

≡ VI. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS ≡

CONCOURS D'ADMISSION DANS LES CENTRES PÉDAGOGIQUES RÉGIONAUX Session normale de 1956

Section F. Mathématiques

Extraits (1) du rapport de MM. P. DEDRON et L. THIBERGE

Inspecteurs généraux, Présidents des Jurys

Pour cette session, comme pour toutes les précédentes, les candidats et les candidates ont subi les épreuves théoriques devant deux Jurys différents, les sujets des deux compositions écrites étant, comme d'habitude, communs aux deux sections ; la double correction était encore assurée, pour chaque composition, par un membre du Jury de la section masculine et un membre du Jury de la section féminine.

Le présent rapport peut donc présenter simultanément les observations ou conseils concernant les deux sections, avec toutes les comparaisons opportunes.

COMPOSITION DES JURYS

Par arrêté du 14 mars 1956, les deux jurys furent ainsi constitués :

Section masculine :

- M. THIBERGE, Inspecteur général, Président.
- M. DIXMIER, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
- M. COSSART, professeur (Centrale) au Lycée Chaptal.
- M. ECALLE, professeur (Navale) au Lycée St-Louis (Stanislas).
- M. KLEIN, professeur (Agro) au Lycée St-Louis.

Section féminine :

- M. DEDRON, Inspecteur général, Président.
- M. BRILLOUËT, professeur à l'Ecole Nat. Sup. de Mécanique de Nantes.
- Mlle BRULARD, professeur (Mathématiques Supérieures) au Lycée Fénélon.
- M. GUAYDIER, professeur (Centrale) au Lycée St-Louis (Stanislas).
- M. MULTON, professeur au Lycée Buffon.

RAPPORTS SUR L'ECRIT (Candidats et candidates) (2)

Première composition (M. COSSART).

On propose d'étudier quelques propriétés de la transformation ponctuelle (T) suivante : A et B sont deux points fixes distincts à distance finie, I est le milieu de AB, nous appellerons C le point à l'infini de la médiatrice de AB.

(1) Nous nous excusons, faute de place, de ne pouvoir publier ce rapport *in extenso*. Au moins avons-nous conservé les larges extraits les plus propres à aider les futurs candidats. Regrettons cependant, à cette occasion, que l'Administration du Second Degré ne prenne pas sa part des frais de publication des rapports officiels qui resteraient ignorés des professeurs et des candidats si les Associations de Spécialistes ne les publiaient pas dans leurs *Bulletins*. (N.D.L.R.).

(2) Voir les énoncés de ces compositions dans notre *Bulletin* 178, p. 528.

L'homologue M' de M est tel que : 1° Il est dans le plan MAB ; 2° AM' est perpendiculaire à AM ; 3° BM' est perpendiculaire à BM .

I. Dans un plan passant par AB

Paragraphe 1 : Il se décomposait en six propositions distinctes qui devaient éclairer toutes les autres questions.

Il en est souvent ainsi dans un problème de Concours ; néanmoins, bien des candidats ont négligé ce début, n'examinant que superficiellement les singularités de (T), sans doute pressés d'établir les relations

$$(1) \quad \overline{mM} \cdot \overline{m'M'} = \overline{mA} \cdot \overline{mB} = \overline{m'A} \cdot \overline{m'B} = -\overline{Am} \cdot \overline{Am'} = -\overline{Bm} \cdot \overline{Bm'}.$$

Celles-ci se démontrent dans le cas général, en utilisant la puissance de m par rapport au cercle $AMBM'$ (de diamètre MM').

En dehors du cas général, les cas singuliers sont ainsi définis : ABC est le triangle des singularités ; à chaque sommet correspond un point quelconque du côté opposé.

Revenons au cas général : (T) peut être définie comme associant à M son diamétralement opposé M' sur le cercle ABM .

Par définition même, (T) est réciproque [bi-univoque en dehors des singularités]. A un point à l'infini distinct de C , il correspond le point à l'infini dans la direction perpendiculaire.

(T) n'a pas de points doubles.

Paragraphe 2 : M' décrit en général le même cercle que M , MM' enveloppant le centre de ce cercle. Mais M' en A donne toute la droite BC , et M' en B donne toute la droite CA . Ces deux droites sont deux lieux singuliers complémentaires et correspondent aux points A et B comme enveloppes singulières de MM' .

Paragraphe 3 : a) La droite (D), lieu de M fixe m et aussi m' . Le lieu de M' est donc la symétrique (D') de (D) par rapport à I .

La correspondance définie par (1) $\overline{mM} \cdot \overline{m'M'} = \overline{mA} \cdot \overline{mB} = C^2$ est biunivoque et régulière si $m \neq A$ et de B . Elle justifie que M' décrit bien toute la droite (D') [réciproque].

Enveloppe de MM' . — Considérons la conique de sommets m, m' , de foyers A et B . Le théorème de Poncelet, relatif à cette conique, au point M et au foyer A , montre que la tangente autre que Mm coupe la tangente (D') en m' en un point M_1 tel que $\widehat{MAM_1} = \Pi/2$, donc $M_1 = M'$. Réciproquement, toute tangente à cette conique coupe les droites (D) et (D') en des points U et V tels que $\widehat{UAV} = \widehat{UBV} = \frac{\Pi}{2}$; U et V forment donc un couple MM' .

En outre, (D) contient le point C . Il faut donc ajouter à (D'), lieu général, la droite AB comme lieu singulier.

b) Si M décrit la droite (Δ), issue de A , M' décrit en général la droite (Δ') perpendiculaire à (Δ) en A . Il est aisé d'établir que le passage de M à M' résulte d'une similitude de centre B , d'angle $\frac{\Pi}{2}$, portant Δ sur Δ' . L'enveloppe de MM' est alors la parabole de foyer B , tangente à (Δ) et (Δ'). En outre, quand M vient en A , M' est indéterminé sur BC (lieu singulier) et MM' tourne autour de A (enveloppe singulière).

Paragraphe 4 : Si M décrit une droite (D) parallèle à AB , l'application des formules (1) dans les axes IB et IC , par exemple, montre que M' est sur une certaine parabole ($\mathcal{P}$) d'axe IC , passant par A et B .

Le sommet S de cette parabole est le transformé du pied H de la perpendiculaire abaissée de I sur (D).

Quand M décrit (D), m décrit BC tout entière, m' aussi, donc M' décrit toute la parabole ($\mathcal{P}$).

Construction des tangentes en A et B : Si M vient en M_0 sur BC, M' tend vers A, AM' devient la tangente en A, donc AM_0 est la normale en A.

Problème inverse : Si M décrit une parabole telle que ($\mathcal{P}$), en vertu de la réciprocité de (T), M' décrira une droite telle que (D), construite en utilisant le passage de S à H par exemple.

Néanmoins, ($\mathcal{P}$) contenant les trois points A, B, C, il convient d'ajouter à (D) les trois lieux singuliers BC, CA, AB.

Remarque : Notons, pour donner un moyen de vérifier cette question, comme les suivantes, que :

Si M décrit une courbe algébrique ($\mathcal{C}$) d'ordre n admettant A, B, C comme points d'ordre a, b, c respectivement, M' décrira une courbe algébrique ($\mathcal{C}'$) d'ordre $n - a - b - c$, lieu complété par les droites BC, CA, AB comptées a, b, c fois respectivement.

Enfin ($\mathcal{C}$) rencontrant BC en $n - b - c$ points, A sera pour ($\mathcal{C}'$) un point d'ordre $n - b - c$.

Paragraphe 5 : Dans les mêmes axes que ci-dessus et par application des formules (1), le calcul montre que M' est sur l'hyperbole $\mathcal{H}$, de centre I, passant par A et B, asymptote à IC et à la perpendiculaire (Δ_1) en I à (Δ).

Comme au paragraphe précédent, bien des candidats omettent d'établir la réciproque. On démontrera comme ci-dessus que M' décrit bien toute l'hyperbole trouvée, ou bien l'on reprendra tous les calculs en sens inverse, à partir de M' en position quelconque sur ($\mathcal{H}$).

