

≡ V. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE ≡

AXIOMATIQUE ET REDÉCOUVERTE

Rapport 1957

Ce rapport consiste en une bibliographie sommaire. Nous indiquons ci-dessous quelques ouvrages d'information sur les axiomatiques les plus utiles à notre enseignement élémentaire.

1. L'axiomatique de HILBERT

Notre enseignement le plus traditionnel repose sur la géométrie d'Euclide, géométrie codifiée par HILBERT : *Grundlagen der geometrie*, Leipzig, 1899. Les éléments de base en sont les points, les droites et les plans. L'étude en est faite en cinq étapes : appartenances, ordres, congruences, directions, continuité. Voici quelques classiques de cette géométrie :

HALSTED. *Rational geometry. A text book for the Science of Space*, London, 1904. Une traduction française a été faite par P. BARBARIN et publiée par Gauthier-Villars, Paris, 1911. Cet ouvrage est malheureusement difficile à trouver en librairie.

L. GODEAUX. *Les géométries*. Collection Armand Colin, Paris, 1937. On y trouvera, au chapitre IV consacré aux principes de la géométrie, la liste des axiomes de HILBERT. En outre, cet ouvrage, bien que modeste de dimensions, permet d'effectuer un survol des géométries de LOBATCHEFSKI et de RIEMANN, des géométries affines, arguésiennes et projectives. Pour comprendre la Galaxie, il faut avoir contemplé ANDROMÈDE, de même pour comprendre la géométrie euclidienne, il faut l'avoir vue parmi d'autres géométries. Ainsi, l'exemple prend toute sa valeur formatrice s'il est serti de contre-exemples.

BELA KEREKJARTO. *Les fondements de la géométrie* (Tome I) (Akademiai Kiado, Budapest). Cet ouvrage, achevé en 1946, a été édité en français en 1955. Cette version française est actuellement en vente chez Gauthier-Villars. C'est, à ma connaissance tout au moins, l'exposé le plus récent de la géométrie hilbertienne. Conjointement, l'auteur développe d'ailleurs une axiomatique qui lui est propre et qui diffère de celle d'HILBERT en ceci : HILBERT codifie séparément la congruence des segments et celle des angles, puis il lie ces deux codifications en postulant l'un des cas d'égalité des triangles ; KEREKJARTO codifie seulement la congruence des segments, mais il pousse cette codification assez loin pour pouvoir en faire surgir une théorie des figures isométriques.

2. L'axiomatique de M. G. CHOQUET

Cette axiomatique, qui fut présentée par M. G. CHOQUET au cours de conférences faites pour l'Association des Professeurs de Mathématiques, est aujourd'hui rédigée dans l'ouvrage suivant :

L'enseignement des Mathématiques, publication collective de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques ; rédigée par MM. PIAGET, BETH, DIEUDONNÉ, LICHNEROWICZ, CHOQUET et GATTIGNO ; éditée en Suisse par Delachaux et Niestlé. C'est au chapitre V, intitulé « Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire », que M. G. CHOQUET, après un bref examen critique des manuels et un aperçu sur la pluralité des prémisses, expose sa construction originale de la géométrie classique. Le développement s'effectue en trois sections : I. La géométrie de la droite Δ : ordre total et congruence des couples ponctuels. II. La géométrie du plan : distance et mesure par Δ , jonction de deux

points par une droite, régions et retournements, parallélisme. III. Etude des isométries et de l'orientation. L'exposé se termine par trois notes : structure de corps annexée à une droite, plans euclidiens non archimédiens, exemple de plan non-euclidien. De nombreux collègues nous ont écrit pour nous demander des informations sur l'axiomatique de M. G. CHOQUET ; ce livre sera certainement pour eux un puissant outil de travail.

3. L'axiomatique de R. BRISAC

On sait toute l'importance attribuée par Henri POINCARÉ au groupe des déplacements. On relit toujours avec admiration le chapitre IV de « La Science et l'Hypothèse », les chapitres III et IV de « La Valeur de la Science. C'est ce point de vue qui est adopté par Robert BRISAC.

R. BRISAC. *Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne*. Paris, Gauthier-Villars, 1955. Après avoir admis un système d'axiomes, d'appartenance et d'ordre voisin de celui de HILBERT, l'auteur fait une étude détaillée de la notion de groupe. Il étudie plus particulièrement le groupe des applications biunivoques de l'espace sur lui-même, puis il introduit axiomatiquement, le « groupe des déplacements », sous-groupe du précédent. Citons alors ce passage de la préface de M. René DE POSSEL : « Le lecteur verra avec quel bonheur l'auteur s'est servi de l'axiome de retournement du segment pour bâtir la théorie des droites et plans perpendiculaires, comment il a disséqué la démonstration classique du théorème de Pythagore, dégagée de ses petits triangles, pour la ramener à la commutativité du produit scalaire, laquelle résulte de l'axiome de retournement de l'angle. Il trouvera une théorie des parallèles et des translations particulièrement simple, un exposé du théorème fondamental de la mesure des grandeurs, en appendice une théorie complète et enseignable de l'orientation. »

4. L'axiomatique de H. WEYL

Le système de HILBERT date de 1899, celui de Herman WEYL date de 1918. Entre ces deux dates s'est produite une profonde révolution scientifique : l'éclosion puis l'affirmation de la théorie de la Relativité. C'est un fait incontestable que l'homme du xx^e siècle ne voit pas l'Univers physique avec les mêmes yeux que l'homme du xix^e siècle. Ainsi, à une transformation de notre conception du monde sensible correspond une transformation fondamentale de notre géométrie. Pour bien comprendre l'idée maîtresse de H. WEYL, il faut remonter aux sources et lire les admirables pages qui ouvrent « Temps, Espace, Matière ». Il faut ensuite étudier la structure d'espace vectoriel, puis celle d'espace ponctuel associé à un espace vectoriel. Ces structures sont aujourd'hui bien connues des étudiants, de nombreux cours et de nombreux livres les exposent, nous en citerons un pour sa grande commodité.

