assez de souvenirs de leurs programmes de Première et de Mathématiques Élémentaires ; malheureusement il n'en reste rien en général. Ceci ne facilite pas la recherche des solutions analytiques des problèmes ; les candidates, esclaves du calcul, se contentent de traduire leur énoncé en suivant le texte pas à pas, sans se demander si quelques observations géométriques au début, ne pourraient pas permettre de transformer avantageusement le problème et d'obtenir des calculs plus courts.

A. PERRICHET.

RAPPORT SUR LE CONCOURS DE L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES (Femmes) en 1956

Le jury de l'agrégation féminine de Mathématiques en 1956 était composé de la façon suivante : M. VILLAT, membre de l'Institut, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Paris, président ; M. DESFORGE, inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président ; Mme DOMANGE, professeur au Lycée Fénelon (classe de Fontenay) ; M. PAILLOUX, professeur à la Faculté des Sciences de Caen ; M. PÉTRUS, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

Pour les épreuves pratiques et orales, auxquelles M. VILLAT et M. PAILLOUX n'ont pu assister, la présidence a été assurée par M. DESFORGE, et MM. VILLAT et PAILLOUX ont été remplacés par M. DUGUÉ, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, et par M. ROSEAU, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Poitiers.

La session du concours a duré du 22 mai, date du début des épreuves écrites, au 1^{er} août 1956. Les résultats d'admissibilité ont été donnés le 3 juillet. Les épreuves pratiques et orales ont eu lieu au Lycée Fénelon, à Paris, à partir du 7 juillet.

Candidates inscrites. — Cent cinq candidates avaient demandé leur inscription (soixante-dix-neuf en 1955). Voici leurs origines :

— onze élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, dont une accomplissait en 1955-56 une quatrième année à l'Ecole ;

— neuf élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses ;

— six auditrices à l'Ecole Normale Supérieure (dont trois certifiées, en sursis d'intégration) ;

— trente professeurs et adjointes d'enseignement titulaires en exercice ;

— trois professeurs titulaires en congé ;

— vingt-six élèves-professeurs accomplissant leur année de stage dans un Centre pédagogique régional (C.P.R.) ;

— vingt étudiantes (Paris et province), dont sept certifiées en sursis d'intégration.

EPREUVES ECRITES

Sur les cent cinq inscrites, quatre-vingt-cinq ont pris part aux deux premières épreuves écrites (Mathématiques Élémentaires et Spéciales) ; deux ont abandonné le concours après la seconde composition, et cinq après la composition de Calcul différentiel et intégral. Le groupe des vingt-sept défaillantes comprend :

— une élève de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles ;

— une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure ;

— dix professeurs et deux adjointes d'enseignement titulaires en exercice ;

— huit élèves-professeurs des C.P.R. ;

— cinq étudiantes (dont deux certifiées en sursis).

Pour les soixante-dix-huit candidates ayant achevé les épreuves écrites, le total des notes relatif à l'ensemble des quatre compositions varie de 63,5 (deux fois) à 9,5, sur 80, — c'est-à-dire, à peu près, de 16 à 2,5 sur 20.

L'échelonnement de ces notes d'ensemble est le suivant (notes sur 20) :

— vingt-cinq sont au moins égales à 10 (après deux notes très voisines de 16, on trouve deux notes comprises entre 14 et 15, deux entre 13 et 14, cinq entre 12 et 13, quatre entre 11 et 12, et dix entre 10 et 11) ;

— dix-huit entre 8 et 10 (cinq entre 10 et 9, et treize entre 8 et 9) ;

— dix-huit entre 6 et 8 (sept entre 8 et 7, et onze entre 7 et 6) ;

— sept entre 5 et 5,5 et sept entre 4 et 5 ;

— enfin, trois entre 2,5 et 4.

Après les vingt-cinq notes supérieures ou égales à la moyenne, se trouve une importante concentration de vingt-neuf notes, présentant entre elles de très faibles écarts, réparties entre 6,8 et 10. Le jury a, en conséquence, proposé pour l'admissibilité les cinquante-quatre premières candidates de ce classement.

La moyenne générale de l'écrit est de 8,20 pour l'ensemble des candidates ayant

composé ; elle est à peine inférieure à 10 (9,97) pour les cinquante-quatre admissibles, et s'abaisse à 4,9 pour les non-admissibles.

Si l'on rapproche ces résultats de ceux des sessions antérieures, on remarque que les écarts entre les notes extrêmes, toujours pour l'ensemble des quatre épreuves écrites, ont été : de 15 à 3, en 1953 ; de 14 à 2,5 (avec une note assez exceptionnelle de 17,5), en 1954 ; de 14,75 à 3,1, en 1955 ; de 16 à 2,5, en 1956. Quant aux moyennes générales de l'écrit, elles s'établissent ainsi, pour les admissibles, pour les non-admissibles, et pour l'ensemble des candidates :

en 1953	11	6,5	8,7
en 1954	8,6	4,4	6,6
en 1955	9,6	5,5	8,2
en 1956	9,97	4,9	8,2

Rappelons que le nombre des admissibles a été de trente et une en 1953, de trente-deux en 1954, de trente-huit en 1955. L'augmentation très importante de ce nombre, en 1956 (la liste comprend cette année seize noms de plus que l'année dernière), n'a point entraîné une baisse de niveau, comme le montrent les moyennes précédentes.

Le groupe des cinquante-quatre admissibles de 1956 comprend :

- les dix élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles (dont l'élève de quatrième année) ayant pris part aux épreuves écrites ;
- les neuf élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses ;
- trois auditrices à l'Ecole Normale Supérieure ;
- douze professeurs titulaires en exercice ;
- trois professeurs titulaires en congé ;
- huit élèves-professeurs des C.P.R. de : Clermont-Ferrand (1), Dijon (1), Lille (1), Paris (3), Poitiers (1), Toulouse (1) ;
- neuf étudiantes des Facultés de : Marseille (4), Paris (3), Poitiers (1), Strasbourg (1).

Il convient de noter que six des admissibles de 1956 étaient déjà certifiées, en sursis d'intégration, c'est-à-dire n'ayant pas encore exercé comme professeur (une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure et cinq étudiantes).

En liaison avec les concours antérieurs, il est intéressant d'indiquer que dix-neuf des candidates inscrites en 1956 avaient été admissibles à l'agrégation, lors de sessions précédentes ; deux d'entre elles n'ont pas pris part aux épreuves écrites, et trois seulement ne figurent pas sur la liste de cette année ; quatorze sont donc de nouveau admissibles : quatre professeurs titulaires en exercice et un professeur titulaire en congé ; deux auditrices à l'Ecole Normale Supérieure ; quatre élèves-professeurs de C.P.R. ; trois étudiantes. De tels résultats doivent encourager les anciennes admissibles à poursuivre (ou à reprendre) leur effort de préparation, d'autant plus que la bi-admissibilité apporte des avantages appréciables.

Les relations entre l'agrégation et les Centres pédagogiques régionaux se précisent d'année en année, et, comme il est naturel, dans un sens très favorable. En 1955-56, les C.P.R. réunissaient quarante-trois élèves-professeurs (femmes) en Mathématiques, sans compter les élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay ; vingt-six d'entre elles se sont fait inscrire à la session de 1956, mais six ne se sont pas présentées à l'écrit, et deux n'ont pas achevé les quatre épreuves ; sur les dix-huit restantes, huit figurent sur la liste d'admissibilité. Pour compléter ces informations, il est bon de dire que les vingt-six élèves-professeurs des C.P.R., candidates à l'agrégation, avaient toutes été reçues aux épreuves pratiques constituant la seconde partie du C.A.P.E.S. (sept avaient obtenu la mention Très Bien ; neuf, la mention Bien ; sept, la mention Assez Bien ; trois, la mention Passable) ; quant aux huit admissi-

bles à l'agrégation, trois avaient obtenu au C.A.P.E.S. la mention Très Bien ; deux, la mention Bien ; une, la mention Assez Bien, et deux, la mention Passable.

D'autre part, plusieurs candidates à l'agrégation se présentaient en même temps au concours d'admission dans les C.P.R. de juin 1956 (Première Partie du C.A.P.E.S.) : cinq élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles (dont une n'a pu, pour raisons de santé, passer l'écrit de l'agrégation), deux élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay, onze étudiantes (Paris et province), dont cinq n'ont pas achevé les épreuves écrites. Sur ces douze candidates (effectives) à l'agrégation, neuf figurent sur la liste d'admissibilité : les six élèves des Ecoles Normales Supérieures et trois étudiantes (une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure, et deux étudiantes de la Faculté de Marseille). La liste d'admission au concours des C.P.R., publiée avant la fin de l'oral de l'agrégation, comprend quarante-six noms, auxquels il faut ajouter ceux des élèves des Ecoles Normales Supérieures ; il est particulièrement intéressant de noter que les trois étudiantes admissibles à l'agrégation figurent en tête de cette liste d'admission dans les C.P.R., étant classées 1^{re}, 2^e et 4^e (les élèves des Ecoles Normales Supérieures font l'objet d'un classement spécial).

**

Les énoncés des problèmes donnés aux quatre compositions écrites ont été publiés dans le n° 178 (septembre 1956) du *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques*.

Voici les observations auxquelles ont donné lieu ces épreuves.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

(Mme DOMANGE)

L'objet du problème, qui se situait entièrement en géométrie plane, était l'étude de l'association entre la figure formée par trois points P , Q , R (distincts ou non) placés respectivement sur trois droites BC , CA , AB formant un triangle, et le point S commun aux trois cercles tels que AQR , passant par les points AQR (certains de ces cercles pouvant être dégénérés).

Dans une première partie, on demandait d'établir l'existence du point S correspondant à trois points donnés P , Q , R , puis de déterminer la famille des figures (P , Q , R) associées à un point S donné, en discutant les cas particuliers. Cette discussion a été souvent lourde, incomplète, ou même totalement absente, malgré la facilité du sujet. Certaines relations entre des angles orientés, que l'on proposait ensuite d'établir, constituaient des matériaux pour les questions suivantes. Si la plupart des candidates manient correctement, souvent avec aisance, ces propriétés angulaires, on regrette pourtant de constater, dans plusieurs copies, une méconnaissance ou une incompréhension, bien regrettable, de la notion d'angle orienté de deux droites.