Problème inverse : Si M décrit une hyperbole de la famille ($\mathcal{H}$), en vertu de la réciprocité de (T), M' décrira la droite (Δ) perpendiculaire en I à l'asymptote oblique (Δ_1) de ($\mathcal{H}$).

On ajoutera encore les trois lieux singuliers BC, CA, AB.

NOTA. -- On peut donner une solution géométrique de cette question. En effet, soit N l'intersection de BM' avec Δ_1 , n sa projection sur BC. N est l'homologue de M dans la transformation (T') analogue à (T), mais définie avec I et B.

Par suite : $\overline{Bn} = \overline{mI} = \overline{Im'}$ et $\overline{BN} = \overline{KM'}$ si K est l'intersection de BM' avec IC. Cette dernière relation donne $\overline{BM'} = \overline{BN} + \overline{BK}$ et montre que M' appartient à l'hyperbole ($\mathcal{H}$) d'asymptotes IC et Δ_1 , passant par B.

La réciproque s'établit, par exemple, en signalant que si BM prend toutes positions possibles autour de B, il en est de même de BM', donc M' décrit toute l'hyperbole ($\mathcal{H}$).

Paragraphe 6 : Le lieu de M étant défini par $mM^2 = k \cdot \overline{mA} \cdot \overline{mB}$, en utilisant $\overline{mM} \cdot \overline{m'M'} = \overline{mA} \cdot \overline{mB}$, il vient $\frac{\overline{mM'}}{\overline{mM}} = \frac{1}{k}$ puis $m'M'^2 = \frac{1}{k} \overline{m'A} \cdot \overline{m'B}$ et réciproquement, ce qui donne le lieu général de M', soit Λ . Il faut ajouter les deux lieux singuliers BC et CA.

Si L est une hyperbole, on a $k > 0$ $k = e^2 - 1$.

$\frac{1}{k} > 0$, donc Λ est une hyperbole, $\frac{1}{k} = e'^2 - 1$, d'où la relation $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$ correspondant au fait que les directions asymptotiques de L et Λ sont orthogonales.

L et Δ sont confondues si $e^2 = 2$, L est une hyperbole équilatère. MM' reste alors parallèle à AB, puisque $k = 1$ et $\overline{m'M'} = \overline{mM}$.

Si L est une ellipse dont l'axe focal a pour sommets A et B, on a $-1 < k < 0$.

Le lieu Δ , défini par $\overline{m'M'^2} = \frac{1}{k} \overline{m'A} \cdot \overline{m'B}$, où $\frac{1}{k} < -1$, est une ellipse de petit axe AB. On a alors :

donc $e^2 - 1 = e'^2 - 1$ et enfin $e' = e$.

Les deux ellipses L et Δ sont semblables, le grand axe AB de L étant le petit axe de Δ . Très peu de candidats ont trouvé cette propriété.

L et Δ seront confondues si $k = -1$, donc suivant le cercle de diamètre AB ; MM' enveloppe alors le point I.

II. Géométrie dans l'Espace

La plupart des questions de cette partie II sont des applications directes des questions correspondantes de la partie I, mais il importait de souligner les différences ; c'est sur leur examen que les copies ont été appréciées.

Ainsi la question II, 1° n'est pas une réédition pure et simple du I, 1°. Si M est sur AB, M' est indéterminé sur la droite de l'infini du plan médiateur de AB et réciproquement, (T) étant toujours réciproque. M en A ou B donne un transformé indéterminé dans le plan perpendiculaire à AB en B ou en A.

La deuxième question, toute nouvelle, apportera des résultats applicables dans toute la suite, conjointement avec les résultats du I. Ce sont encore les formules (1) qui donneront la réponse :

m étant fixe, donc $\overrightarrow{mM}$ et $\overrightarrow{m'M'}$ sont parallèles, et $\overline{mM} \cdot \overline{m'M'} = \overline{mA} \cdot \overline{mB}$. On passe de M à M', dans ce cas de figure par : 1° l'inversion de centre m et de puissance $\overline{mA} \cdot \overline{mB}$; 2° la translation ($\overrightarrow{mm'}$). On en déduit sans peine les lieux demandés.

Paragraphe 3° : Le plan (P) passant par A sera défini : α) comme lieu de perpendiculaires à AB et donnera pour lieu de M' une famille de cercles s'appuyant sur AB, situés dans des plans perpendiculaires à AB ;

β) comme lieu de droites issues de A et le lieu de M' se trouve engendré par d'autres droites issues de A.

Ce lieu est donc un cône ($\mathcal{K}$) de sommet A, de base circulaire perpendiculaire à AB, cette droite étant génératrice du cône ($\mathcal{K}$). Comme (P) passe par A, il faut ajouter pour lieu singulier le plan perpendiculaire en B à AB.

Le cône ($\mathcal{K}$) admet pour plan de symétrie (II) le plan mené par AB perpendiculairement à (P). II coupe P suivant une droite Δ , dont la transformée Δ_1 est perpendiculaire en A à (P).

AB et Δ_1 sont les deux génératrices principales du cône ($\mathcal{K}$), donc les sections circulaires sont : 1° perpendiculaires à AB ; 2° perpendiculaires à Δ_1 , donc parallèles à (P). ($\mathcal{K}$) est un cône de Hachette.

Paragraphe 4° : Si M décrit une sphère (ω) passant par A et B, tout plan AMB donne sur cette sphère un cercle qui est son propre transformé (I, 2°), donc (ω) se conserve globalement. On ajoutera les lieux singuliers obtenus pour M en A ou B, et qui sont les plans perpendiculaires à AB en B et A.

Ce qui suit, n'a été traité par aucun candidat de manière satisfaisante :

Un cercle (γ) est défini par une sphère (ω) et un plan (P), passant par A par exemple. Le lieu de M' est alors l'intersection de (ω) avec le cône ($\mathcal{K}$) transformé de (P) [M ne devant pas venir en A, les lieux singuliers n'interviennent pas dans cette question].

Pour que l'intersection de (ω) et $(\mathcal{K})$ soit un cercle, il faut et il suffit que le plan tangent à (ω) en A soit direction de section circulaire de $(\mathcal{K})$. Or $(\mathcal{K})$ a deux directions cycliques :

α) le plan (P) qui serait alors tangent à (ω) , et le lieu de M se réduirait à A, ce qui est exclu dans l'énoncé ;

β) le plan médiateur de AB — (ω) doit alors être la sphère de diamètre AB. Dans ce cas, M et M' sont symétriques par rapport à I, et le lieu de M' est bien un cercle.

Paragraphes 5° et 6° : Ce sont des applications très simples des questions I, 4° et I, 5°, associées aux résultats de la question II, 2°.

Un seul point nouveau : le lieu des asymptotes Δ_1 des hyperboles trouvées au 6°, b) : le plan (Q) étant engendré par des droites Δ issues de I, on a vu au I, 5° que les asymptotes étaient les perpendiculaires Δ_1 à Δ , issues de I dans les plans AB, Δ .

Or, les droites Δ et Δ_1 se correspondent dans la transformation (T') définie dans notre solution au I, 5°, *NOTA*.

Le lieu des droites Δ_1 se définit comme au II, 3° : c'est le cône de Hachette de sommet I, qui a pour génératrices principales (orthogonales aux sections circulaires) AB et la perpendiculaire en I à (Q).

Complétons les observations faites au cours de cet exposé, et que nous a suggérées la correction des copies :

Tous les candidats lisent leur texte trop superficiellement et omettent de répondre à des questions faciles.

Reprochons à plusieurs candidats de paraphraser certains passages du texte, sans fournir les justifications demandées, ce qui est du plus mauvais effet : on peut se demander s'il s'agit d'incompréhension mathématique, de paresse intellectuelle, ou de manque de conscience.

Relevons également bien des affirmations gratuites, en particulier dans l'examen des réciproques relatives aux lieux des points M' et aux enveloppes des droites MM'.

