

Unification des termes et symboles

(Enquête permanente)

Facteurs d'un produit ou fonctions de fonctions ?

QUESTIONNAIRE.

1) Dans l'écriture de la multiplication (école primaire), faut-il distinguer par leur place le multiplicande et le multiplicateur ? Lequel placer à gauche ? Lecture correcte.

2) La lettre indiquant l'unité doit-elle être placée à droite ou à gauche ? Lecture.

3) Une transformation ponctuelle doit-elle être écrite sous forme d'une fonction ou sous forme d'un produit ? La composition de plusieurs transformations ponctuelles doit-elle être indiquée comme fonction de fonction ? comme produit ? dans ce cas, dans quel ordre écrire les facteurs du produit ? Dans quel ordre les lire ?

4) Règle de multiplication des matrices.

RAPPORT SUR CE QUESTIONNAIRE.

Nous rassemblons les remarques et arguments bien connus dans l'espoir d'abrégier la discussion. Il semble urgent qu'un vote décide des conventions que l'Association recommande dans l'Enseignement du Second Degré.

1) La multiplication. — *a)* Malgré la commutativité de l'opération, la distinction d'un multiplicande et d'un multiplicateur semble nécessaire pour l'enfant. Actuellement la règle est d'écrire le multiplicande à gauche. Le multiplicande et le produit sont de « même espèce », c'est-à-dire appartiennent au même ensemble ; le multiplicateur est un « nombre abstrait », c'est-à-dire un scalaire. L'ensemble des nombres est un domaine d'opérateurs : il s'agit d'une opération externe.

b) Au moment de l'introduction des lettres, on décrète que si l'un des facteurs est un nombre et l'autre est représenté par une lettre, le nombre doit être placé à gauche.

Une pomme vaut n francs ; le prix de 30 pommes est $30n$ francs.

Une pomme vaut 30 francs ; le prix de n pommes est $30n$ francs.

A ce stade, on convient de supprimer le signe de multiplication.

c) La première opération externe avouée comme telle est le produit d'un vecteur

(ou d'un segment) par un nombre : « Prendre » les $\frac{2}{3}$ de AB. Multiplier un vecteur par un nombre (dès la Quatrième, si l'on introduit par ce moyen les nombres relatifs).

On écrit $\vec{V}' = k\vec{V}$. Le scalaire k est un multiplicateur, un opérateur. On l'écrit à gauche du multiplicande $\vec{V}$, de sorte que $(4\vec{V}) \times 3$ s'écrit $(4 \times 3)\vec{V}$.

d) Ceci est comparable à l'écriture où l'unité est spécifiée. Dire qu'une pomme vaut 30 francs, c'est aussi considérer 30 comme un multiplicateur. On écrit 30 F, mais les comptables écrivent aussi F 30. Alors 4 pommes valent 30×4 F, ou bien $F 30 \times 4$.

Deux attitudes du maître :

a) Les unités doivent être indiquées au début et dans les réponses, jamais au cours des calculs. (Trop abstrait pour les jeunes enfants).

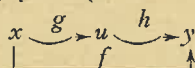
β) Commencer toujours l'indication des calculs par l'unité 1 F $\times$ 30 $\times$ 4.

c) Un produit de plusieurs facteurs s'écrit et se lit de gauche à droite. Ainsi $abcd$ signifie $\{ [(ab)c]d \} e$.

2) Fonctions et fonctions de fonctions. — Une fonction s'indique par

$y = f(x)$ au sens de $x \xrightarrow{f} y$.

Une fonction de fonction $\begin{cases} u = g(x) \\ y = h(u) \end{cases}$ s'écrit $y = f(x) = h[g(x)]$.



On remarque que l'absence de signe devant les parenthèses n'indique plus un produit. Ceci est parfaitement accepté par les élèves.

Comparaison avec la notation de produit

Dans le cas $u = g(x) = mx$, $y = h(u) = pu$, $h[g(x)] = p(mx)$ et la suppression de la parenthèse change l'ordre des opérations.

Si l'on a écrit $u = g(x) = xm$, $y = h(u) = up$, $h[g(x)] = (xm)p$, et la suppression de la parenthèse ne change pas l'ordre des opérations.

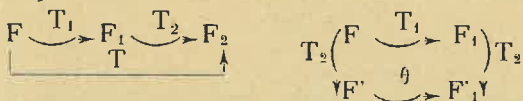
Remarque : $u = \sin x$, $y = u^2$; $y = (\sin x)^2$ s'écrit $y = \sin^2 x$. Ceci correspond à écrire $f(x) = h[g(x)]$ sous la forme ghx .

Ceci conduirait, dans le cas de $u = \sin x$, $y = u^2 - 3u + 1$, à écrire

$$y = (\sin^2 x - 3 \sin + 1)x$$

acceptable pour des initiés, mais hors de question dans nos classes !