Les parties II, III, IV, concernaient les familles de figures (P , Q , R) associées à un point S fixe. Il était très utile de s'apercevoir que ces figures étaient deux à deux semblables, S étant le centre de toutes ces similitudes ; malheureusement, trop de candidates ne s'en rendent pas compte, ou pas assez tôt ; certaines paraissent même ignorer les propriétés de la transformation ponctuelle « similitude » et se servent seulement des triangles semblables. C'est là un défaut grave, et trop fréquent ; il semble que l'habitude prise dans les classes élémentaires, de penser par « cas d'égalité » et par « cas de similitude », n'a pu être délogée par plusieurs années d'étude des transformations ; ce fait est fort regrettable.

La partie II correspondait au cas où les points P, Q, R sont alignés, S étant sur le cercle circonscrit au triangle ABC. A chaque point S est alors associé un nombre m , valeur du rapport $\frac{PQ}{PR}$, et réciproquement. On trouve, dans trop de copies,

des fautes ou des insuffisances, malheureusement classiques, à propos des mesures algébriques et des symboles tels que $\frac{PQ}{PR}$, peut-être mal compris, peut-être trop négligemment employés. Beaucoup de candidates ont vu que les deux points S relatifs à deux valeurs opposées du rapport m formaient avec B et C un quadrangle harmonique ; par contre, une seule a remarqué que la détermination des points S associés aux valeurs -1 , $\frac{1}{2}$ et 2 de m ne constituait, à une permutation près, qu'un seul problème.

Dans la partie III, les points P, Q, R forment un triangle. La relation simple entre deux points S correspondant à deux triangles PQR, inversement semblables, a été fréquemment établie ; les propriétés de l'inversion ont été correctement exploitées, sauf dans deux copies où l'on relève une monstrueuse confusion sous le signe du slogan « l'inversion conserve les angles... ». Au sujet de la recherche du point S associé aux triangles PQR semblables (directement) à un triangle donné, les triangles étant orientés, beaucoup de candidates ne voient pas, malgré l'indication donnée par l'énoncé, qu'il y a un cas d'exception, du reste unique, que l'on retrouve précisément un peu plus loin, ce qui n'empêche pas les mêmes candidates de constater, alors, et de signaler ledit cas d'exception : ce manque de coordination dans les idées, qui aboutissait ici à une contradiction manifeste, est assez fâcheux.

A la fin de cette partie III, il s'agissait en particulier de classer et de situer les onze points S associés aux triangles orientés (P, Q, R) qui sont directement ou inversement semblables aux triangles orientés déduits de ABC en rangeant successivement les trois sommets A, B, C dans tous les ordres possibles. Cette question, dont la solution était facilitée par les indications données dans l'énoncé, n'a été traitée exactement que dans une copie, qui n'est pas, d'ailleurs, la plus complète. Quant à l'étude plus détaillée de deux de ces points, qui sont foyers d'une conique tangente aux trois côtés du triangle ABC, et qui peuvent être caractérisés par des relations angulaires signalées dans le texte, elle a été à peine ébauchée dans deux ou trois compositions seulement.

La partie IV mettait en jeu quelques propriétés classiques de la similitude ; la plupart des questions ont été, assez souvent, convenablement traitées, sauf la dernière, qui se rattachait pourtant à une remarque bien simple sur le rôle du centre fixe de similitude S par rapport aux triangles PQR associés à ce point S.

Enfin la partie V proposait de transformer les propriétés des figures (P, Q, R), correspondant à un point fixe S, soit par inversion, soit par polaires réciproques. Elle a donné lieu à quelques essais, presque toujours vagues, et deux ou trois candidates seulement ont su dégager, du reste partiellement, et uniquement dans le cas de l'inversion, l'idée essentielle, à savoir que les transformées des figures (P, Q, R) restaient encore semblables à une figure fixe, le point S étant toujours le centre fixe de ces similitudes.

On voit que certaines des questions de ce problème étaient assez classiques, et pouvaient être traitées rapidement ; l'énoncé guidait d'ailleurs beaucoup le travail de recherche. Le barème, très large, a tenu compte de la longueur du texte ; les notes reflètent bien la facilité moyenne du sujet. Sur quatre-vingt-cinq copies, trente-cinq ont obtenu une note au moins égale à 10 sur 20 : un 17,5 ; deux 15,5 ; un 14,5 ; un 13 ; sept notes entre 12 et 13 ; dix entre 11 et 12 ; treize entre 10 et 11. Viennent ensuite vingt-sept notes entre 7 et 10 ; seize entre 4 et 7 et sept inférieures à 4.

La moyenne de cette composition est d'environ 8,7 pour l'ensemble des candida-

tes ; elles est de 10,25 pour le groupe des 54 admissibles, et de 5,9 pour les non-admissibles. Ces moyennes sont sensiblement supérieures à celles du concours de 1955 (respectivement 7,5, 9, 4,9), malgré l'augmentation du nombre des admissibles (cinquante-quatre, au lieu de trente-huit). Il est à remarquer que toutes les candidates ayant obtenu une note supérieure à 10 pour cette épreuve figurent parmi les admissibles, et quatre admissibles seulement ont mérité une note inférieure à 7 (un 6,5, un 6, un 5, un 4,5).

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(M. PÉTRUS).

Le problème proposait l'étude d'un conoïde engendré par les droites, paratactiques à un cercle, qui rencontrent un diamètre donné de ce cercle, puis l'étude du transformé de ce conoïde par polaires réciproques par rapport à une sphère.

Dans une première partie, on demandait d'établir quelques propriétés des droites Δ tangentes à une sphère et rencontrant orthogonalement une tangente donnée à cette sphère ; les résultats à démontrer étaient du reste précisés en détail. Les solutions convenables sont assez fréquentes, mais on relève bien des maladresses, et trop souvent de pénibles calculs, surtout dans la question concernant le contact des droites Δ avec deux certaines sphères de rayon nul.

Au début de la seconde partie, il s'agissait de former l'équation ponctuelle et l'équation tangentielle de la surface K engendrée par les droites Δ , et de rechercher ses points singuliers, ainsi que les trajectoires orthogonales des génératrices Δ . Quelques remarques géométriques bien simples permettaient de résoudre ces questions sans faire intervenir un lourd appareil de calculs, trop souvent utilisé, et parfois pour n'aboutir à rien.

La détermination de deux familles de quadriques inscrites dans le conoïde K , demandée ensuite, était grandement facilitée par une indication, donnée par l'énoncé, sur une transformation par affinité qui laissait la surface invariante. Trois candidates seulement obtiennent un résultat correct ; la plupart entreprennent d'inextricables calculs qui se perdent dans le vague.

Une troisième question faisait intervenir les plans passant par une génératrice Δ de la surface K . La démonstration analytique d'une propriété classique des droites Δ , relativement à un certain cercle donné C , dont ces droites étaient des focales, a été souvent maladroite et quelquefois incorrecte. L'équation du cône circonscrit à la surface K , ayant pour sommet un point de l'axe du cercle C , a été en général trouvée, mais beaucoup négligent d'en donner une interprétation géométrique qui mettait en évidence un résultat simple. Et l'on peut regretter que l'étude des cubiques obtenues en cherchant l'intersection de K par l'un quelconque de ses plans tangents n'ait pas été sérieusement faite.

Les deux questions finales de cette seconde partie ont été souvent laissées de côté, tout particulièrement en ce qui concerne l'étude et la construction de certaines courbes. La relation entre les droites Δ et les sphères passant par le cercle C a été parfois reconnue comme une propriété des focales d'un cercle, mais cette remarque n'a pas toujours facilité la présentation d'une solution valable.

L'étude de la surface déduite de K dans une transformation par polaires réciproques par rapport à une certaine sphère imaginaire, faisait l'objet de la troisième partie. On pourrait presque dire, ici, que les maladresses et les fautes ont été « corrélatives » de celles qui s'étaient révélées dans la seconde partie. Les équations ponctuelle et tangentielle surgissent péniblement des calculs compliqués. Quant au reste du problème, les essais se poursuivent en général dans la confusion ; certaines tentatives hésitantes paraissent destinées à glaner quelques points... de rachat.

Dans l'ensemble, la question ne paraît guère dominée. Sans doute, plusieurs copies révèlent une bonne compréhension des méthodes de la géométrie analytique,

mais trop nombreuses sont les pages dont l'auteur paraît croire qu'un calcul abordé et mené n'importe comment doit toujours conduire au résultat, quitte à laisser au lecteur consciencieux le soin de débrouiller le chaos.

La présentation matérielle des copies est trop fréquemment négligée : mauvaise écriture, disposition confuse des questions, retours en arrière mal signalés, expressions incorrectes, fautes d'orthographe (« asymptotes », « systhèmes »...). N'est-il pas souhaitable que de futurs professeurs fassent un sérieux effort pour pouvoir, plus tard, « donner l'exemple » ?

Dans le barème adopté, il a été tenu grand compte des indications raisonnables, des tentatives convenablement entreprises et conduites, même si elles n'aboutissaient pas complètement. Pour les quatre-vingt-cinq candidates ayant pris part à l'épreuve, les notes s'échelonnent de 18 à 1 ; vingt-sept compositions sont cotées au-dessus de 10 ; deux 18 ; six entre 16 et 17 ; six entre 13 et 16 ; dix entre 11 et 13 ; trois entre 10 et 11. Viennent ensuite : dix-neuf notes entre 8 et 10 ; seize, entre 6 et 8 ; seize, entre 4 et 6 ; sept, entre 1 et 4. La moyenne générale est 8,6 ; elle s'élève à 10,6 pour les cinquante-quatre admissibles, et s'abaisse à 5 pour les trente et une non-admissibles (les moyennes correspondantes, en 1955, étaient environ 8,7 ; 9,8 et 6,6).

Pour les cinquante-quatre admissibles, les notes obtenues dans cette épreuve vont de 18 à 4,5 ; mais il y a seulement trois notes inférieures à six, et toutes les candidates dont la composition de Spéciales a mérité au moins 10 figurent sur la liste d'admissibilité !

(*A suivre*)^{*}.

(*) La fin du rapport n'étant pas parvenue à temps, la Rédaction du Bulletin a été contrainte d'en reporter la fin au Bulletin 186.