Dans quelques cas, heureusement très rares, nous avons même eu l'impression que le candidat bluffe sciemment. Aucun concours ou examen n'est un coup de poker, nos candidats doivent se persuader que nous exigeons d'eux, ici, tout d'abord, une scrupuleuse honnêteté intellectuelle.

Hâtons-nous de dire que les bonnes copies, et même d'autres plus faibles, dénotent un souci du fini, de la bonne présentation, de la concision et de la rigueur, qui fait la meilleure impression. C'est par ces moyens que tout candidat peut, et même doit, rechercher une « cote de faveur » que nous ne leur marchanderons pas.

Les termes impropres, certains néologismes boiteux, ont été quelquefois sanctionnés : Arête d'un cône ! On dit biunivoque pour réciproque, [qualité de (T)]. On évoque sans explication la « méthode de la séparatrice » dans la réciproque d'une enveloppe. On écrit aussi bien $\overrightarrow{AB}$ ou $\overleftarrow{AB}$ pour AB.

On confond point double de (T) avec la notion de point double d'une courbe algébrique.

Nous regrettons que certains calculs, certains raisonnements géométriques corrects, se traduisent par une conclusion d'une effarante imprécision, et deviennent inutilisables dans les questions suivantes.

Répétons qu'un calcul fait pour établir un lieu, ne dispense pas, parce que c'est un calcul, de la réciproque.

Ainsi, au I, 4°, si M est sur (D), M' est sur une certaine parabole $\mathcal{P}$, résultat obtenu en se servant du fait que M a une ordonnée constante. Or, le calcul reste le même, que M décrive (D) tout entière, ou seulement un segment de (D).

Il reste donc à utiliser le fait que M décrit tout (D) :

1° en remarquant que m décrit tout AB, m' aussi, et M' décrit entièrement ($\mathcal{P}$) ;

2° en montrant que si M' est sur $(\mathcal{P})$, en dehors des points A, B, C , son homologue M est quelque part sur (D) .

Soulignons aussi que la réciprocité de (T) ne peut servir à établir ces réciproques, mais donne la réponse aux propositions contraires. Ainsi, toujours en I, 4°, la réciprocité de (T) ne justifie pas que M' décrit entièrement $(\mathcal{P})$ pourvu que M décrive tout D , mais elle prouve que si M est sur $(\mathcal{P})$ [excluons encore A, B, C], M' sera sur la droite (D) , justement en vertu de la réciproque de la proposition directe, dont on ne peut se passer ici.

Si les questions posées semblaient nombreuses, elles étaient toutes vraiment simples, et même familières, et leur résolution ne demandait aucun appareil d'érudition. Pourtant, les candidats donnent bien souvent l'impression d'être des novices, qui rencontrent de telles questions pour la première fois ; par exemple, il n'est que de signaler leur gaucherie dans l'emploi des divisions semblables (I, 3°, b) ou de l'inversion (II, 2°), comme dans l'élaboration des modestes formules (1) pour laquelle ils vont « dénicher » à grand-peine des triangles semblables.

En s'exerçant sur les textes déjà nombreux des sessions antérieures du C.A.P.E.S., et même sur les textes plus élémentaires que publient à profusion les ouvrages de la classe de Mathématiques, les candidats devraient acquérir toute la sûreté qui leur manque pour lire et pour interpréter leur énoncé de problème au jour du concours.

Il est évident qu'un tel entraînement fait encore gravement défaut à la plupart d'entre eux.

Seconde composition (M. ECAILLE).

Nous commencerons par deux critiques d'ordre général :

1) Les candidats ont été surpris par les questions du problème qui se rattachaient au programme de Sciences expérimentales (dénombrements, combinaisons, formules du binôme) ; ils ont préféré, en général, consacrer la majeure partie de leur temps à celles qui se rattachaient au programme de Mathématiques (trigonométrie). Ils ne devraient pas oublier que le programme du C.A.P.E.S. porte sur toutes les classes secondaires, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral.

2) Les candidats ont une fâcheuse tendance à négliger la rédaction de la solution et plus encore la présentation des résultats. Certes, on conçoit qu'au jour du concours le temps limité ne laisse pas beaucoup de loisirs pour « signoler » la rédaction, et les correcteurs ne sont pas très exigeants sur ce point ; mais il est un minimum au-dessous duquel aucune copie ne devrait descendre. Fait plus grave, les candidats éprouvent rarement le besoin de bien mettre au point les résultats obtenus ; pourtant, dans des questions qui ont demandé des calculs parfois longs et une discussion souvent délicate, il est indispensable de coordonner les résultats et d'en donner un énoncé global aussi concis que possible ; ce devrait être un souci permanent chez de futurs professeurs.

Nous examinerons maintenant les diverses parties du problème :

Première partie : Elle consiste en quelques dénombrements assez simples, mais il fallait connaître ou savoir retrouver la somme des n premiers nombres entiers, celle de leurs carrés et celle de leurs cubes. L'ignorance de ces résultats a arrêté de nombreux candidats ; ceux qui ont passé outre en conservant les symboles S_2 et S_3 n'ont pu calculer les limites demandées. Signalons que $S_2 = \Sigma n^2$ n'est pas un polynôme du second degré en n et n'est pas équivalent à n^2 quand n devient infini.

Le dénombrement du 3° est plus délicat, il faut le traiter avec soin et méthode. Tous les candidats auraient dû étudier les cas particuliers $n = 3$, $n = 4$. La construction effective de toutes les droites est alors réalisable et peut suggérer un pro-

cédé applicable dans le cas général. Désignons par A_x^n le nombre de droites passant par le sommet de coordonnées (x, y) et ne passant par aucun sommet d'abscisse inférieure à x et désignons par N le nombre total des droites. Sommons par rapport à x , puis par rapport à y , ce qui revient à opérer dans des bandes verticales ; nous obtenons :

$$B_0 = A_0^0 + A_0^1 + \dots + A_0^n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{pour } \begin{cases} n = 2p \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_x = A_x^0 + A_x^1 + \dots + A_x^n = 2p + (2p-2) + \dots + 4 + 2 + 0 \\ \quad + \dots + 0, \\ N = p^2(2p+3), \end{cases}$$

$$\text{pour } \begin{cases} n = 2p+1 \\ n \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_x = A_x^0 + A_x^1 + \dots + A_x^n = (2p+1) + (2p-1) + \dots + 3 \\ \quad + 1 + 0 + \dots + 0, \\ N = (p+1)(2p^2+4p+1). \end{cases}$$

Trois candidats seulement ont obtenu ce résultat.

Les correcteurs ont été choqués de trouver plusieurs copies où, N étant inexact, la vérification dans les cas particuliers était falsifiée pour la faire coïncider avec le résultat général.

Deuxième partie : Beaucoup de candidats, désorientés sans doute par la première partie, l'ont vite délaissée pour la deuxième, consacrée à la trigonométrie. Tous ont su faire la facile construction demandée (intersection d'un arc capable avec la droite, lieu des points, dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante) ; mais beaucoup n'ont pas vu que la discussion fait considérer deux cas, α aigu et α obtus. L'équation du second degré demandée ensuite, a presque toujours été établie, bien que certains candidats, opérant maladroitement, aient obtenu une équation bicarrée. On peut opérer, soit par les formules trigonométriques classiques, soit par un calcul algébrique ; il est préférable de ne pas utiliser ouvertement la géométrie analytique.

Le choix des données, pour obtenir P sur le contour du carré, puis pour obtenir deux solutions distinctes intérieures au carré, donne lieu à des calculs simples ; mais la synthèse des divers résultats obtenus (égalités et inégalités) nécessite beaucoup d'ordre et c'est ici le défaut de la plupart des copies : on énumère une série de conditions, sans se soucier de savoir si elles sont suffisantes, ou si elles sont compatibles, ou si certaines sont conséquences d'autres. Beaucoup de candidats perdent trop de temps en calculs sans but, allongés à plaisir, sans songer à mettre en ordre les résultats pour aboutir à une conclusion nette et concise. Le plus simple est de choisir d'abord la valeur du rapport h , et d'étudier ensuite les conditions portant sur l'angle α .

