

IV. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

LANGAGE ET MATHÉMATIQUES ⁽¹⁾

par LAURENT SCHWARTZ

Professeur à la Sorbonne

Une théorie ou une étude complète des relations entre langage et Mathématiques serait un très gros travail. Je me bornerai à quelques observations d'ordre pratique, faites du point de vue pédagogique, en particulier sur l'importance du langage en Mathématiques. Les mathématiciens sont bien convaincus de cette importance (les physiciens le sont peut-être moins) ; mais il n'est pas mauvais de s'en convaincre encore plus.

Je commencerai pas quelques exemples pris au hasard de ce que j'appellerai des formulations prémathématiques d'un fait scientifique. Le fait scientifique est perçu, compris même, mais l'individu — enfant ou adolescent des divers âges ou même hommes à différentes époques de l'histoire — ne peut l'expliquer en langage mathématique.

Je prends le cas de mes deux enfants, alors qu'ils avaient 6 et 10 ans. Je demandai au plus jeune quel âge aurait son frère quand il aurait, lui, 40 ans. Il répondit tout de suite 44 ans. Mais pourquoi ? « Eh bien, me répondit-il, parce que 6 et 10, et puis 40 et 44, ça fait la même chose. » Le fait scientifique était compris, mais ne pouvait être formulé de façon exacte. Un adulte, ayant une certaine formation mathématique, mais ayant quitté le lycée depuis longtemps, dirait peut-être : « 10 est à 6 comme 44 est à 40 », sans préciser comment est faite la comparaison des deux nombres, différence ou rapport.

Un individu sans formation scientifique ou ayant perdu de vue les principes de cette formation est donc incapable de formuler un fait scientifique un peu complexe. Et cependant, cette formulation est indispensable. Car l'enfant qui dit : « c'est la même chose » pourra résoudre de cette façon les petits problèmes les plus élémentaires qui se posent à cet âge ; mais pour progresser, il faut une formulation précise ; ce n'est pas une manie de professeur, c'est une nécessité du travail scientifique.

Je citerai le cas, non plus d'un enfant, mais d'un professeur au Collège de France. Voulant exprimer que la précision des résultats est proportionnelle au carré du nombre des expériences, il dit : cent expériences ayant permis d'atteindre une certaine précision, 400 expériences donneront une précision seulement deux fois plus grande ; la précision est donc bien proportionnelle au carré du nombre d'expériences. L'exemple cité par le professeur montre qu'il a compris la loi de Gauss et qu'il l'applique correctement, mais, s'il veut l'énoncer, il dit le carré là où il devrait dire la racine carrée.

On pourrait citer beaucoup d'autres exemples. Livres de géographie ou de médecine abondent en rapports inversés ; géographes et médecins ne se trompent pas quand ils reviennent au fait réel qu'ils ont voulu mesurer ; mais ils ne sont pas parvenus à traduire correctement cette mesure. Il y a là l'expression d'une mentalité en quelque sorte prémathématique qui n'interdit pas toute activité à son auteur, mais peut l'empêcher d'accéder à des recherches un peu plus complexes. C'est pourquoi

(1) Nous donnons ici le texte, enregistré au magnétophone, de la conférence faite par M. Laurent Schwartz, lors des journées d'étude de Sèvres, le 3 novembre 1937. Nous conservons ainsi le ton direct, la phrase toute naturelle, la pensée en quelque sorte spontanée qui ne furent pas de minces attraits de cette importante et brillante conférence. (N.D.L.R.)

nous faisons tant d'efforts, du début à la fin de notre enseignement pour favoriser l'acquisition de ce langage mathématique.

C'est pourquoi les Mathématiques ont une valeur formative bien au-delà des Mathématiques elles-mêmes. Indépendamment du fait que les Mathématiques sont la clé de toutes les autres sciences, l'apprentissage de la formulation mathématique par la perfection du langage mathématique a une valeur formative éminente, même par exemple pour des naturalistes qui, dans le cours de leurs études, n'utiliseront que fort peu de Mathématiques.

Les résultats de notre enseignement restent insuffisants sur ce plan. On le voit au Baccalauréat et aux examens de licence où nos étudiants commettent encore des erreurs grossières par faute de compréhension logique ou insuffisance de langage plus que par ignorance mathématique. Cela tient en grande partie à l'insuffisance de l'horaire d'enseignement des Mathématiques qui rend impossible l'habitude raisonnée de « la mise en langage mathématique ». L'élève comprend beaucoup plus de choses qu'il ne peut en exprimer. S'il avait pu acquérir ces moyens d'expression, il y a un âge, vers la Troisième ou la Seconde, où cette difficulté ne gênerait plus son développement, où il serait inexcusable de ne pouvoir formuler sa pensée avec précision.