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION

UNE AUDIENCE DU MINISTRE

Le Bureau de l'A.P.M. a été reçu en audience par le Ministre de l'Education Nationale, le 11 avril 1957. Faisaient partie de la délégation : Mlle MASSON ; MM. BIGUENET, EDDE, GIRARD, HUISMAN, ITARD, ROSTOLLAND, SIROS, THÉRON et WALUSINSKI. (Excusées : Mlles AFFRE et FÉLIX). A la suite de l'audience, la note suivante qui résume l'entretien a été envoyée au Ministre :

MONSIEUR LE MINISTRE,

J'ai l'honneur de vous adresser la présente note pour préciser la position de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public sur les questions que vous avez bien voulu examiner avec son Bureau, lors de l'audience que vous lui avez accordée, le 11 avril dernier.

1° La constatation qu'il est urgent et nécessaire d'améliorer l'horaire réservé aux Mathématiques dans l'Enseignement du Second Degré est unanimement faite. Cette amélioration a deux buts : adapter notre enseignement aux conditions actuelles de la science, favoriser la formation des scientifiques et des techniciens dont la société a besoin.

Nous vous avons rappelé :

— notre ancienne proposition (juin 1956) d'organiser une heure hebdomadaire de travaux pratiques de Mathématiques dans toutes les classes de l'Enseignement du Second Degré ;

— votre projet, qui nous avait été communiqué en novembre 1956 par M. CROS, de porter à 4 heures l'horaire de Mathématiques dans toutes les classes du premier cycle. A ce sujet, nous vous avons exprimé la crainte que cette amélioration ne soit réalisée qu'en Sixième, alors qu'une amélioration rapide est urgente.

Vous nous avez affirmé que vous n'aviez jamais entendu limiter cette amélioration à la Sixième. Mais toute réalisation est liée au recrutement de nouveaux maîtres et aux possibilités financières. Il faudra donc une réalisation par étapes. Vous pensez que des séances de travaux pratiques seront organisées dès octobre 1957 dans toutes les classes du premier cycle et que la formule est une des plus propres à développer le goût des études scientifiques.

J'ajouterai, à ce que nous avons pu dire le 11 avril, que l'Assemblée générale de notre Association, réunie le 14 avril, a préconisé un effort plus accentué en faveur de la classe de Troisième (4 heures, dont une de travaux pratiques), et, pour la première étape, trois heures en Quatrième et Cinquième et deux heures et demie en Sixième (dont une dans tous les cas serait de travaux pratiques) ; il reste d'ailleurs entendu pour nous que « séance de travaux pratiques » signifie dédoublement des classes d'effectifs supérieurs à 24 élèves.

2° Traitant du problème du recrutement des maîtres, vous nous avez dit votre souci d'utiliser tous les moyens compatibles avec l'exigence normale de qualification. Nous avons particulièrement approuvé :

— toute mesure de dérogation au règlement sur le cumul qui permettrait aux professeurs retraités de continuer leur service ;

— la possibilité pour les jeunes professeurs d'effectuer leur service militaire dans leur fonction.

Eventuellement, et après une phase d'adaptation, des ingénieurs pourraient être engagés comme contractuels.

Vous avez souhaité que le Ministère de l'Education Nationale soit largement indépendant du Ministère des Finances pour résoudre ces problèmes.

Nous avons insisté sur l'urgence d'une réforme de la licence d'enseignement qui doit pouvoir être obtenue deux ans après la propédeutique et qui devrait comporter des options pour l'enseignement technique. Nous avons exprimé notre satisfaction de la création des I.P.E.S. Mais nous avons regretté la circulaire du 12 janvier 1957 sur l'agrégation ; nous souhaitons que toutes les dérogations justifiées soient accordées aux jeunes agrégés, qu'ils soient ou non Normaliens ; l'amélioration du recrutement des professeurs du Second Degré ne peut être réalisée aux dépens de la Recherche Scientifique et du recrutement des professeurs de l'Enseignement Supérieur.

3° Sur la Réforme du Baccalauréat, nous pensons qu'elle devra comporter :

— une révision des modifications de programme du 23 novembre 1956 ;

— une modification des coefficients afin de réaliser de véritables options scientifiques ;

— la création d'une épreuve de Mathématiques à l'écrit de la section Sciences Expérimentales ;

— l'assurance que, par un choix judicieux des sujets, les candidats sérieux au Baccalauréat Mathématiques ne seront pas écartés, comme cela s'est vu, des études scientifiques.

Vous avez bien voulu nous donner votre accord sur tous ces points.

4° Pour favoriser l'orientation d'un plus grand nombre d'élèves vers les études scientifiques, le Bureau de l'A.P.M.E.P. :

— est favorable à l'extension de l'expérience des classes de Mathématiques pour bacheliers de Philosophie et il souhaite une large publicité pour ces classes ;

— propose de faciliter l'entrée en classe de Mathématiques aux bacheliers première partie et présente à ce sujet un projet d'organisation d'ECOLE SCIENTIFIQUE D'ETE ;

— travaille au succès d'une exposition sur l'enseignement des Mathématiques qui aura lieu en novembre 1957 au Musée Pédagogique.

Il me reste à vous remercier, Monsieur le Ministre, pour le bon accueil que vous avez réservé à notre délégation. Veuillez être assuré de notre respectueux dévouement.

G. W.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU 14 AVRIL 1957

Etaient présents : 52 membres.

Bureau : Mlle DIONOT ; MM. LEGRAND (Trésorier) ; ITARD, ROSTOLLAND et SIROS (Secrétaires) ; WALUSINSKI (Président).

Comité : MM. BAY, DURRANDE, HUISMAN, Mlle VERVAECKE.

Membres : MM. HERMANT (Chaptal), RICHARD (Carpentras), DAUBY (Fourmies), Mlle PROTIN (Jules-Ferry), Mlle VANACKER (Calais), Mlle LONJARET (Metz), Mlle MARCHAND (Sèvres), GUERBOIS (Paul-Langevin), BASTIEN (Sézanne), Mlle PETIOT (Angoulême), SEM (Bordeaux), Mme REYUZ (Claude-Monet), Mlle FOURNIER (Charleville), Mlle ROBLIN (Vierzon), GUILLOTIN (E.N.I., Strasbourg), BOISSON (Claude-

Bernard), VILLA (Lézignan), MÉDIONI (*J.-B.-Say*), Mme DARCISSAC (Dié), GARMARD (Lillebonne), LAGRANGE (Salon-de-Provence, *Ecole de l'Air*), LACHAUX (Fontainebleau), DUVAL (*Colbert*), MOUREAUX (Lons-le-Saunier), VANY (*Louis-le-Grand*), EUVRARD (*Hoche*, Versailles), BERRARD (Nancy), MAGNIER (*Janson*), MARCEL (Rennes), CARLIER (Lisieux), RIVIÈRE (Périgueux), DAIGNIÈRES (Saint-Etienne), MOUGENOT (*Henri-Poincaré*, Nancy), MABILE (*J.-B.-Say*), EXCOFFIER (Aix-les-Bains), KATZ (*E.N.P.G.*, Creil), PERROT (Saint-Lô), REVUZ (*Fac. des Sciences*, Poitiers), GITTON (Orléans), Mlle ETIFIER (*E.N.I.*, Saint-Germain-en-Laye), LERICHE (*Marcel-Roby*), VISBECQ (Nantes).

S'étaient fait représenter ou ont voté par correspondance : 192 membres dont les noms suivent : PRÉVOST (*J.-B.-Say*), JACQUEMIER (Charleville), TENCÉ (Domfront), DECUYPER (*Fac. des Sciences*, Lille), CHABAUTY (*Fac. des Sciences*, Grenoble), ROCHIAS (*C.T.*, Clermont-Ferrand), DEVIOSSE (Lillebonne), CHEVALLIER (*Marcelin-Berthelot*), Mme LAPOPTE (Toulouse), ALAIME (Verdun), GAIRARD (Privas), LEVASSORT (Luxeuil), SIGNORET (*Montaigne*, Bordeaux), ROUGIER (*E.N.P.*, Morez), SORGUS (*C.T.I.*, Strasbourg), COMMEAU (*Kléber*, Strasbourg), BÉQUÉ (Hérault), ESPRIET (Roubaix), GERLL (*E.N.I.*, Alger), MARVILLIET (*Kléber*, Strasbourg), PORQUET (Montivillier), NOYER (Mâcon), VAILLANT (*C.T.*, Sens), TULOUP (*Fustel*, Strasbourg), Mlle PUGET (Tunis), Mlle BARLUET (Limoges), MARGUINAUD (Saint-Junien), Mlle FÉLIX (*La Fontaine*), BOUYER (Le Havre), SEILLIER (Amiens), FÉE (Evreux), LOING (*E.N.I.*, Laval), MINOIS (*Saint-Louis*), RENAULD (Rennes), Mme MINOIS (*Marie-Curie*), LOUVET (Lille), LABBÉ (Médéa), LONGHI (Rohan), DOLLON (*Louis-le-Grand*), DUMARQUE (honoraire), Mlle FENART (Nice), BRISSET (Beauvais), MERLIN (*Montesquieu*, Bordeaux), CANONGE (Montpellier), GOURCUFF (Douarnenez), WEIL (*E.N.I.*, Carcassonne), AUNIS (*Saint-Louis*), GUILLOTIN (*E.N.I.*, Le Mans), Mlle LERER (*Molière*), VUILLAUME (Besançon), DAUDÉ (Marseille-Veyre), LÉVY (*Fustel*, Strasbourg), CONSTANTIN (Reims), RENAULT (Saint-Servan), Mlle MEUNIER (Bourg-en-Bresse), PLANE (Auxerre), Mlle DUFAY (Mende), Mlle VIÉ (Carcassonne), MAZALEYRAT (*C.C.*, Pléaux, Cantal), Mlle LASSALLE (La Tour-du-Pin), Mlle LECOQ (*Marie-Curie*), Mlle MULLER (Aix-les-Bains), DENÈGRE (Le Mans), EDDE (*E.N.I.*, Auteuil), MANUS (*Ampère*, Lyon), FALCOU (Carcassonne), CHAUVINEAU (*Henri-IV*), PERRICHET (*Saint-Louis*), SAMUEL (*Fac. des Sciences*, Clermont-Ferrand), BEAMURGUIA (Saint-Gaudens), PAIR (Metz), REGNARD (Carpentras), FAVRELLE (Lille), Mme HERPIN (*E.N.I.*, La Roche-sur-Yon), PAPAZIAN (La Seyne), BONNEAUDI (Nîmes), NEUMEISTER (*Fustel*, Strasbourg), Mlle CANNAC (Millau), CANHAPÉ (Saint-Servan), Mlle PUJOLLE (Bordeaux), Mlle BARBAGLIA (Tlemcen), KOHN, LOUQUET (Biarritz), POUILLAUDE (Cambrai), Mlle CANTON (*La Fontaine*), TINCHON (Boulogne-sur-Mer), Mme DROUOT (Beauvais), VANNOYE (Beauvais), CLANET (*E.N.T.*, Toulouse), LE DRIAN (Lorient), Mme NICOLAS (Saint-Cloud), DELAPIERRE (*E.M.P.*, Les Andelys), PFOHL (*Fustel*, Strasbourg), GENET (*Fustel*, Strasbourg), Mlle GUGNON (*Jules-Ferry*), SÉLOUDOUX (Antibes), LE CORRE (Casablanca), ISSENHUTH (Strasbourg), Mlle JEANOT (La Roche-sur-Yon), STOECKEL (*J.-Sturm*, Strasbourg), LEGRAND (Biarritz), JOLIVEAU (Romorantin), Mme CHÉROUX (Limoges), PLATEAU (Boulogne-sur-Mer), Mme LAVIGE (Beaune), MACHICOT (Montauban), BRESLE (*Faidherbe*, Lille), Mlle GUTTEL (*Molière*), GALLAND (Nancy), Mlle MOCQUERY (Verdun), EHRHART (*Kléber*, Strasbourg), THOVERT (*Ampère*, Lyon), VAILLANT (Foix), DAUTREVAUX (Belfort), Mme DAUTREVAUX (Belfort), Mme IMBERTY (Besançon), GIEARD (*Arago*), PROUTÉ (*Charlemagne*), FELDMANN (Mulhouse), FREDJ (Alger), Mlle ENJALBERT (Toulouse), Mme NICOD (Lyon), Mme VIOUGEAS (Lyon), Mlle BEYT (*E.N.I.*, Niort), MERMOZ (Orange), TAILLEFER (Alger), THÉOCLISTE (*C.N.T.*, Valence), THIBAUT (honoraire), BELGODÈRE (*C.N.R.S.*), FRIBOURG (Saint-Cloud), BEUCHEY (*E.N.I.*), GAL (Arles), TOURNASSOUD (Saint-Etienne), DELAURE (Charleville), BONTEMPS (*Lavoisier*), ROGNIAUX (*E.N.I.*, Arras), AMAR (*Thiers*, Marseille), Mlle LIMOGÉ (Barr), MARCHAND (Laval), GUTEKUNST (Colmar), PRADIER