Pour traiter la dernière question, après avoir constaté que l'abscisse de P est 18, il suffit d'utiliser l'équation du 2°, qui devient $Y^2 - 16 \cot \alpha Y + 36 = 0$. Les trois solutions sont obtenues en recherchant les couples de nombres entiers Y_1 et Y_2 , distincts et inférieurs à 32, puis l'angle α , tels que $Y_1 Y_2 = 36$, $16 \cot \alpha = Y_1 + Y_2$. Le résultat est exact dans cinq copies

Troisième partie : Les dénombrements se font sans difficulté en opérant avec ordre : il suffit de prendre d'abord pour M les $n+1$ sommets situés sur une même ligne du quadrillage, puis de faire varier cette ligne. Il faut, là aussi, reconnaître la somme des carrés des n premiers nombres entiers. La valeur moyenne μ s'obtient immédiatement, en remarquant que dans les dénombrements initiaux chaque triangle était compté deux fois. Quant à l'homothétie effectuée ensuite, plusieurs candidats n'ont pas remarqué qu'il s'agit de carrés d'aires et que, par suite, μ doit être divisé par n^4 .

Cette troisième partie se termine par un intéressant problème d'arithmétique :

la fraction $\mu' = \frac{(n+1)^2(7n+2)}{9 \times 32n^3}$ peut-elle être rendue décimale ? n^3 ne peut avoir

que 2 comme diviseur premier commun avec le numérateur, donc n doit être de la forme $2^p 5^q$; il reste alors un facteur 9 dont la suppression peut se faire de deux manières : ou bien $n+1$ doit être divisible par 3, ou bien $7n+2$ doit être divisible par 9. L'étude, basée sur la périodicité des restes de la division des puissances successives d'un même nombre par un autre nombre, peut être simplifiée, dans son exposition, en utilisant la notation des congruences : rechercher la condition pour que $n+1$ soit divisible par 3, revient à étudier : $2^p 5^q \equiv -1$ modulo 3. La conclusion finale est : il faut et il suffit que $|p-q|$ soit ou impair ou divisible par 6.

Quatrième partie : Pris sans doute par le temps, les candidats ont peu étudié cette quatrième partie. Le nombre des contours polygonaux reliant A à M est C_{x+y}^x (un contour peut être défini par la suite des numéros d'ordre de chacun des x segments horizontaux, dans la suite des $x+y$ segments du contour) ; si bien qu'en affectant chaque sommet M d'un coefficient égal à ce nombre, on reconstitue avec une disposition différente le triangle de Pascal. Les formules demandées dans le 2° s'établissent alors facilement : à l'aide de la formule du binôme (calcul a), à l'aide de la somme des puissances successives de 2 (calcul b), à l'aide de la formule $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$ (calculs c et d).

La somme des aires Σ se trouve sans calcul : il suffit d'associer à tout contour le contour symétrique par rapport à la première bissectrice, la somme des deux aires correspondantes égale celle du carré.

Le 4° n'a malheureusement été abordé par aucun candidat. Le calcul de Π_x^y est sans difficulté, mais l'expression trouvée, $C_{x+y}^x C_{2n-x-y-1}^{n-x-1}$, se prête mal au calcul des sommes demandées.

Pour évaluer la première somme, $P_x = \Pi_x^0 + \dots + \Pi_x^n$; il suffit de remarquer que tout contour reliant A à C emprunte une fois et une seule un segment horizontal de la bande $x, x+1$. Donc P_x représente le nombre total des contours, soit C_{2n}^n .

Pour évaluer la seconde somme, $Q_y = \Pi_0^y + \dots + \Pi_{n-1}^y$, on peut, par exemple, établir une correspondance biunivoque entre les contours reliant A à C et les suites d'entiers $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ telles que $a_0 + a_1 + \dots + a_n = n$ et $0 \leq a_p \leq n$ (a_p représentant le nombre des segments horizontaux d'ordonnée p du contour). Q_y , qui est égale à Σa_y étendue à toutes ces suites, est indépendante de y et par suite $(n+1) Q_y = n C_{2n}^n, Q_y = C_{2n}^{n+1}$.

L'aire demandée au 3° est par suite égale à : $Q_y \sum_{y=0}^{y=n} y = \frac{n^2}{2} C_{2n}^n$.

RAPPORT SUR L'ORAL, Section féminine (M. BRILLOUËT)

L'oral comprend deux parties : un exposé d'environ une demi-heure, après préparation de trois heures, et une interrogation sans préparation d'environ une demi-heure également. Pour une même candidate, l'interrogation portait sur une autre partie du programme que celle de l'exposé, par exemple, une interrogation de géométrie pour un exposé d'algèbre ou de trigonométrie. Une note était attribuée à l'exposé, une autre à l'interrogation, la moyenne de ces deux notes constituant la note d'oral, à laquelle était ensuite appliqué le coefficient 5.

EXPOSÉS

La liste des exposés tirés au sort par les candidates est la suivante :

Arithmétique

1. Reste de la division par un nombre d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'une puissance. Caractère de divisibilité par 11.
2. P.G.C.D. de deux ou plusieurs nombres. (On laissera de côté la méthode reposant sur la décomposition en facteurs premiers).
3. Racines carrées approchées à $1/10^n$ près par défaut et par excès d'un nombre rationnel. (L'extraction de la racine carrée entière d'un entier est supposée connue).
4. Combinaisons. Probabilités simples.

Algèbre

5. Exposer sur des exemples empruntés à l'algèbre, à la trigonométrie ou à la géométrie le raisonnement par récurrence. En donner des applications.
6. Discussion algébrique et géométrique d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues comportant un paramètre.
7. Résolution graphique d'une inéquation et d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.
8. Exemples de résolution de systèmes d'équations algébriques conduisant à des équations du second degré. Cas des systèmes symétriques.
9. Exemples simples d'équations irrationnelles.
10. Exemples d'inéquations irrationnelles.
11. Fonction : $y = 1/x$. Variation et représentation graphique. Examiner aussi le cas où les échelles sont différentes sur les deux axes.
12. Exemples de variation de fonctions sans l'emploi de dérivées. (On utilisera la variation d'une fonction de fonction, telle que fonction homographique de $\sin x$, racine carrée ou inverse d'un trinôme, etc...).
13. Limite quand x tend vers zéro de $\sin x/x$. Rôle du choix de l'unité. Tracer la courbe : $y = \sin x/x$. Etude à l'infini.
14. Définition et étude d'une fonction $f(x)$ qui tend vers l'infini lorsque la variable x tend vers x_0 ou l'infini. Notion d'asymptote. Exemples.
15. Définition de la dérivée d'une fonction pour une valeur de la variable. Relation avec la continuité. Traiter un exemple sur une fonction homographique en expliquant *tous* les calculs.
16. Etude de la variation d'une fonction périodique dont le graphique présente des symétries ; on insistera sur la réduction d'intervalle.
17. Variation et représentation graphique de fonctions numériques de la forme : $y = ax + \beta + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ (a étant positif et non nul).
18. Discussion graphique d'une équation du second degré dont les coefficients dépendent linéairement d'un paramètre.
19. Application de la variation des fonctions à la discussion d'une équation algébrique entière de degré supérieur à 2 avec paramètre.
20. Notion de primitive. Interprétation géométrique.
21. Fonction logarithme népérien de x : $y = \text{Log } x$. Formule :
$$\text{Log}(ab) = \text{Log } a + \text{Log } b.$$
22. La fonction $\text{Log } x$ ayant été étudiée, en déduire la définition et l'étude de la fonction exponentielle.

Trigonométrie

23. Généralités sur la résolution des équations trigonométriques (la résolution de $a \cos x + b \sin x + c = 0$ est exclue). Exemples.

24. Résoudre et discuter une équation trigonométrique linéaire en $\sin x$ et $\cos x$, dont les coefficients dépendent d'un paramètre. Interprétation géométrique.