3) Composition des transformations ponctuelles. — Il s'agit de traduire le schéma de *composition* de T_1 , suivie de T_2 , qui donne T , ou le schéma de *transmutation* de T_1 par T_2 , qui donne θ .



a) Si l'on considère une transformation comme une fonction, il n'y a aucune difficulté de transcription. On écrira : $F_1 = T_1(F)$; $F_2 = T_2(F_1) = T_2[T_1(F)]$, et, en notant par exemple T^* la transformation inverse de T .

$$F'_1 = \theta(F') = T_2 \circ T_1 [T_2^*(F'_1)]$$

Mais qu'écririons-nous si nous désirons omettre la spécification de l'ensemble qui subit les transformations ? En Mathématiques élémentaires, on n'a jamais omis d'écrire le nom de la variable. On n'a pas l'habitude d'écrire $\sin^2 - 3 \sin + 1$.

b) Le plus souvent ont parlé de « produit » de transformations. Chacune étant considérée comme un opérateur, donc un multiplicateur, la loi de composition externe

pourrait s'écrire $F_1 = F \times T_1$ et la composition de deux ou plusieurs transformations s'écrira :

$$F_2 = F \cdot T_1 \cdot T_2, \text{ au sens de } (F \cdot T_1) \cdot T_2,$$

$$F_3 = F \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \text{ au sens de } [(F \cdot T_1) \cdot T_2] \cdot T_3,$$

le signe de multiplication pouvant être omis. Le produit des opérateurs s'indique donc tout naturellement (comme, par exemple, pour le produit de deux fractions) :

$$T = T_1 T_2, \quad T T_3 = T_1 T_2 T_3 = (T_1 T_2) T_3.$$

Alors T^* s'écrit T^{-1} et $\theta = T_2^{-1} T_1 T_2$.

Ceci est l'écriture habituelle des produits, de gauche à droite. C'est ce que les élèves trouvent naturel de faire et que l'on trouve dans les livres qui ont un réel souci pédagogique, comme l'Algèbre moderne de BIRKHOFF et MAC LANE, ou celle de CHÂTELET.

c) Signalons (Note du livre de CHÂTELET, p. 83) que l'on a utilisé aussi une notation par exposants $F_2 = (F T_1) T_2 = F T_1 T_2$ qui, bien que très défendable, semble peu usitée.

d) Malheureusement, de nombreux livres et cours d'enseignement supérieur utilisent une conception de fonctions de fonctions avec une notation de produit.

On pourrait convenir, pour simplifier l'écriture de $T_2 [T_1(F)]$, d'écrire en suivant le travail, comme toujours, de gauche à droite, $F T_1 T_2$. Mais on a choisi d'écrire $T_2 T_1 F$ au sens de $T_2 (T_1 F)$ et $T_3 T_2 T_1$ au sens de $T_3 (T_2 T_1)$. On lit presque toujours de droite à gauche, en suivant la pensée. Les inconvénients sont évidents pour l'étudiant qui prend des notes. Du reste, au niveau de l'enseignement supérieur, qu'importe ? Les étudiants, non seulement acceptent les conventions qu'on leur propose, mais encore passent fort bien d'une notation à l'autre en changeant de livre ou de cours. Mais il n'en est pas de même dans le second degré. Il est, je crois, encore temps, pour l'Association des Professeurs de Mathématiques, de choisir en toute liberté les conventions à recommander dans l'enseignement secondaire, où elles deviendront uniformes et, en quelque sorte, officielles.

4) Représentation des transformations linéaires par les matrices. — Il est de plus en plus usuel de faire une première introduction des matrices pour la traduction de quelques questions de Mathématiques élémentaires, afin d'éviter à l'étudiant qui aura besoin de cet outil dans son apprentissage technique ou scientifique de se sentir dépaycé par une rupture trop brusque de ses habitudes.

(On trouvera les indications utiles dans le récent article de M. BOSTEELES, *Bulletin* de janvier 1956, n° 175).

Au point de vue matriciel, la composition de deux transformations linéaires est considérée comme un produit. Si le vecteur donné subit T_1 , puis le vecteur obtenu, T_2 , en écrivant les deux équations

$$\begin{cases} x_1 = a_1 x + b_1 y, \\ y_1 = c_1 x + d_1 y, \end{cases}$$

l'une sous l'autre suivant l'usage, on est conduit nécessairement aux conventions : un vecteur se représente par une matrice formée d'une colonne. Une transformation linéaire par une matrice carrée

$$T_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \text{ que l'on écrit parfois}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

et la matrice qui représente la transformation composée de T_1 , suivie de T_2 , est telle que chaque élément de T_1 conserve son numéro de colonne et chaque élément de T_2 conserve son numéro de ligne, puisque l'on trouve

$$T = \begin{vmatrix} a_1 a_2 + c_1 b_2 & b_1 a_2 + d_1 b_2 \\ a_1 c_2 + c_1 d_2 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{vmatrix}$$

Seulement, naturellement, suivant que l'on écrit $T = T_1 T_2$, ou $T = T_2 T_1$, la règle explicite du produit (puisqu'il n'est pas commutatif), sera différente.

Conclusion. — N'est-il pas souhaitable, n'est-il pas possible de mettre un peu de cohérence dans les notations de l'algèbre que nous enseignons dans nos classes du Premier et du Second Degré ?

L. FÉLIX.

P.-S. : LE VOCABULAIRE DES DÉPLACEMENTS.

Pourrions-nous nous mettre d'accord sur les mots *déplacements plans*, *antidéplacements plans*, *déplacements dans l'espace*, *antidéplacements dans l'espace*, *figures égales*, *figures antiégales* ?

Acceptons-nous ces termes et abandonnons-nous les expressions telles que : « figures égales », « déplacements indirects », « déplacements avec retournement », « déplacement avec changement de sens », etc...

De même, naturellement, pour les figures semblables et antisenblables.

Il semble que l'entente pourrait être obtenue et l'on demanderait que la décision soit rendue officielle dans les programmes ou les instructions.