(Issoire), MAILLOT (*Le Parc*, Lyon), Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*), GALÉAZZINI (Saint-Quentin), Mlle MARGAILLAN (*Montgrand*, Marseille), Mme DOMANGE (*Fénelon*), DUSSAUD (Chambéry), Mme KLEIN (Epinal), PUJOIS (Reims), LECLAIRE (Lille), PERAL (Clermont-Ferrand), LARCHER (Saint-Dizier), Mlle CLAVIER (Sèvres), FRETET (Quimper), Mlle COSTES (Montauban), TEXIER (Saintes), Mme CANONGE (Montpellier), LENTIN (*J.-Decour*), LE BESCOND (Tréguier), Mme SNYDERS (Lille), POUX (Saint-Cloud), BODIOU (*Fac. des Sciences*, Marseille), QUERRÉ (Rouen), LEPAGNOL (Rouen), LE MÉNAGER (Angers), HÉNAFF (Angers), HACHET (Angers), BRISSET (Angers), FRÉNOIS (Rouen), Mlle MASSON (*Marie-Curie*), HOUIN (Nancy), TRESSENS (Périgueux), CARTERON (Périgueux), CAMIAC (Millau), COLLOT, MIRGAUX, DEPAIX (*Henri-Poincaré*, Nancy), GLAESER (*Fac. des Sciences*, Nancy), MARTIN (*Fac. des Sciences*, Rennes), SÉNÉCAT (*Henri-IV*), VISSIO (*Lakanal*), CASSÉ (Savigny-sur-Orge), VILLIER (St-Quentin), LAFONTAINE (Périgueux), BENNEZON (*Henri-IV*), LAFORÊT (*Henri-IV*), DEBEY, CROZES (*Henri-IV*), DEMARY (Nancy), AUVRAY, NICOL, LE SQVIN (Rennes).

La séance est ouverte à 8 h. 45 par M. WALUSINSKI, Président, qui présente les excuses de Mlle FÉLIX, de MM. BIGUENET et CHAZAL, empêchés.

1. Rapport d'activité

M. WALUSINSKI donne quelques compléments au rapport publié dans le *Bulletin* 184.

Les effectifs de l'Association marquent une progression continue : 2 428 (au lieu de 2 207 lors de l'Assemblée générale 1956). L'objectif des 2 500 n'est cependant pas atteint ; il faut redoubler d'efforts, en particulier auprès des nouveaux Collègues. Que chacun d'entre nous, à l'occasion de toute rencontre avec des Collègues, fasse connaître l'existence de l'A.P.M. et les avantages qu'il y a pour tous ceux qui enseignent les Mathématiques à y adhérer.

Le renouvellement des cotisations a rencontré des difficultés dans certains cas particuliers, heureusement rares. Pour éviter le renouvellement des incidents désagréables, il est recommandé aux Collègues de désigner un *correspondant* local. Le prochain Bureau devra d'ailleurs se préoccuper de stimuler l'activité des sections régionales et locales ; c'est une condition d'efficacité pour notre travail commun.

Les votes émis par correspondance, reçus et dépouillés avant l'Assemblée, ont donné, pour 174 votants les résultats suivants, suivant les numéros des questions (chaque série de nombres donne les votes pour, contre, puis abstentions) : 1° (167, 1, 4) ; 2° (170, 0, 3) ; 3° (140, 15, 15) ; 4° (79, 61, 26) ; 5° (154, 3, 9) ; 6° (131, 4, 23) ; 7° (132, 1, 29) ; 8° (167, 0, 23).

M. WALUSINSKI signale le grand intérêt des remarques envoyées par de nombreux Collègues. La rédaction du *Bulletin* en tirera profit. Il relève que, parmi les critiques formulées, l'une concerne la candidature d'un Collègue, professeur de Cours Complémentaire au Comité ; il a suscité cette candidature, car il lui paraît souhaitable que les professeurs de Cours Complémentaire rejoignent en grand nombre l'Association ; nous devons grouper tous ceux qui enseignent les Mathématiques. M. PRÉVOST (du Lycée J.-B.-Say) a exprimé par écrit son opposition à ce point de vue : l'usage est d'appeler professeur qui est au moins licencié et inspecté par les Inspecteurs généraux du Second Degré ; il demande que l'A.P.M. soit consultée sur la question.

M. BAY fait alors remarquer que les professeurs de Cours Complémentaire sont administrativement des instituteurs, et que, d'autre part, ils n'enseignent pas seulement des Mathématiques.

M. WALUSINSKI répond que rien, dans les statuts, ne s'oppose à l'adhésion de

ces Collègues et que, d'un point de vue pédagogique et si l'on considère seulement l'intérêt de l'enseignement, il est bon que tous les maîtres coopèrent au sein de l'A.P.M.

La question de principe est alors renvoyée au Comité.

Le rapport d'activité est ensuite adopté à l'unanimité des présents.

2. Rapport financier

M. LEGRAND donne quelques compléments au rapport publié, ainsi que le chiffre des adhérents.

Le rapport financier est adopté à l'unanimité. M. WALUSINSKI interprète les sentiments de tous les Collègues en remerciant M. LEGRAND de la lourde tâche qu'il accomplit avec compétence. (*Vifs applaudissements*).

L'augmentation de cotisation est votée (moins deux voix, parmi les présents, 15 voix dans les votes par correspondance). Sur une question de M. MAGNIER, M. LEGRAND exprime l'avis que le taux de 800 F sera suffisant, avec l'appoint de la publicité. La question d'une subvention est aussi posée ; M. LEGRAND rappelle les échecs rencontrés sur ce plan et M. WALUSINSKI exprime l'avis que, de toute façon, nous devons être jaloux de notre indépendance. (*Approbation*).

La proposition de suppression des *Annales du Baccalauréat* a provoqué une réaction de la Librairie Vuibert qui a écrit une lettre dont il est donné lecture (la Librairie montre que les *Annales* nous sont servies au tarif le plus bas). Le vote sur cette question a été très partagé. M. LEGRAND fait remarquer que l'augmentation de la cotisation étant acquise, la question de la suppression des *Annales* ne se posera plus. Le Comité confirmera cette interprétation.

3. Horaires et programmes

M. WALUSINSKI rend compte de l'audience accordée par le Ministre au Bureau (cf. pages précédentes). La discussion s'engage sur l'amélioration de l'horaire, à laquelle participent MM. BAY et MAGNIER ; la préférence est générale pour améliorer surtout l'horaire de Troisième, de Quatrième et Cinquième ensuite, et de Sixième enfin seulement si c'est possible (il s'agit d'augmenter le plus rapidement possible le nombre des bacheliers de Mathématiques).

Le principe de l'amélioration progressive des horaires est accueilli avec satisfaction par tous les Collègues.

Pour le deuxième cycle, M. MAGNIER, pour frapper l'opinion, propose la suppression complète des Mathématiques dans les sections littéraires, puisque l'on manque de professeurs. M. WALUSINSKI ne s'y rallierait que provisoirement ; cependant, pour l'instant, l'effort doit être porté sur les sections scientifiques. Mlle VERVAECKE souhaite plutôt, pour ces sections, qu'on insiste sur les idées et qu'on ne rebute pas les élèves par des détails techniques. BAY pense également que c'est une question de programme ; il propose, d'autre part, des heures de « travail dirigé », à partir de la Seconde pour récupérer les retardataires.

L'Assemblée, compte tenu de ces remarques, fait confiance au Comité pour réaliser les vœux déjà formulés.