LANGUE FRANÇAISE OU FORMULE.

Étudions maintenant la formulation mathématique elle-même. Elle peut prendre diverses formes. On peut utiliser une formule :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

On peut aussi énoncer la phrase « le carré d'une somme... »

Il n'y a pas de *différence théorique* entre ces deux formulations, mais seulement une *différence pratique*. La formule seule, ou la phrase complète, constituent les procédés extrêmes de l'expression ; il peut y avoir des procédés intermédiaires. Souvent, mais pas toujours, la formule est la plus courte.

Mais, si d'un point de vue mathématique, les deux expressions se valent, il peut n'en être pas de même au point de vue pédagogique où la façon d'exprimer compte beaucoup. Quelle sera l'expression qui sera la mieux comprise par l'enfant, ou le plus rapidement ? Sans aucun doute, ici, ce sera la formule. Il faudra donc commencer par elle et pendant un certain temps s'en tenir à ce moyen d'expression. L'enfant pourra utiliser la formule avec des nombres, des polynômes, etc... Puis, une fois le fait bien compris, il apprendra à l'exprimer en français. C'est un exercice très utile, non seulement parce qu'il doit savoir dire ce qu'il a bien compris, mais aussi parce que c'est une école de langage mathématique. Seulement cet excellent exercice correspond à un deuxième stade de la formation et il ne faut pas trop insister : l'enfant risque, sur cet exemple, de n'en pas bien saisir l'utilité. Et, pourtant, celui qui n'y parviendrait pas, même s'il a bien compris l'emploi de la formule, sera sans doute incapable de rédiger convenablement la solution d'un problème.

Prenons un autre exemple : $e = 1/2 g t^2$. Quant à moi, j'ai été soulagé quand on m'a donné la formule ; auparavant, on m'avait parlé d'espaces parcourus proportionnels aux carrés des durées, etc... Discours compliqués ; la formule éclaire tout. Que ne l'avait-on donnée plus tôt ? Je sais bien qu'on veut tenir compte de l'ordre historique, qu'on veut montrer au jeune physicien comment on est parvenu à la loi, car, après tout, elle ne tombe pas du ciel. Mais on peut donner la formule tout de suite, *si c'est plus simple*, quitte à bien faire comprendre ensuite comment on l'a trouvée (car on doit faire comprendre comment on découvre).

De même pour la formule des gaz parfaits $p v = \frac{m}{M} RT$. C'est encore plus net car on l'obtient par approximations successives. On étudie d'abord la loi de Mariotte $p v = \text{Cte}$, à température constante. L'élève oublie ou ne pense pas que c'est à tempé-

rature constante (il lui arrive même d'oublier que c'est pour une masse déterminée de gaz). Puis on fait varier la température, à pression ou volume constant, et on parvient à la formule $pV = \frac{m}{M} RT$. L'élève est satisfait : il se sent capable de

résoudre tous les problèmes. Cependant la loi de Mariotte subsiste en sa mémoire comme une loi distincte, et il ne sait alors plus bien quand on applique la première formule ou la seconde. En fait, on aura rendu un mauvais service à l'élève en méconnaissant l'importance des moyens mis à notre disposition par la formule.

Il est vrai que si on énonce celle-ci, l'élève ne s'intéressera peut-être plus à la méthode par laquelle on a pu l'établir. Eh bien, tant pis ! Ce qui est essentiel, c'est qu'il sache manier la physique, il est moins indispensable qu'il sache comment on a trouvé toutes les lois.

Pour apprendre comment on découvre, il sera plus instructif, en travaux pratiques, de faire découvrir une formule sur quelque chose qui soit inconnu de l'élève. Et même dans ce cas, ce qu'il retiendra ensuite, c'est la formule finale obtenue.

Je ne veux pas insister, mais j'ai cru utile de dire qu'on s'attache trop au point de vue historique et qu'on ne tire pas tout ce qui pourrait l'être du point de vue synthétique final. La formule, forme extrême du langage, en quelques lettres, exprime notre compréhension des nombreux faits physiques qui y sont impliqués, et ceci de la façon la plus simple.

Ceci n'est évidemment pas vrai à tous les stades du développement de l'intelligence. Un très jeune enfant pourra, à la rigueur, comprendre la règle du carré exprimée en langage ordinaire, alors que, pour lui, la formule serait incompréhensible, et plus tard ce sera l'inverse.