25. Exemples de résolution et de discussion d'un système de deux équations, toutes deux trigonométriques à deux inconnues.

26. Résolution d'inéquations trigonométriques avec application à la variation des fonctions.

27. Systèmes fondamentaux de relations entre les éléments d'un triangle quelconque (sans démonstration algébrique de l'équivalence de ces systèmes).

28. Résolution d'un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris. On traitera complètement et par logarithmes un exemple numérique.

29. Résolution d'un triangle dans un cas non classique (l'exemple donné comportera une solution géométrique).

Géométrie

30. Orientation du plan. Angles orientés de deux droites non orientées. Applications.

31. Diverses formes de la condition d'appartenance de quatre points à un cercle.

32. Géométrie dans l'espace : théorème de Thalès. Réciproque. Application.

33. Trièdres supplémentaires.

34. Faisceaux harmoniques.

35. A et B étant deux points donnés d'un plan, étudier l'ensemble des points M du plan tels que : $MA/MB = k$, k étant une constante donnée.

36. Somme et différence des carrés des distances d'un point à deux points fixes. Applications

37. Différences des puissances d'un point par rapport à deux cercles. Applications.

38. Exemples de constructions de cercles assujettis à des conditions simples (passer par un point, être tangent à une droite, à un cercle).

39. Polaire d'un point par rapport à un cercle.

40. Condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles soient cosphériques.

41. Définition d'un faisceau de cercles. Différents genres. Construction des cercles du faisceau tangents à un cercle donné.

42. Le quadrilatère complet.

43. Le cube : étude des symétries et des axes de répétition. Epure lorsque l'une des diagonales est verticale.

44. Produit de deux homothéties. Applications.

45. Problèmes sur les plans tangents à deux ou trois sphères données.

46. La similitude plane. Traiter un ou plusieurs exemples d'application.

47. Géométrie plane : figure transformée d'un cercle par similitude. Similitudes faisant se correspondre deux cercles donnés. Applications.

48. Affinité orthogonale ; application à l'ellipse.

49. Propriétés angulaires de l'inversion. Applications.

50. Propriétés communes à l'inversion et à la symétrie par rapport à une droite (géométrie plane).

51. Inverse d'un cercle et des régions qu'il détermine.

52. Application de l'inversion : 1) à la démonstration d'une propriété d'une

figure ; 2) à un problème de construction ; 3) à la recherche d'un lieu géométrique ou d'une enveloppe.

53. Transformation d'un faisceau de cercles par inversion (conservation et réduction à des formes remarquables).

54. Géométrie plane : étude des cercles passant par un point donné A et coupant un cercle donné C sous un angle donné.

55. Etude des cercles tangents à une droite donnée et orthogonaux à un cercle donné.

56. Surface conique à directrice circulaire. Sections circulaires. Symétries.

57. Régions du plan limitées par une conique (ellipse, hyperbole et parabole). Le mode de définition de la conique est laissé au choix de la candidate.

58. Tangentes menées d'un point à une parabole. Théorème de Poncelet. Applications.

59. Problèmes relatifs à une hyperbole définie par ses asymptotes et un point.

60. Problèmes sur les tangentes à une conique définie par un foyer, la directrice associée et l'excentricité.

61. Sections hyperboliques du cône de révolution.

62. Etude des cônes de révolution passant par une parabole donnée.

Géométrie descriptive

63. Géométrie descriptive : exemples de problèmes d'angles et de distances illustrant les méthodes générales.

Mécanique

64. Composition de deux mouvements vibratoires de même période et de même support.

65. Exemples d'équilibre d'un point matériel pouvant glisser avec et sans frottement sur une courbe plane.

Cosmographie

66. Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes.

Une remarque préalable s'impose sur l'esprit dans lequel ces exposés doivent être traités. Il ne s'agit pas, comme pour l'Agrégation, de faire une leçon devant une classe déterminée, cette leçon devant s'insérer, au moins théoriquement, dans un ensemble de leçons, les unes antérieures (dont les résultats sont en général sommairement rappelés au début de la leçon), les autres postérieures (ce qui permet en fin de leçon d'indiquer ce qui suivrait). Pour l'exposé du C.A.P.E.S., la candidate doit au contraire montrer les connaissances qu'elle possède sur le sujet qui lui est proposé, en restant toutefois dans le cadre du programme des classes terminales du second degré. C'est ainsi qu'à propos du quadrilatère complet, on peut parler de la parabole inscrite, sans chercher à ranger les connaissances ainsi exposées suivant l'ordonnance d'un cours fait devant une classe. Il va de soi que les connaissances nécessaires à l'exposé, mais qui n'en font pas partie, peuvent être rappelées en commençant, aussi brièvement que possible.

Dans toute la mesure du possible, les exposés proposés aux candidates ne se bornent pas à la reproduction d'une tranche de cours ; ils exigent un effort de construction. Lorsque des exemples sont demandés, ceux-ci doivent être judicieusement choisis de manière à dégager ou à illustrer les méthodes générales : ils ne doivent pas être choisis au hasard, comme le Jury en a eu trop souvent l'impression. Il est iné-

vitale que certains exposés paraissent plus difficiles que d'autres ; mais les candidates doivent savoir que si un exposé difficile bénéficie d'une certaine indulgence pour des erreurs ou omissions peu graves, ces mêmes erreurs ou omissions sont fortement pénalisées dans un exposé facile.

Enfin, il est absolument indispensable que les candidates ne sortent pas du sujet qui leur est proposé, soit inconsciemment, soit sciemment, pour occuper le temps. La note attribuée à l'exposé n'est pas fonction du temps passé au tableau par la candidate, mais, avant tout, des connaissances révélées sur le sujet proposé. Qu'il soit permis de souhaiter également que, toutes choses égales par ailleurs, les candidates fassent preuve d'ordre et de soin dans leur exposé.

Voici maintenant les principales critiques sur les exposés faits par les candidates (les numéros renvoient aux numéros des exposés dans la liste de ceux-ci) :

4. dans le cadre du programme des Sciences expérimentales, on peut se dispenser de rattacher les combinaisons aux arrangements et aux permutations et faire une démonstration directe.

6. Le choix d'exemples convenables s'imposait ici. La candidate n'a pas su dégager les résultats généraux et a classé ses exemples suivant que le paramètre figurait seulement au premier membre des équations, ou seulement au second, ou au contraire dans les deux ; un tel classement ne s'impose en aucune manière. Ce qui est plus grave : la candidate ignorait la propriété qui s'attache à des droites dont l'équation dépend linéairement d'un paramètre.

11. Assez bon exposé, mais il importerait d'insister sur les définitions des limites, sur celle des asymptotes. Le cas d'échelles différentes sur les axes n'a pas été examiné avec assez de soin.

12. La candidate n'a manifestement pas compris la question. Dans de tels cas, le sens de variation se justifie le plus souvent par le théorème : « Une fonction monotone de fonction monotone est monotone. » La candidate s'est bornée à prendre des valeurs numériques sans même parler du sens de variation. En outre, sur l'exemple qu'elle avait choisi (fonction homographique de $\sin x$), la réduction de l'intervalle a été très mal traitée.

13. Le rôle du choix de l'unité n'a pas été approfondi. Le tracé de la courbe : $y = \sin x/x$ a été très mauvais ; la candidate ne calcule pas la dérivée, et annonce que les extrema de y sont atteints pour $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, au lieu de trouver les racines de $\operatorname{tg} x = x$; elle ne se rend pas compte que la courbe est tangente aux deux branches d'hyperboles : $y = \pm 1/x$ et comprise entre elles.

14. Exposé faible ; les définitions des limites sont mal sues, en particulier les quantités ε et α ont été régulièrement interverties. La candidate a fait intervenir la dérivée de $f(x)$ pour l'étude de cette fonction quand x tend vers x_0 , mais d'une manière peu compréhensible. Si la théorie générale des asymptotes n'est pas interdite, son emploi est inutile si on l'applique à des fractions rationnelles dont le dénominateur est linéaire ou à des racines carrées de trinôme du second degré.