4. Baccalauréat

Le rapport et le vœu présentés par M. SIROS (Cf. *Bulletin* 185, p. 313-315) sont adoptés à l'unanimité. Observations de M. BAY (en faveur du retour au sujet par Académie, pour diviser le risque des fautes matérielles), de M. REVUZ (qui insiste sur la nécessité impérieuse de donner de *bons* sujets d'examen et non pas des énoncés qui doivent flatter l'amour-propre de leurs auteurs).

La question de la prolongation de l'épreuve (quatre heures au lieu de trois en

Mathématiques Élémentaires) donne lieu à un vote partagé : 14 pour, 16 contre, 5 abstentions déclarées.

L'ordre du jour étant épuisé, la séance est levée à 12 h. 30.

Élections au Comité

MM. ITARD, LEGRAND, SIROS et WALUSINSKI procèdent au dépouillement des votes qui donne les résultats suivants :

Votants : 242.

Sont élus membres du Comité : M. CROZES (195 voix) ; M. MOUGENOT (193 voix) ; Mlle VERVAECKE (171 voix) ; M. BAY (171 voix) ; Mlle MARCHAND (163 voix) ; Mlle BIARD (157 voix) ; M. CASSÉ (145 voix) ; M. LE MÉNAGER (135 voix).

Viennent ensuite : Mlle GOUKOWSKI (126 voix) ; M. GUILLORE (123 voix) ; M. DEVIOSSE (97 voix) ; M. BLANC (3 voix) ; MM. CUNEI, CARALP, LERICHE, KLEIN, PRADIER, PISOT, RAMUS, RICHE, SCHWARTZ, ZAMANSKY (chacun une voix).

Rapport sur les sujets d'examens 1956

Concours d'E.N. et B.E.P.C.

Il me faut d'abord signaler, au début de ce bref rapport, qu'aucun texte, aucune remarque, aucune critique ne m'ont été envoyés par les membres de l'Association en ce qui concerne les épreuves de 1956, en juin comme en septembre. Perfection des textes ? Manque d'intérêt de la question ? Les collègues présents à l'Assemblée générale pourront sans doute répondre.

Concours d'Ecole Normale (entrée en Seconde). — Dans son ensemble, l'épreuve nationale de juin s'est révélée normale, de difficulté moyenne et a dû classer suffisamment les candidats. Elle appelle toutefois quelques remarques qui prouvent à quel point s'avèrent difficiles le choix d'un sujet et la rédaction du texte, en raison des réactions parfois inattendues des élèves.

En algèbre, la question B, 1^{re}, a manifestement désorienté un grand nombre de candidats qui ont confondu la notion d'expressions algébriques équivalentes avec celle de fractions arithmétiques égales et non identiques. Evidemment, c'est avant tout le procès des locutions impropres (usage de « *fractions équivalentes* » en arithmétique) — en quoi les élèves ne sont pas responsables —, mais c'est un peu aussi le procès du texte qui aurait dû qualifier l'expression E, d'expression « *algébrique* » et porter « *fraction rationnelle équivalente* », et non fraction équivalente tout court. Ainsi les candidats auraient-ils vu clairement que la signification demandée de l'adjectif « *équivalentes* » concernait les « *expressions algébriques* » et non les « *fractions arithmétiques* » (comme avait pu le suggérer la question A). Par ailleurs, la question B, 2^e, prise à la lettre, était hors programme, puisqu'elle comportait la discussion (intéressante du reste) d'une équation paramétrique. L'inconvénient s'est révélé mineur, car il se présentait en fin de problème ; il n'en reste pas moins qu'il avantageait nettement les candidats en provenance de classes de Seconde, au détriment des jeunes élèves de Troisième. C'est là un écueil bien difficile à éviter.

En géométrie, on a pu reprocher au problème, dans son ensemble, de révéler davantage les qualités d'ordre et l'habitude du calcul que l'aptitude à suivre un raisonnement, à découvrir et enchaîner des propriétés géométriques véritables, objet essentiel de cette discipline. Il s'est trouvé aussi que la deuxième question a joué le rôle de question-barrage, et de barrage prématuré ; elle aurait pu être utilement reportée à la fin du problème, à la faveur d'une légère modification de rédaction et sans nuire, semble-t-il, à l'intérêt du texte.

B.E.P.C. -- La qualité des textes de B.E.P.C. s'améliore manifestement, au moins dans l'ensemble. Certaines Académies ont même essayé de sortir quelque peu du banal et du déjà vu, ne serait-ce que dans la forme. C'est le cas de Lille, Liban, algèbre ; Lyon, A.O.F., géométrie en juin ; Dijon, Grenoble, Liban, algèbre en septembre, et quelques autres encore, à un moindre degré. Il y a là un effort d'autant plus méritoire, que programme et niveau de la classe ne permettent guère de varier les sujets à l'infini.

Cet hommage rendu, il faut bien signaler encore un certain nombre d'imperfections. D'abord quelques questions, même simples, sortent des limites du programme : équation du second degré de Paris (Alg., 3°, juin), système paramétrique de Nancy (juin), « *équations horaires* » de Toulouse (juin). Ensuite, beaucoup de problèmes d'algèbre sont encore trop exclusivement des exercices de géométrie analytique (Poitiers, Réunion, Téhéran, en juin ; Clermont, Toulouse, en septembre) ; d'autres posent des questions équivoques, témoin Nancy (juin), qui demande de « *vérifier la solution* » d'un système, alors qu'il souhaitait faire retrouver par la résolution algébrique le résultat de la solution graphique (erreur déjà signalée l'an passé) ; d'autres encore contiennent de coupables négligences de rédaction, tels : Rennes et Téhéran (juin), qui se rejoignent pour proposer les mesures de « *segments de droite* » dési-

gnées par $\overline{AB}$, $\overline{OD}$, etc... ; le Liban, qui demande aux candidats de choisir une droite « *horizontale* » et évoque des éléments situés « *au-dessus* » et « *au-dessous* » de cette droite (géom., juin), sans compter les négligences de forme qui, pour être moins graves, ne sont pas pour autant excusables. Moins fréquentes que par le passé, elles demeurent cependant, dans trop de textes, comme la rançon des mauvaises habitudes acquises. On hésite à les mentionner par crainte d'une répétition fastidieuse, et, pourtant, n'est-il pas utile de les rappeler pour arriver à les éliminer ? Pourquoi donc « *abaisser* » des perpendiculaires (Paris, septembre), calculer « *des segments* » au lieu de leurs longueurs (re-Paris, sept.), tracer « *une* » parallèle au lieu de « *la* » parallèle (Strasbourg, sept.), dire « *expression algébrique* » pour « *valeur numérique* » de l'expression (Lille, sept.) et « *surface* » pour « *aire* » (Madagascar, juin ; Clermont, Strasbourg, sept.), etc., etc... ?

Une dernière remarque pour souligner une tendance en voie de prolifération dangereuse. Est-il bien indiqué — comme le font un nombre respectable d'Académies — de faire « *effectuer* », dans une première question, une expression algébrique dans laquelle des mises en facteur commun s'imposent ; puis, seulement dans une seconde question, de provoquer la transformation en produit. Dans la très grande majorité des cas, la première opération est, non seulement inutile, mais nuisible, par l'habitude néfaste qu'elle crée, alors que la seconde, seule, présente un intérêt ; c'est un défi au bon sens ! Sans doute a-t-on voulu contrôler l'aptitude du candidat à exécuter correctement un calcul sur les polynômes ? Alors, pourquoi ne pas choisir deux expressions totalement différentes : l'une où il y a avantage à « *effectuer* », l'autre où la transformation en produit est seule intéressante ? La fausse unité du problème n'y perdrait rien et la logique y gagnerait beaucoup.

R. EDDE.

RÉUNION DU COMITÉ

9 mai 1957

Présents : Mlles AFFRE, BIARD, DIONOT, FÉLIX, MARCHAND, MASSON, VERVAECKE ; Mme SCHUCK ; MM. BAY, BIGUENET, CASSÉ, CHAZAL, CROZES, DURRANDÉ, FOUCHÉ, GIRARD, HUISMAN, LEGRAND, MINOIS, MONJALLON, SIROS, THÉRON, WALUSINSKI.

Excusés : GUITTON, LE MÉNAGER, MARVILLET, MOUGENOT.

La séance est ouverte à 16 heures. WALUSINSKI salue les nouveaux membres du Comité et les félicite de leur élection. Puis il propose que la réunion soit présidée par Mlle DIONOT, Présidente d'honneur.

1. Election du Bureau. — Il y a 20 présents ayant le droit de vote ; deux pouvoirs signés par des excusés sont acceptés ; soit, au total, 22 votants.

Comme de coutume, l'élection du Président a lieu à bulletins secrets ; les résultats sont les suivants : WALUSINSKI, 20 voix ; HUISMAN, 2 voix.

Mlle DIONOT déclare WALUSINSKI élu et lui passe la présidence.

WALUSINSKI remercie les Collègues de leur nouveau témoignage de confiance ; il espère pouvoir mieux remplir les tâches qu'appelle la réforme de l'enseignement des Mathématiques. Pour mieux assurer le fonctionnement du Bureau, il propose, en même temps que les élections ou réélections suivantes, une certaine répartition des tâches. Sont alors élus à l'unanimité :

Vice-Présidents : Mlle MASSON (Enseignement féminin) ; MM. BIGUENET (Enseignement Technique), CHAZAL (Formation des maîtres), DURRANDE (Classes préparatoires aux Grandes Ecoles), EDDE (Ecoles Normales), MONJALLON.

Trésorier : M. LEGRAND.

Secrétaires : Mlle FÉLIX (Conférences) ; CROZES (Commission des recherches pédagogiques), GIRARD (Classes préparatoires), HUISMAN (Administration de l'A.P.M.), MOUGENOT (Relations avec les régionales) (1), SIROS (Commission des programmes).

Comité de rédaction : Mlles FÉLIX, MARCHAND ; MM. CHAZAL, ITARD, SIROS.

Secrétariat : HUISMAN, WALUSINSKI.

Le Bureau sera régulièrement réuni (en principe une fois par mois) et en tout cas une fois en juin. Il devra mettre au point la réorganisation des Commissions, ainsi qu'un plan pour constituer, partout où elles n'existent pas déjà, les « Régionales » prévues par les statuts.

2. Action générale : horaires et programmes. — WALUSINSKI rappelle l'audience accordée par le Ministre (voir plus haut), ainsi que les résultats de l'Assemblée générale.