H. WEYL. *Temps. Espace. Matière*, publié à Zurich en 1918, traduit en français par G. JUVET et R. LEROY et publié à Paris par la Librairie scientifique Albert Blanchard en 1922. Cet ouvrage marque une date importante de l'évolution de la pensée mathématique et son importance historique en fait un livre de bibliothèque. Le chapitre premier s'intitule : « L'espace euclidien, son expression mathématique et son rôle en physique ». Après un aperçu concret des concepts spatiaux élémentaires, H. WEYL pose les bases de la géométrie affine, vectorielle et ponctuelle ; il étudie ensuite les formes quadratiques et, par le produit scalaire, introduit la géométrie métrique. Un tel point de vue prépare d'amples généralisations, la suite de l'ouvrage en est une preuve éclatante.

A. LICHNEROWICZ. *Eléments de calcul tensoriel*. Collection Armand Colin, Paris, 1951. Parmi les livres, qui adoptent ce point de vue, nous avons choisi celui

de M. LICHNEROWICZ pour son caractère très maniable. Un professeur qui adopte en classe de Mathématiques Élémentaires l'axiomatique de Herman WEYL peut utiliser le livre de M. LICHNEROWICZ de la façon suivante : 1° Définir un espace vectoriel (Chapitre I, n^{os} 1 à 5). — 2° Définir un espace ponctuel associé à ce dernier (Chapitre II, n^{os} 25, 26, 27). — 3° Développer, à partir de ces définitions, toute la partie affine du programme. — 4° Définir l'espace vectoriel euclidien (Retour au chapitre I, n^o 15 et suivants). — 5° Définir l'espace ponctuel euclidien (Chapitre II, n^o 29). — 6° Développer, à partir de ces définitions, toute la partie métrique du programme. Les avantages de ce mode d'exposition sont les suivants : possibilité de faire en un an un cours complet n'exigeant des élèves aucune connaissance préalable, harmonisation facile des cours de physique et de mathématiques, interdiction absolue du bricolage géométrique et mise en place de quelques notions solides utilisables par les élèves dans toute la suite de leurs études.

5. Aperçus variés

Lorsqu'on a l'occasion de rencontrer les mêmes élèves plusieurs fois au cours de leur scolarité, on peut envisager pour eux d'heureuses variations d'éclairage. Les programmes du premier cycle suivent consciencieusement l'ordre hilbertien, le programme de la classe de Mathématiques Élémentaires qui s'ouvre par une présentation des vecteurs s'accommode fort bien de l'axiomatique de Herman WEYL. On peut alors considérer la classe de Seconde, à la fois comme une classe de recommencement et de transition ; cette possibilité fait de cette classe l'une des plus intéressantes de l'Enseignement Secondaire. Parmi les ouvrages qui permettent de prendre conscience de la variété des éclairages possibles, nous citerons :

G BOULIGAND. *L'accès aux principes de la géométrie euclidienne*, Vuibert, 1951. On relit toujours avec plaisir ce petit livre, où la synthèse classique et la synthèse moderne, l'intuition et la codification sont heureusement confrontées. C'est là que M. BOULIGAND présente le « rapporteur binaire », qui crée et multiplie les droites perpendiculaires, assurant ainsi, au sein du groupe linéaire, l'existence d'un groupe de rotations autour de chaque point.

ESTÈVE et MITAULT. *Cours de géométrie*. Edités par Gauthier-Villars en 1935, ces ouvrages sont remarquables pour leur grande probité à l'égard des axiomes et la netteté de la distinction qu'ils établissent entre propriétés linéaires et propriétés métriques.

A. DELACHET. *La géométrie contemporaine*. Collection Que sais-je, P.U.F. Vue d'ensemble des tendances actuelles en géométrie. Le rôle de la notion de groupe y est fortement souligné, on y trouvera en particulier une définition des déplacements, voisine de celle de R. BRISAC, et prête à être adaptée à l'enseignement le plus élémentaire. D'autre part, ce livre est un modèle de marche progressive du concret à l'abstrait.

P. DEFRISE. *Visages de la Mathématique*. Office et publicité, rue Neuve, 36, Bruxelles. Les géométries actuellement pratiquées sont heureusement confrontées dans cet ouvrage qui contient une mise en évidence très opportune et très sensible du lien bilatéral Equivalence-Groupe de Transformations.

Nous arrêtons ici cette liste d'ouvrages anciens ou nouveaux que nous consultons souvent, lorsque chaque année nous remettons notre cours sur le métier. Mais il va de soi que cette liste n'est pas exhaustive.

Nous poursuivrons ultérieurement ce rapport par une étude analogue concernant l'arithmétique. Par ailleurs, nous examinerons comment ces diverses axiomatiques (et peut-être d'autres que nous avons omises) peuvent être adaptées à notre enseignement élémentaire. Pour ce programme, nous sollicitons de nos collègues toutes les informations possibles.

Y. CROZES (*Lycée Henri-IV*).