15. Il est gênant de voir écrire dans cette leçon :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow \alpha$$

La nécessité d'introduire la notion de dérivée infinie en vue des applications géométriques n'a pas été soulignée, non plus que le fait que la relation avec la continuité doit alors être revue.

16. Exposé faible. La candidate ne s'aperçoit pas que sur son exemple : $y = \frac{1}{4 \cos^2 2x} - 1$, la période est seulement $\frac{\pi}{2}$ et non π . La réduction d'intervalle a

été très mal traitée. D'autre part, une fois l'intervalle d'étude adopté, la résolution d'une équation telle que : $y' = 0$ se fait sans intervention de $2k\pi$.

17. Exposé très mauvais. La candidate sort x^2 du radical sans distinguer le signe de x et ne trouve ainsi qu'une asymptote (d'ailleurs fausse) ; elle élève au carré les équations irrationnelles, sans se préoccuper des conditions de validité d'une telle opération ; enfin, elle ne sait pas calculer la dérivée.

19. La candidate n'a pas compris le sens de certains termes employés dans la rédaction du texte de l'exposé. Pour elle une équation algébrique est de la forme : $P(x) = 0$, où P est un polynôme ; l'équation devient entière si les coefficients du polynôme sont entiers (!) ; enfin le paramètre en question est lui aussi (par analogie) devenu entier. La discussion devenait ainsi très originale, mais sans aucun rapport avec la question posée.

20. Exposé moyen ; outre un peu plus d'ordre dans l'exposé, il aurait fallu préciser dans quelles conditions toutes les primitives diffèrent par une constante, et montrer que, dans le cas général, les conventions de signe pour les aires ne sont pas arbitraires, mais résultent de la formule même à laquelle on veut aboutir.

21. L'exposé a manqué de rigueur ; la propriété fondamentale a été obtenue par division en n parties égales des segments $(1, a)$ et (b, ab) , mais on ne peut affirmer sans démonstration que la somme d'un nombre (devenant infini) de quantités « négligeables » est elle-même négligeable. La démonstration par dérivation de $\text{Log}(ax)$ est d'ailleurs plus rapide et correcte.

23. Exposé faible : les méthodes générales ne sont pas dégagées et les exemples sont mal choisis. Si l'emploi des substitutions x en $-x$, x en $\pi - x$ et x en $\pi + x$ peut faciliter le choix de l'inconnue, il ne faut pas en déduire que $\text{tg } x/2 = t$ reste le seul recours lorsque ces substitutions échouent ; particulièrement sur l'exemple adopté par la candidate : $\text{tg } x + \sin x + \cos x + 1 = 0$, où elle obtient, après passage à $\text{tg } \frac{x}{2}$, pour l'une des solutions $44^\circ 54'$ au lieu de 135° ou de -45° , la solution 180° passant en outre inaperçue.

25. L'exemple adopté par la candidate

$$\begin{cases} \cos x + \sin y = m, \\ \sin x = p \cos y, \end{cases}$$

quoique excellent, était un peu compliqué, ce qui masquait les méthodes générales.

26. La candidate a l'air d'oublier que les méthodes graphiques, lorsqu'elles sont applicables, fournissent une discussion très aisée ; elle oublie la période et résout : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > 0$ avec : $0 < \frac{\pi}{4} - 2x < \pi$ d'où (!) : $-\frac{3\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$. En outre, on peut admettre que le choix de $y = \cos x$ comme exemple de variation de fonction était un peu simpliste.

27. La candidate ignore (ce qui est un défaut général) que la réciproque du système :

$$\begin{cases} A + B + C = \pi, \\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \end{cases}$$

nécessite seulement : A, B, C positifs et l'une des quantités a, b ou c positive.

36. Exposé facile et bien traité. Il aurait été intéressant de signaler que l'emploi des formules trouvées permet, dans la recherche des lieux : $MA^2 \pm MB^2 = \text{Cte}$, de ne pas s'occuper des réciproques.

38. Très mauvais exposé ; la candidate s'est bornée à faire une sorte de dictionnaire : un point, puis deux points... une droite, deux droites... Il fallait d'abord préciser le nombre de conditions nécessaires pour la détermination d'un cercle ; ensuite un fil directeur possible de l'exposé pouvait être les diverses méthodes de construction (définition du cercle, puissance, emploi de transformation telles que

homothétie, inversion...). Cette candidate a terminé son exposé par cette affirmation ahurissante : il n'y a que deux cercles tangents à une droite et un cercle, et que quatre cercles tangents à deux cercles !!!

44. La candidate oublie de considérer le cas où le produit des rapports d'homothétie est égal à 1 et affirme que les homothéties forment un groupe.

50. Exposé très convenable. Toutefois, il faudrait souligner que la propriété fondamentale commune aux deux transformations et caractéristique est que deux couples de points homologues sont cocycliques. Il aurait été intéressant (sans que cela puisse être exigé) de donner des applications basées sur la notion de transmuée d'une inversion, par exemple transformer deux cercles donnés par inversion en deux cercles égaux.

61. La candidate a démontré un grand nombre de résultats et ne s'est pas attachée aux propriétés intéressant les sections hyperboliques ; notamment, la construction des asymptotes a été rapidement traitée par le recours aux points à l'infini, ce qui est hors du programme de Mathématiques Élémentaires ; dans cette classe, on ne peut considérer que des points qui s'éloignent à l'infini, ce qui permet, en regardant l'asymptote comme position limite d'une tangente dont le point de contact s'est éloigné indéfiniment, de traiter la question. En outre, il n'est pas nécessaire que les candidates (ceci vaut aussi pour l'exposé 62) s'attachent à placer une conique donnée sur un cône de révolution donné, problème dont l'intérêt théorique ou pratique est contestable.

INTERROGATIONS

Ces interrogations comprenaient un ou plusieurs exercices, à propos desquels, si le besoin s'en faisait sentir, diverses questions pouvaient être posées. Il convient de rassurer les candidates ultérieures sur la façon dont étaient conduites les interrogations ; en aucun cas, le membre du Jury qui interrogeait la candidate, ne la laissait « sécher » sur l'exercice posé. Mais la note attribuée était fonction de la *contribution personnelle* apportée par la candidate à la solution, compte tenu évidemment de la difficulté de l'exercice.

Les observations qu'appellent ces interrogations sont très voisines de celles relatives aux exposés.

Les exercices d'arithmétique ont été dans l'ensemble correctement traités. En algèbre, les candidates (pourtant licenciées) auraient le plus grand intérêt à revoir les définitions précises des limites et de la continuité. Si les excès connus sous le nom de « trinômite » sont condamnables, l'excès inverse, rendant les élèves pratiquement incapables de comparer un nombre aux racines d'une équation du second degré, ne l'est pas moins ; ceci est en effet indispensable pour la discussion des équations ou inéquations irrationnelles du second degré ; à diverses reprises, il a été constaté que les candidates ne dominaient pas cette question. En ce qui concerne la variation des fonctions périodiques, le plus grand soin doit être apporté à la recherche de la période et à la réduction de l'intervalle grâce aux diverses symétries ; les candidates (qui ont bien dû construire des courbes en coordonnées polaires) ne devraient pas tâtonner ou aller au hasard dans une telle question.

En trigonométrie, que ce soit pour discuter des équations renfermant un paramètre, ou pour des inéquations, les candidates n'ont pas l'air persuadées de l'intérêt considérable présenté par les méthodes graphiques, lorsqu'elles sont applicables. En ce qui concerne les triangles, aucune candidate ne connaît les conditions précises pour que six quantités a, b, c, A, B, C , vérifiant les relations :

$$\begin{cases} A + B + C = \pi, \\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \end{cases}$$

soient les éléments d'un triangle.