Les vœux adoptés vont être transmis au Ministre.

WALUSINSKI informe le Comité des dernières intentions exprimées par la Direction générale du Second Degré : que les programmes de Mathématiques de toutes les classes du Second Degré (de la Sixième aux classes terminales) soient réformés, les nouveaux textes étant applicables au 1^{er} octobre 1957 ; que l'A.P.M. soit associée par MM. les Inspecteurs généraux à la rédaction des projets qui devront être soumis aux Conseils d'enseignement vers le 20 juin. Il est acquis qu'un projet d'amélioration de l'horaire dans les classes du premier cycle sera soumis aux mêmes Conseils ; ce projet porte à trois heures hebdomadaires, l'horaire de chacune de ces classes (sans qu'il soit précisé, pour l'instant, de quelle façon seront éventuellement organisées les séances de travaux pratiques).

Le Comité est unanime à considérer :

- 1° que cette amélioration de l'horaire est une première étape vers la réalisation des quatre heures hebdomadaires dont l'une de T.P. (avec dédoublement des effectifs) ;
- 2° qu'une refonte des programmes est souhaitable, qu'elle pourra corriger les

(1) En raison de l'absence de M. MOUGENOT, cette élection est subordonnée à l'accord de l'intéressé, accord donné depuis.

imperfections notoires de la modification intervenue en novembre 1956 (contre notre gré) et que l'A.P.M. est très désireuse d'apporter à la rédaction des projets officiels la contribution que lui permettent les travaux de sa propre Commission des programmes ;

3° cependant qu'une application brusquée de programmes trop hâtivement rédigée risque de compromettre la réforme désirée ; il faut demander un délai pour la rédaction complète et une application progressive (1) ;

4° que la question de la réforme simultanée des programmes de l'Enseignement Technique doit être posée (M. BIGUENET est chargé de cette démarche auprès de M. BUISSON).

MM. STROS et WALUSINSKI prendront contact avec les Inspecteurs généraux et M. BRUNOLD, pour agir selon ces directives.

3. Questions diverses.

-- *Annales du baccalauréat* : le vote de l'Assemblée générale a été partagé ; la cotisation ayant été relevée, il est décidé de maintenir le service des *Annales* aux adhérents.

— *Propagande* : le *Bulletin* d'octobre 1957 contiendra un encart (table des matières de la 36^e année et notice sur l'A.P.M.) qui devra servir de tract de propagande. L'organisation des sections régionales et locales, ainsi que toutes mesures capables d'étendre notre recrutement, seront soigneusement étudiées. Le Comité approuve l'idée d'une propagande parmi les professeurs de Cours Complémentaire.

— *Bulletin* : le projet d'Ecoles Scientifiques d'Été (présenté au Ministre), la motion sur l'enseignement de l'astronomie, la motion de la Régionale de Nancy seront publiés.

L'ordre du jour étant épuisé, la séance est levée à 18 h. 30.

Pour une économie de nos efforts, favorisons l'activité de nos « Régionales »

Le renouveau d'intérêt pour les études scientifiques va de pair et doit aller de pair avec un regain d'activité de ceux qui ont la charge d'enseigner les Mathématiques.

La critique de l'état actuel est dans toutes les conversations, que ce soit dans le domaine des programmes, des horaires, des emplois du temps, du matériel, des locaux ou des manuels. Il est souhaitable que les idées et suggestions de chacun aient un autre écho que celui des couloirs et des vestiaires. Ceux qui expriment ces avis n'ont pas toujours le goût ou le temps de les rédiger, mais ils peuvent les développer au cours de réunions dont les comptes rendus participent à l'élaboration et à la discussion de thèses sur lesquelles nous pouvons tous réfléchir, qui finissent surtout par être mieux et plus exactement connues ; les idées ainsi développées parviennent enfin à influencer sur les textes officiels.

Nous sommes d'ailleurs de plus en plus souvent sollicités par des enquêtes : récemment celle de l'administration au sujet des locaux et du matériel d'enseignement,

(1) La démarche a été faite et M. BRUNOLD a reconnu le bien-fondé de notre demande. Les projets présentés en juin ne concerneront que la Sixième et la Cinquième ; ils seraient appliqués en octobre 1957 ; les autres classes seraient étudiées d'ici décembre et l'application progressive en Quatrième et en Seconde serait poursuivie en octobre 1958.

parallèlement celle des « Cahiers pédagogiques » ou les questionnaires du groupe de Sèvres, etc... Il est plus rapide et plus efficace de grouper les réponses et d'en donner une rédaction déjà mise à l'épreuve d'une première discussion.

La lecture des manuels nouveaux est un devoir à l'égard de nos Collègues qui ont accepté le travail souvent ingrat de la mise au net de leur cours et de leurs exercices. Pouvons-nous y accorder tout le temps souhaitable ? En se répartissant la tâche à plusieurs, la critique est plus fouillée et le choix éventuel mieux justifié. Il en est de même pour les éditions de films fixes ou animés dont la recherche demande des démarches longues et désagréables ; ceux qui s'y engagent peuvent faire profiter les Collègues de leurs découvertes.

En outre, les colloques des « Régionales » ont la primeur des communications que nos Collègues se préparent à publier. L'existence de ces réunions peut même engager des Collègues à rédiger des travaux qui, sans cela, seraient restés ignorés (et la rédaction de notre *Bulletin* s'en trouvera la première bénéficiaire).

La proximité d'un établissement d'Enseignement Supérieur (Facultés et Grandes Ecoles) peut donner l'occasion de connaître les besoins ou les exigences des maîtres qui continueront la formation scientifique de nos élèves quand ils auront quitté nos établissements. La confrontation de nos méthodes de travail avec celles des autres ordres d'enseignement n'est pas sans intérêt, et cette remarque s'applique à chacun d'entre nous, à quelque ordre d'enseignement qu'il appartienne.

Et combien d'autres facilités peuvent apporter les « Régionales » ! C'est pourquoi le Bureau de l'A.P.M. désire favoriser leur développement. Il a chargé notre Collègue MOUGENOT (Lycée Henri-Poincaré à Nancy) de répondre à toute demande de renseignements qui lui serait adressée au sujet de l'organisation du travail des Régionales (que ces Régionales existent déjà ou soient à créer) : questions de trésorerie, liaison avec les centres pédagogiques régionaux, etc... Ils peuvent être assurés qu'une réponse aussi précise que possible leur sera faite dans le plus bref délai. Aux Collègues désireux de participer activement au travail de l'A.P.M. de prendre toutes initiatives utiles pour la rentrée 1957.

REGIONALE DE NANCY

Motion du 11 avril

A l'occasion du communiqué de presse de M. le Ministre de l'Education Nationale sur le recrutement de contractuels destinés à enseigner les Mathématiques en classe de Sixième à la rentrée prochaine,

La régionale de Nancy de l'A.P.M., à l'unanimité des présents, moins une abstention,

1° rappelle que la qualité de l'enseignement des débuts influe sur le développement ultérieur des études scientifiques ;

2° se déclare en conséquence irréductiblement opposée à toute solution tendant à confier l'enseignement des Mathématiques, même de Sixième, à des maîtres qui n'ont pas reçu une formation sanctionnée par l'Enseignement Supérieur et par l'Inspection générale.

Note sur les projets A.P.M. de nouveaux programmes

Classes de Seconde et Première : la distinction des deux classes faites en rejetant tout ce qui est métrique en Première a été bien acceptée et les volumes semblent s'équilibrer. Mais pourquoi aire de la sphère et pas celle des cônes et cylindres ?

Classe de Mathématiques Élémentaires : même accueil favorable pour l'ensemble

du projet, pourtant il y aurait à préciser à IV. Ex. de nénombrement, etc... ce qu'on veut exactement ; la suppression des intérêts composés serait bien accueillie ; on voudrait voir *introduire les nombres complexes* en raison de leurs liaisons avec les transformations étudiées dans cette classe, ainsi que des notions qui étaient plus ou moins virtuellement au programme de la classe en 1902, la *composition des vitesses* (utile en astronomie) et le *produit vectoriel*.

L'introduction de *l'involution* donnerait à bien des problèmes de faisceaux et à des problèmes sur l'équation du second degré une vue plus profonde qui en ferait saisir la parenté.

D'aucuns demandent l'introduction de *l'intégrale définie* dans les cas sans difficultés puisqu'on a fait le pas de la différentielle, pas d'ailleurs qui n'est pas franchi sans réserves.

Premier cycle. Sixième : est-ce voulu ou par oubli que la vitesse ne figure pas, ainsi que longueur et aire de la circonférence ? Oubli, sans doute. Les notions d'astronomie, auxquelles on pourrait ajouter les constellations, ne doivent être prises que comme thème d'études mathématiques à exploiter à la manière dont géographes, historiens et naturalistes font des « études du milieu » où, en vérité, malgré toute la bonne volonté qu'on y met, les Mathématiques ne s'introduisent qu'artificiellement, et sans grand profit, ni pour les Mathématiques, ni pour l'enrichissement de l'étude.

Cinquième : L'astronomie resterait un domaine ouvert, mais non d'enseignement magistral obligatoire. Le programme Mlle CLAVIER-Mlle MASSON donne satisfaction, aucune adjonction ne paraît souhaitable.

24 avril 1957.

LES JOURNÉES D'ÉTUDES SUR L'ASTRONOMIE

Les quatre journées (14-17 avril) organisées par l'A.P.M. sous le patronage de M. DANJON, ont été suivies avec grand intérêt par plus d'une centaine de Collègues. Cette affluence dépassait l'espérance des organisateurs.

Le programme des conférences (cf. *Bulletin* n° 185, p. 320) a permis de couvrir tout le front de la recherche astronomique actuelle. Les orateurs, chacun pour leur spécialité, ont eu à cœur de présenter simplement l'état des grands problèmes. Les participants posèrent des questions et recueillirent une documentation abondante de première main. L'édition d'une brochure illustrée, qui réunira ces conférences et servira à l'enseignement de l'astronomie, est préparée (publication prévue en octobre 1957) ; tous les lecteurs intéressés peuvent, dès maintenant, m'écrire pour en retenir un exemplaire.

La visite des Observatoires de Paris, de Meudon et de Nançay ne fut pas un des moindres attraits de ces journées. Tous les astronomes se dévouèrent sans compter pour nous expliquer sur place leurs travaux actuels ; signalons en particulier la présentation par M. DANJON de son astrolabe impersonnel ; celle des cellules multiplicatrices d'électrons par M. LALCÉMAND ; une projection sur écran de télévision d'une région ultra-violette du spectre du Soleil par M. MICHARD, à Meudon. Enfin, au pays du Grand-Meanlines, par une journée ensoleillée, ce fut la visite de l'Observatoire de radio-astronomie de Nançay, sous la conduite sympathique et savante de son directeur, M. DENISSE.

Si tous les conférenciers et tous les guides doivent être chaleureusement remerciés, je tiens à dire très publiquement la reconnaissance de tous les participants à M. DANJON qui, malgré l'importance de ses charges, a tenu à participer aux deux premières journées.

Nous exprimons également notre gratitude à M. Paul COUDERC, qui fut chaque jour sur la « brèche » des conférences après en avoir été l'organisateur.

La séance inaugurale, présidée par M. DANJON, plus particulièrement consacrée au problème de l'enseignement, et à laquelle nous ont fait l'honneur d'assister MM. les Inspecteurs généraux DEDRON, DESFORGE et DONTOT, s'est achevée par la présentation du vœu suivant :

Les professeurs participant aux journées d'étude sur l'enseignement de l'Astronomie, réunis le 14 avril 1957 à l'Institut d'Astrophysique de Paris, sous la présidence de M. André DANJON, Directeur de l'Observatoire de Paris, Président de l'Union Astronomique Internationale, et en présence de nombreuses personnalités, ayant entendu les conférences de M. DANJON et de M. Paul COUDERC, et participé à l'échange d'idées qui a suivi, entre spécialistes de l'Enseignement du Second Degré,

tiennent à présenter les observations suivantes et à formuler un vœu qui leur semble essentiel pour la rénovation des études et de la culture scientifiques en France :

I. OBSERVATIONS RELATIVES A L'ENSEIGNEMENT DE L'ASTRONOMIE

a) *Les découvertes de l'Astronomie contemporaine, indissociables de l'essor récent de la Physique, renouvellent l'intérêt de son étude et rendent son enseignement spécialement opportun et nécessaire.*

b) *Nul enseignement ne fait appel à des disciplines aussi variées, ne mérite mieux le nom de culture et ne prépare aussi bien à la réflexion philosophique.*

c) *L'Astronomie ne saurait se passer d'une lente initiation au cours de toute la scolarité. Les enfants trouveront dans son étude à satisfaire leur insatiable curiosité pour les phénomènes célestes et y découvriront l'emploi de leurs études de Mathématiques. L'expérience montre que, dès la onzième année, on peut leur proposer une activité simple et féconde en Astronomie.*

II. VŒU

a) *Il est possible et hautement souhaitable d'initier à l'Astronomie, très progressivement, les élèves à partir de onze ans (Second Degré, Technique, éventuel enseignement moyen). Les heures nécessaires seraient prises sur le temps dévolu aux travaux pratiques de Mathématiques, en supposant que ceux-ci soient effectivement organisés.*

b) *Cet enseignement, orienté vers l'observation, aurait une grande valeur éducatrice (apprentissage de la recherche, formation du jugement et du caractère). Il devrait être donné à des groupes de quinze élèves au maximum. Son programme serait simple : connaissance concrète du Ciel et des astres principaux, découverte des phénomènes périodiques naturels et de leurs lois (lunaisons, saisons, éclipses, etc...) ; emploi d'instruments élémentaires d'observation et de mesure ; application à l'orientation, à la géographie. Cet enseignement initierait aux méthodes en se gardant de surcharger la mémoire.*

c) *A partir du second cycle, sur les bases solides précédemment établies, un enseignement plus théorique de l'Astronomie pourrait être donné, en liaison avec les programmes de Mathématiques, de Physique et de Philosophie. Des activités pratiques plus poussées pourraient être facultatives (clubs d'astronomie, activités dirigées, etc...).*

d) *L'administration de l'Education Nationale devrait mettre à la disposition des maîtres les moyens propres à assurer cet enseignement :*

documentation : ouvrages et bulletins de la Société Astronomique, annuaires, clichés, cartes, projections et films ;

matériel bien compris (qui pourrait être trouvé à un prix d'autant plus bas que la construction en serait mieux rationalisée) ;

organisation de stages d'information, dont les journées du 14 au 17 avril pourraient être l'exemple.

*
**

En tant que responsable de l'organisation matérielle de ces journées, je remercie tous les participants de m'avoir tellement facilité la tâche. J'ai été particulièrement sensible à leur témoignage d'amitié et je leur en exprime ma sincère reconnaissance ; qu'ils m'excusent de n'avoir pas répondu à chacun d'eux.

Il n'y a plus qu'à poser une question : sur quel sujet et en quel lieu organiser des journées d'études au printemps 1958 ? N'est-ce pas ce que signifie la remarque à l'encre rouge faite par un Collègue au coin d'une carte postale : « à refaire » ?

G. W.

Le bloc-notes de l'A.P.M.

● Les Bulletins.

Le dernier *Bulletin* de la 36^e année est celui qui contient les énoncés des grands concours ; il portera le n° 186 et paraîtra en septembre.

Les *Bulletins* de la 37^e année seront les suivants : n° 187, octobre (encart avec table des matières de la 36^e année) ; n° 188, décembre ; n° 189, *Annales du Baccalauréat* ; n° 190, *Annales du B.E.P.C.* ; n° 191, janvier ; n° 192, mars (préparation de l'Assemblée générale 1958) ; n° 193, mai ; n° 194, septembre.

La complète publication des conférences sur la topologie est préparée pour s'achever en décembre 1957.

● Changement d'adresse.

G. WALUSINSKI signale qu'à partir du 1^{er} août 1957 sa nouvelle adresse sera : 26, parc de la Bérangère, St-Cloud (S.-et-O.).

● Lettre aux personnes qui s'intéressent au Calcul numérique.

Les signataires de cette lettre vous proposent de grouper les personnes qui, en France, s'intéressent au Calcul numérique, en une Association comme il en existe dans la plupart des autres spécialités.

Les principales activités envisagées seraient :

— des conférences régulières là où il existe un noyau suffisant d'auditeurs. En ce qui concerne Paris, l'Association prendrait la succession du groupe de Calcul numérique ;

— des informations sur ce qui se passe en France et à l'étranger dans le domaine du Calcul. Dans cette intention, l'Association s'efforcerait, en première urgence, de lancer une revue spécialisée ;

— des congrès nationaux où des spécialistes étrangers pourraient être invités.

Une telle association est infiniment plus qualifiée pour organiser des activités sur le plan national ou pour agir auprès des pouvoirs publics, qu'une Université ou un tout autre organisme particulier. Elle ne fait double emploi avec aucune association existante.

L'Association serait déclarée et fonctionnerait sur le modèle habituel des associations scientifiques. Son siège serait, en principe, à Paris. Une cotisation (de l'ordre de 1 500 à 2 000 francs) serait demandée.

Il est nécessaire que nous soyons assurés au départ d'un certain nombre d'adhésions. Nous vous demandons, si vous avez l'intention d'adhérer à la future association, de renvoyer remplie la feuille ci-jointe (1), soit à M. DE LACROIX DE LAVALETTE, 23, rue Las-Cases, à Paris, soit à M. KUNTZMANN, Institut Fourier, place Doyen-Gosse, à Grenoble.

Dès que nous aurons reçu une centaine d'adhésions, nous entreprendrons les démarches de création de la société et la mise en route de ses activités.

Dans l'espoir d'une réponse favorable,

Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de nos sentiments distingués.

Ont signé cette lettre :

MM. A. DANJON, G. DARMOIS, J. PÉRÈS, *Membres de l'Institut.*

MM. CARIÉRON (Electricité de France), KUNTZMANN (Université de Grenoble), DE LACROIX DE LAVALETTE (Groupe de Calcul numérique), MALAVARD (Université de Paris), RIGAL (Astrophysique), ROBIN (Centre National d'Etudes des Télécommunications), VILLE (Université de Paris).

(1) Indiquant nom, prénom, adresse, profession et spécialité.

DELAGRAVE

COURS DE MATHÉMATIQUES

H. SCHAEFFER - J. LEBAILLE

Volumes 14,5 × 20

ARITHMÉTIQUE, Classe de 6^e

Broché... 255 » Cartonné... 345 »

MATHÉMATIQUES, Classe de 5^e

Broché... 390 » Cartonné... 480 »

MATHÉMATIQUES, Classe de 4^e

Broché... 520 » Cartonné... 620 »

Sous presse : **MATHÉMATIQUES, Classe de 3^e**

Le Gérant : G. WALUSINSKI.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 91.083. — Dépôt légal : II-1957

GAUTHIER - VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VI° — DANton 05-10



BETH (E. W.)

Professeur à l'Université d'Amsterdam

LA CRISE DE LA RAISON ET LA LOGIQUE

Fascicule XII de la collection de Logique Mathématique. Série A.

In-8° (16-25), 50 pages, 1957 900 F

KEREKJARTO (B.)

LES FONDEMENTS DE LA GEOMETRIE

Tome I: La construction élémentaire de la géométrie euclidienne.

In-8° (17-24,5), 340 pages, 167 figures, 1955 1.800 F

MONTEL (P.)

Membre de l'Institut

LEÇONS SUR LES RECURRENCES ET LEURS APPLICATIONS

In-8° (16-25), X-268 pages, 16 figures, 1957 4.300 F

RISSER (R.) et TRAYNARD (C. E.)

LES PRINCIPES DE LA STATISTIQUE MATHEMATIQUE

Livre I: Statistiques Mathématiques. Fascicule IV de la collection du
Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications. In-8°
(16-25), XVI-195 pages, 2 figures, 2° édition revue et augmen-
tée, 1957

3.500 F

Vient de paraître :

COMMENT POSER ET RÉSOUDRE UN PROBLÈME

Mathématiques, Physique, Jeux, Philosophie

par

G. POLYA

Traduit de l'américain par C. MESNAGE

Préface de G. DARMOIS, de l'Académie des Sciences

**« Une synthèse originale des méthodes de solutions
applicables à toutes les disciplines scientifiques. »**

Un vol. de 220 pages, avec 30 figures. Broché **960 F**

en librairie et chez

DUNOD Éditeur, 92, rue BONAPARTE - Paris 6^e

LES INVENTIONS MATHÉMATIQUES LAFAY *rendent tout calcul facile*

Ces inventions consistent en un ensemble de conceptions nouvelles et d'appareils simples dont l'emploi, autorisé aux examens du bac et aux concours d'entrée aux grandes écoles, augmente énormément les chances de réussite des candidats.