En géométrie, les candidates sont toujours très surprises quand on leur demande une réciproque dans une question de lieu géométrique. Elles dominent mal l'emploi des transformations (inversion mise à part) : construire un centre de rotation ou de similitude devient un problème très ardu. Des configurations classiques (telles que tangentes issues d'un point de la directrice à une parabole en relation avec le foyer, ou bien asymptotes-foyers-directrices d'une hyperbole) sont mal connues. Des lieux classiques (comme le lieu des centres des cercles tangents à une droite et à un cercle) ont l'air d'être nouveaux pour les candidates ; il ne s'agit d'ailleurs pas, dans ce cas, d'exiger que les résultats soient sus, mais d'obtenir qu'ils soient retrouvés assez rapidement ; il est d'ailleurs impossible que des candidates, ayant tant soit peu préparé l'oral en faisant des exercices, n'aient pas rencontré de telles configurations.

RAPPORT SUR L'ORAL, Section masculine

Il ne saurait être question de publier au complet les sujets des 115 exposés, ni une analyse complète de la façon dont les candidats ont pu les traiter ; au surplus, cette étude ferait souvent un simple écho à celle qui vient d'être produite ci-dessus pour les candidates ; affirmons cependant que chaque épreuve suggère au Jury des réflexions particulières et que le même sujet, traité par des candidats différents, ne donnera pas toujours lieu à des réflexions du même ordre.

Les observations suivantes, dues à l'obligeance de nos examinateurs et choisies parmi les plus saillantes, marquent donc des tendances et proposent des conseils sans caractère impératif ; il serait vain d'espérer les opposer les unes aux autres, quand elles s'efforcent de souligner les aspects variés et même divergents que peut revêtir un même problème ; tout enseignement n'offre-t-il pas d'ailleurs une perpétuelle nécessité de concilier des contraires et l'activité d'un maître ne doit-elle pas s'inspirer avant tout de cet « esprit d'inquiétude » intellectuelle et pédagogique qui nous paraît être le trait essentiel du Second Degré ?

LISTE DES EXPOSÉS

1. Vecteurs : définition, équipollence, somme et différence, rapport de deux vecteurs parallèles.
2. Orientation du plan. Angles orientés de vecteurs, de droites. Lieu des points M tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$, $(MA, MB) = \beta$. Applications.
3. Angles orientés de droites ; antiparallélisme de deux couples de droites.
4. Lieu des points M tels que $MA/MB = k$. Applications dans le plan et dans l'espace.
5. Cercles orthogonaux dans le plan.
6. Applications de la similitude plane à la recherche de lieux et d'enveloppes.
7. Existence de la tangente en un point d'une ellipse. Propriétés caractéristiques. Générations tangentielles de l'ellipse. Exemples.
8. Ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle. Applications.
9. Notion de système de numération.
10. Technique opératoire de la division des entiers dans le système décimal.
11. Reste de la division d'une somme par un nombre ; divisibilité par 9 et par 11 dans le système décimal ; applications.
12. Fractions décimales. Définition. Condition pour qu'une fraction soit égale à une fraction décimale. Opérations élémentaires.
13. Premier exposé relatif aux nombres entiers positifs.

14. Etude de

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \quad aa' \neq 0$$

(les exemples proposés seront à coefficients numériques).

15. Fonction $y = \text{Log } x$; variation, courbe représentative ; formule d'addition.

16. Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes et aux diverses époques de l'année.

17. Inégalités entre les faces et les dièdres d'un trièdre (on suppose traitée la question des trièdres supplémentaires).

18. Cercles passant par deux points et tangents à un cercle donné.

19. Branches infinies, directions asymptotiques, asymptotes de l'hyperbole.

20. Tangente en un point de l'hyperbole, existence, diverses propriétés caractéristiques, diverses générations tangentielles.

21. Inéquations trigonométriques simples.

22. Equilibre d'un point matériel sur une courbe, avec ou sans frottement.

23. Représentation plane de la surface terrestre, divers systèmes cartographiques.

24. Orthogonalité d'une droite D et d'un plan P, extension aux droites parallèles à D et aux plans parallèles à P. Applications.

25. Le cube — ses symétries — applications. Représentation d'un cube ayant une diagonale verticale.

26. Polaire d'un point par rapport à un cercle. Pôle d'une droite. Applications.

27. Applications de l'inversion supposée acquise, à des problèmes relatifs aux figures de l'espace : théorèmes, constructions, lieux, enveloppes. Faire un choix (qui se limite à un exposé d'une demi-heure).

28. Application de l'inversion à la démonstration de théorèmes.

29. Les polynômes. Définition. Identité. Addition. Soustraction. Multiplication.

30. Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Exemples numériques avec un paramètre.

31. Progressions géométriques. Applications.

32. Dérivées de la racine carrée d'une fonction. Applications à la variation d'une fonction.

33. Notion de différentielle d'une fonction, d'une variable, interprétation graphique, usages.

34. Probabilités simples. Applications.

35. Résolution d'un triangle connaissant les trois côtés.

36. Etude de systèmes de deux équations à deux inconnues, l'une des équations donne la somme ou la différence des inconnues, l'autre donne, soit la somme, soit le produit, soit le quotient de deux mêmes rapports trigonométriques des inconnues.

37. Multiples communs à deux ou plusieurs nombres. P.P.C.M. Applications (la décomposition en facteurs premiers n'est pas encore acquise).

38. Perpendiculaire commune à deux droites. Représentation en géométrie cotée.

39. Plan tangent en un point d'une sphère. Cône et cylindre circonscrit. Applications.

40. Projection orthogonale ou oblique sur un plan ou sur une droite. Projection des vecteurs.

41. Faisceaux harmoniques. Applications.

42. Lieu des points M du plan tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = C$.

A et B étant deux points donnés α et β étant deux nombres donnés n'ayant pas la même valeur absolue.

43. Définition de deux figures égales dans le plan. Deux figures directement

égales peuvent se déduire l'une de l'autre, soit par une rotation, soit par une translation.

44. Produit de deux homothéties. Applications.
45. Similitude directe plane définie comme transformation ponctuelle. Centre de similitude.
46. Rotation dans l'espace définie comme transformation ponctuelle. Applications.
47. L'inversion dans le plan. Définition. Figure formée par deux points et leurs inverses. Conservation des angles.
48. Les définitions suivantes relatives aux coniques à centre sont-elles équivalentes : 1) lieu des centres des cercles passant par un point donné et tangentes à un cercle donné ; 2) lieu des points dont le rapport des distances à un point donné et à une droite donnée est constant.
49. Nombres premiers. Définition. Propriétés élémentaires. Applications (la décomposition d'un nombre en facteurs premiers n'est pas à exposer).
50. Décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers. Applications.
51. Premier exposé relatif aux fractions.
52. Définition et propriétés de la racine carrée à une unité près par défaut d'un nombre entier. Technique opératoire.
53. Quotient exact ou approché à $1/10^n$ près de deux nombres entiers.
54. Montrer que pour un petit angle x exprimé en radians, x est une valeur approchée de $\sin x$ et de $\operatorname{tg} x$, $1 - \frac{x^2}{2}$ est une valeur approchée de $\cos x$. Applications à des exercices de calcul numériques approchés. Emploi des tables dites tables S et T de logarithmes à l'usage des petits angles ; justification.

1. La notion de vecteur libre n'est pas dégagée ; il n'est pas dit que les opérations envisagées dans cet exposé sont définies pour les vecteurs libres (l'addition des vecteurs est d'ailleurs définie en trois étapes successives, et dans le plan seulement).

La commutativité de l'addition est signalée avant l'associativité, laquelle n'est même pas établie ; cela ne constitue pas une erreur logique, mais ce n'est guère recommandable.

L'absence de la notion d'élément neutre, d'opposé d'un vecteur, a été remarquée.

Pour la différence de deux vecteurs, l'existence est démontrée accidentellement, sans que le problème ait été posé ; l'unicité n'est pas établie.

Quant au rapport de deux vecteurs parallèles, le candidat s'est borné à en donner la définition, pour laquelle il se croit obligé d'orienter les supports des vecteurs. Il est vrai que, dès le début de l'exposé, le candidat avait cru à des vecteurs « positifs » ou « négatifs ».

2. « Soit P un plan. Si on oriente une perpendiculaire Δ à P, le sens positif de rotation dans P sera celui qui va de la droite vers la gauche de l'observateur d'Am-père de Δ . » Cette convention n'a pas de sens si l'on n'ajoute pas que le mobile considéré passe *devant* l'observateur.

Le candidat a défini la « détermination principale » d'un angle de vecteurs comme un angle compris entre 0 et 2π ; sa définition est imprécise aux bornes : veut-il dire que $0 \leq \alpha < 2\pi$?

En outre, cette notion est inutile, et même nuisible. Elle a conduit le candidat à des erreurs.

Il convenait de mettre en évidence les propriétés du groupe des angles de droites et du groupe des angles de vecteurs.

Les problèmes élémentaires de lieux géométriques sont maltraités (introduction de demi-angles de droites, orientations fantaisistes, réciproques, etc...).

6. S'il existe une similitude S de centre o, telle que $M' = S(M)$ et $N' = S(N)$,

il existe aussi une similitude S' de centre o telle que $N' = S'(M)$, $N'' = S'(M')$. Ce point si souvent utile n'est pas mis en évidence.

7. Le candidat cherche d'abord l'intersection de l'ellipse avec une droite issue de M (point fixé sur l'ellipse), ce n'est pas dans le sujet, cela peut aussi donner une idée fausse, car on sait déterminer des tangentes pour des courbes où cette construction ne réussirait pas.

Il ne prouve pas l'existence de la tangente, il ne dit pas pourquoi il obtient la bissectrice extérieure de $\widehat{FMF'}$.

9. Dans cet exposé, toute la théorie des nombres entiers peut être supposée acquise. Le premier résultat à établir est le suivant : si b est un nombre > 1 , et k un nombre > 1 , tout entier compris (au sens large) entre 0 et $b^k - 1$ se met d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$ où $0 \leq r_i \leq b - 1$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

13. Le candidat a d'abord posé, comme axiomes, les principales propriétés de l'addition, de la multiplication, et de la relation d'ordre. Ensuite, il les a justifiées par référence avec la notion de collection d'objets. Au niveau où se trouvait placé l'exposé, ces justifications étaient insuffisantes. Par exemple, il fallait montrer que le résultat des opérations était indépendant des collections représentatives choisies. L'addition doit être définie, non par la réunion des collections, mais par leur « somme », car la réunion ne convient pas si les collections considérées sont non disjointes ; ou alors, il fallait se limiter aux collections disjointes. Le produit devait être défini par référence aux collections produits ; ou du moins devait-on faire appel à la notion de couple. On n'a pas bien su si la notion de « suivant » et de « précédent » était une notion première ou une notion déduite des notions premières. Etc...

16. Un candidat suppose les arcs de cercles proportionnels à leurs flèches ; il néglige les questions d'orientation ou l'examen des divers cas de figure ; il oublie que la durée du jour et la durée de la nuit ont pour somme 24 heures ; il esquisse à peine la définition de la zone boréale et des tropiques.

Un autre candidat calcule cette « inégalité », mais il n'explique pas bien son calcul ; quelques raisonnements géométriques faisant intervenir la sphère locale s'imposeraient. Il donne sans explications les dates des équinoxes, le fait qu'elles coïncident avec de fortes marées (mieux vaudrait ne pas soulever cette question) ; il n'explique pas non plus cette phrase : « au solstice, le soleil est stationnaire », ni celle-ci : « pour l'hémisphère austral, il suffit de changer les dates ».

24. Exposé très faible et très obscur. Le candidat adopte la définition suivante : une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan. Il établit, ou presque, qu'il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan, mais à aucun moment il ne se préoccupe de l'existence. D'autre part, l'idée générale qui permettrait de résumer les propriétés en une phrase, à savoir : l'orthogonalité d'une droite et d'un plan ne dépend que de la direction de ces éléments, n'est pas mise en évidence.

28. Le Jury aimerait que les candidats recherchent dans leur préparation des applications autres que les classiques théorèmes de Ptolémée et de Feuerbach. L'exposé entendu, d'un rythme rapide, satisfaisant dans son ensemble, reste très inégal ; l'étude de la disposition des points dans le théorème de Ptolémée est encore escamotée ; l'application à la recherche des formes réduites d'un faisceau de cercles a valu au candidat un bon point.

30. Signalons, une fois de plus, que les relations $ab' - a'b = 0$ et $bc' - b'c = 0$ n'entraînent pas nécessairement $ac' - a'c = 0$, lorsque $b = b' = 0$.

34. Nous invitons les candidats à réfléchir sur la notion de probabilité. La définition classique, rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, exige quelques explications.

Un problème, dans lequel on n'a pas précisé avec soin ce qu'on entend par événements également probables, n'a aucun sens ; il faut insister sur le fait que les divers cas possibles sont également probables, car il y a là l'apparence d'un cercle vicieux ; à ce niveau, on le justifie en se référant à l'expérience.

Il serait bon aussi, à l'aide d'exemples bien choisis, de faire allusion au théorème des probabilités totales et au théorème des probabilités composées.

36. Exposé très lent, maladroit et sans précision. Signalons, entre autres, quelques fautes qui ne seraient pas pardonnées à des élèves :

1) X étant l'inconnue, soit à résoudre $\cos X = a$, il faut $-1 < a < 1$ (au lieu de $-1 \leq a \leq 1$), soit φ tel que $\cos X = \cos \varphi$ (au lieu de φ défini par $\cos \varphi = a$ $0 \leq \varphi \leq \pi$).

2) $\log ab = \log a + \log b$ sans s'occuper des signes respectifs de a et de b .

37. Un candidat fait un bon exposé, correctement traité, mais il ne semble pas le dominer. On peut souhaiter renouveler l'intérêt de ce sujet : les propriétés du P.P.C.M. pourraient être un peu systématisées en introduisant, ou tout au moins en dégageant *a posteriori*, l'idée d'opération dans un ensemble, avec ses qualités associative, commutative, distributive.

50. Comme beaucoup d'autres, ce candidat croit qu'un multiple d'un nombre contient les facteurs premiers de ce nombre avec un exposant au moins égal et c'est tout ; il devrait pourtant savoir qu'il peut contenir bien d'autres facteurs encore.

CONCLUSIONS

Le niveau moyen de ce concours ne paraît pas sensiblement différent du niveau des années précédentes, et nous serions heureux de le voir s'élever peu à peu. Il conviendrait avant tout qu'un plus grand nombre de candidats songe à l'aborder ; une réforme de la licence nous paraît en être une condition préalable ; les certificats qui constituent la licence d'enseignement de Mathématiques — et en particulier ceux de calcul différentiel et intégral et de physique générale — ont pris, dans la plupart des Facultés, une orientation et un volume qui exigent pratiquement deux années d'études et qui les détournent de leur rôle utile dans la formation des maîtres du Secondaire.

Mais une préparation plus organisée et plus poussée devrait aussi permettre aux candidats de reprendre contact avec les programmes des classes du 2^e cycle des lycées et collèges et de réfléchir en temps utile à l'enseignement qu'ils seront bientôt appelés à donner.

Il nous faut cependant reconnaître sans excès d'optimisme, que la plupart des candidats admis aux épreuves théoriques de la session normale de mai-juillet 1956 sont capables de faire rapidement de substantiels progrès et d'acquérir de réelles qualités pédagogiques.

Sur ce dernier point, cette promotion sera beaucoup moins favorisée que les promotions précédentes, puisqu'au lieu de bénéficier d'un stage effectif d'une année dans un Centre pédagogique régional, ces jeunes gens ont dû, par les nécessités du moment, être « externes », c'est-à-dire chargés d'un service d'enseignement de douze heures par semaine dans un lycée et plus souvent dans un collège, parfois très éloigné du chef-lieu académique. Leur bonne volonté et le dévouement de leurs conseillers pédagogiques leur permettront, nous n'en doutons pas, de tirer le meilleur parti de cette situation délicate.

P. DEDRON et L. THIBERGE.