Ces inventions, toujours en voie de développement, sont trop nombreuses pour pouvoir être décrites ici. Voici un simple aperçu de deux d'entre elles :

LES HELICES A CALCUL permettent d'exécuter les multiplications, divisions, règles de trois (simples ou en chaîne) et les calculs logarithmiques avec une **précision bien supérieure** à celle des meilleures règles ou cercles à calcul.

LES TABLEAUX-GRAPHIQUES EN POCHETTE-CURSEUR fournissent sans interpolation et avec précision les valeurs simultanées de toute une série de fonctions, dont n'importe laquelle peut être prise comme la variable indépendante dont toutes les autres dépendent. Par exemple le tout petit tableau graphique des lignes trigonométriques naturelles fournit simultanément les valeurs des **sin ; cos ; tg ; cotg ; sec** dans les quatre systèmes de division angulaire : **degrés ; grades ; radians** et **heures**, ceci avec une précision toujours régulière et également sensible sur chacune des fonctions. Sur ce tableau, cette précision correspond à celle d'un instrument fournissant les mesures d'angle à une minute de degré près.

Contre timbre-réponse, envoi de la documentation ordinaire. Contre 100 francs versés au C.C. de A. LAFAY, mathématicien, 7, rue Gambetta, Saint-Chamond (Loire), C.C. postal Lyon 73-10, envoi de notices et de tables-graphiques présentant à la fois un immense intérêt théorique et une immédiate utilité pratique.

J.-B. BAILLIÈRE et Fils, 19, rue Hautefeuille, Paris-VI^e

COURS de MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

*A l'usage des candidats à la licence ès sciences mathématiques ou physiques
et des élèves des écoles d'ingénieurs*

par **Robert DELTHEIL**

*Recteur honoraire de l'Académie de Toulouse
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse*

- TOME I : Compléments d'Algèbre et de Trigonométrie. Premières notions de Géométrie analytique. Éléments de Calcul différentiel.** Un vol. (23,5 × 18,5) de 383 pages et 161 figures **2 500 F**
- TOME II : Éléments de calcul intégral. Applications géométriques de l'analyse.** Un vol (23,5 × 18,5) de 400 pages et 200 figures **2 500 F**
- TOME III : Mécanique** **2 000 F**

COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

- TOME I : Algèbre linéaire et Calcul différentiel.** Un vol. (18 × 22) de VIII-200 pages, avec 15 figures **1 500 F**
- TOME II : Calcul intégral. Fonction d'une variable.** Un vol. (18 × 22) de 240 pages, avec figures **1 800 F**
- TOME III : Equations différentielles. Calcul symbolique.** Un vol. (18 × 22) de 310 pages avec 60 figures **2 000 F**

PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

correspondant aux cours des tomes I et II

par **Robert DELTHEIL**

- TOME I : Un volume de 208 pages avec 130 figures** **1 800 F**
- TOME II : Un volume de 269 pages avec 88 figures** **2 000 F**

*Les Cours et Problèmes de mathématiques ci-dessus sont fournis en spécimens
aux Professeurs à 50 %*

HISTOIRE GÉNÉRALE DES SCIENCES

en 3 volumes illustrés



Directeur : **R. TATON**

I. LA SCIENCE ANTIQUE ET MÉDIÉVALE

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

MASSON & C^o, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE

NOUVEAUTÉ :

NOUVEAUTÉ :

ARITHMÉTIQUE

Classe de Mathématiques

par

Y. CROZES

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

Un fort volume ($15,5 \times 21,5$) de 412 pages, avec figures, exercices
et problèmes, broché fort **2.400 F**

RAPPEL :

**ALGÈBRE
ET
TRIGONOMÉTRIE**

EN PRÉPARATION :

GÉOMÉTRIE

Classe de Mathématiques

par

J. COMMEAU

Professeur agrégé au Lycée Kléber, à Strasbourg

Un fort volume ($15,5 \times 21,5$) de
512 p., avec figures, exercices et
problèmes ; broché **1.970 F**

Un fort volume ($15,5 \times 21,5$) avec
figures, exercices et problèmes ;
broché **Novembre 1957**

ÉDITIONS DE GIGORD, 15, rue Cassette, PARIS - VI°

NOUVELLE COLLECTION DE MATHÉMATIQUES

par Pierre BOUTIN

*ancien élève de l'Ecole normale supérieure
professeur agrégé au lycée Janson-de-Sailly*

Viennent de paraître :

ARITHMÉTIQUE, classes de Cinquième, Quatrième et Troisième 760 fr.

ALGÈBRE, classes de Quatrième et Troisième 760 fr.

GÉOMÉTRIE, classes de Cinquième, Quatrième et Troisième 980 fr.

Ces trois volumes contiennent à la fois le programme de l'enseignement du second degré et celui des cours complémentaires.

Les livres du maître seront ceux des Mathématiques, classes de Cinquième, Quatrième, Troisième, munis d'une table de concordance.

Parus antérieurement :

MATHÉMATIQUES, classe de Sixième (Enseignement du second degré et cours complémentaires) 470 fr.

MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième classique et moderne 540 fr.

MATHÉMATIQUES, classe de Quatrième classique et moderne 550 fr.

MATHÉMATIQUES, classe de Troisième classique et moderne 850 fr.

Les livres du maître de Sixième, Cinquième et Quatrième sont parus. Prix respectifs : 700, 750 et 900 fr. Celui de Troisième sera prêt en septembre 1957.

PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROGRAMMES A_1 et A_2

PAR

R. GUYON

Ancien élève de l'Ecole normale supérieure
Agrégré des sciences mathématiques
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse



OUVRAGE CONFORME AUX NOUVEAUX PROGRAMMES
APPLICABLES AU 1^{er} OCTOBRE 1956



Vol. 16×24 cm., de 658 pages, relié
pleine toile : **6.300 F**

On vend encore, séparément :

Deuxième fascicule, vol. 16×24 cm., de 288 pages, broché
(paru en décembre 1956) **2.700 F**

Le **Premier fascicule**, paru en octobre 1956, est épuisé. L'ouvrage ne sera plus mis en vente dorénavant que sous la forme reliée.



LIBRAIRIE VUIBERT

63, boulevard Saint-Germain, PARIS, V°



encyclopédie française

(Fondateur : Anatole de Monzie)

tome I

l'outillage mental

(pensée, langage, mathématique)

Ce volume, épuisé depuis longtemps, fait l'objet d'une réimpression augmentée et refondue.

La partie Mathématique, notamment, est entièrement remise à jour sous la direction de Paul Montel, membre de l'Institut, qui a rédigé un cahier supplémentaire sur **l'Evolution de la Science mathématique depuis 1940**. Un autre cahier, dû à L. Couffignal et P. Schutzenberger, traite de la **Cybernétique**.

Un volume (25 x 30 cm), 480 pages, nombreuses figures dans le texte, 10 planches hors texte, index ; sous reliure mobile spéciale : 8 400 F (taxe locale incluse). Facilités de paiement.

LA SÉMANTIQUE, LA MATHÉMATIQUE, LA CYBERNÉTIQUE, cahier de synthèse et d'Actualité de 84 pages, complétant et mettant à jour le précédent tirage (épuisé) de ce volume : 875 F (taxe locale incluse).

EN VENTE CHEZ TOUS LES LIBRAIRES



LAROUSSE
DÉPOSITAIRE GÉNÉRAL

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

ARITHMÉTIQUE 6° (<i>Jusqu'à épuisement</i>)	220 F
ARITHMÉTIQUE 6° — Nouvelle édition mise à jour	330 »
<i>Corrigé des exercices de 6°</i>	300 »
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5°	185 »
GÉOMÉTRIE 5° et 4°	400 »
ARITHMÉTIQUE 5° — Nouvelle édition mise à jour	450 »
<i>Corrigé des exercices de 5°</i>	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4°	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3°	390 »
GÉOMÉTRIE 3°	325 »
GÉOMÉTRIE 5°, 4°, 3°	800 »
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages cartonné).	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3° MODERNE COURT.	100 »
ALGÈBRE 2° A.B.C.M.	500 »
GÉOMÉTRIE 2° A.B.C.M.	465 »
ALGÈBRE 1 ^{re} A.B.	180 »
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1 ^{re} C.M.	550 »
GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A.B.C.M.	500 »

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	390 »
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	410 »

nouveauté

Le DICTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES

de A. JOLY est un « Guide », c'est-à-dire un ouvrage simple qui permet de retrouver un renseignement vu dans un manuel.

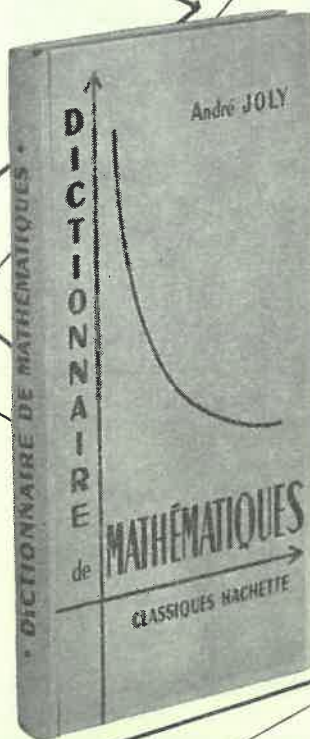
- Il est précédé de CONSEILS pour la rédaction des devoirs et de TABLES NUMÉRIQUES NOUVELLES.

- Il contient le REPERTOIRE ALPHABÉTIQUE de toutes les définitions, règles, propriétés, qu'un élève doit apprendre.

- UN CHIFFRE DISTINCTIF indique à quelle classe s'adresse chaque article.

- Des tableaux, des dessins, des exemples ajoutent à la clarté de l'exposé.

Cet ouvrage permettra la recherche des problèmes et la préparation aux examens.



Un volume 11,5 × 21,5 cm de 256 p., illustré de 460 figures, broché. 380 »
cartonné. . . . 490 »
(+ T. L.)

HACHETTE