Mais, dans beaucoup de cas, dans les Mathématiques Supérieures en particulier, il n'y a pas de formules résumant tout ce qui est nécessaire à l'expression de la pensée ; il faut joindre quelques phrases aux formules. Sans doute est-ce là une des difficultés que rencontrent les étudiants qui ont à retenir, non seulement des formules, mais un certain nombre de phrases.

Un exemple est donné par la définition de la continuité d'une fonction en un point. Cela peut s'exprimer en formules, dans le langage de Peano. Mais ces formules ne disent rien de plus ; ce n'est pas parce qu'on aura écrit $\forall$ pour « quel que soit » et $\exists$ pour « il existe », qu'on aura mieux compris (même si $\forall$ et $\exists$ sont plus rapides à écrire. Il y a un effort à faire pour formuler :

« Quel que soit un nombre ε strictement positif, il existe un nombre η strictement positif tel que, pour tout x compris entre $\eta_0 - \eta$ et $\eta_0 + \eta$ on ait

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon. »$$

Il y a loin de la formule idéale $(a + b)^2$. Il faut se rappeler et la signification et l'expression : c'est faire une construction logique qui ne cessera jamais de demander de la réflexion.

Cette connaissance du langage scientifique, indispensable aux étudiants de nos Facultés, est un des objets de l'Enseignement du Second Degré. Là encore, j'insiste sur la nécessité d'un nombre d'heures indispensable pour que les élèves moyens se familiarisent avec ce langage. Il y a là, d'ailleurs, un problème en relation avec l'apprentissage de la langue, et il faut alerter les professeurs de lettres. Quand l'étudiant éprouve des difficultés pour définir la continuité, il montre aussi qu'il ne comprend pas bien des phrases énoncées. Les professeurs de lettres insistent sur la formation du style, ou sur la langue littéraire ou poétique : les mots, les phrases, doivent y avoir un pouvoir suggestif. Ce n'est pas mauvais en soi, mais c'est le contraire du langage scientifique où ce qui est écrit ou dit doit avoir la même signification pour tout le monde. L'apprentissage de ce langage doit être fait par le professeur de Mathématiques et celui de physique, mais aussi par le professeur de

français, à partir d'exemples tirés de la vie courante, en insistant sur l'architecture de la phrase, sur sa structure, sur sa signification précise, plutôt que sur le style.

On est frappé par les lacunes de nos étudiants, en Faculté, quant au langage scientifique. Regardons, par exemple, ce qu'est la négation d'une proposition. Reprenons la définition de la continuité d'une fonction, donnée plus haut, et écrivons-la sous la forme symbolique habituelle aujourd'hui :

(I) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que, $\forall x$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

(Je crois d'ailleurs que, pour les étudiants, il vaut mieux, au début, écrire la phrase au complet).

Ceci posé, demandons à un étudiant ce qu'est une fonction qui n'est pas continue au point x_0 . Trop souvent, la réponse est confuse. Or je prétends que ce n'est pas un problème mathématique, mais une question de logique courante et de bon langage français. De nombreux exercices de négation d'une proposition, — même à partir d'une phrase banale comme : « j'emporte un parapluie quand il pleut » — seront utiles à tous ceux qui auront à faire des raisonnements par l'absurde où l'on commence par nier ce qu'on veut obtenir pour montrer ensuite que cette négation est contradictoire.

Il y a deux moyens de trouver la négation d'une proposition :

1° On peut réfléchir : la proposition directe commence par « quel que soit ε , il se produit un certain événement (si la fonction est continue) ». Donc si la fonction n'est pas continue, il existe un certain ε assez petit pour lequel l'événement ne se produit pas. Reste à voir ce qu'est cet événement et en prendre la négation. Or cet événement, c'est qu'il existe η tel que la propriété $|x - x_0| < \eta$, etc... La négation est, « il n'existe pas de η tel que la propriété ait lieu », ou encore, « quel que soit η , la propriété ne sera pas vraie ». Ce qui se produisait, c'était que, quel que soit x compris entre $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$, on avait... Cela ne se produira pas : donc il existera une valeur de x comprise entre $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$, qui entraînera l'événement contraire de ce qui était énoncé d'abord, soit $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.

Un tel énoncé demande un effort soutenu ; il est facile de s'embrouiller et on s'embrouille trop souvent.

2° On peut parvenir simplement au résultat en appliquant une règle de logique : pour former la négation d'une proposition, on peut permuter les expressions « quel que soit » et « il existe » (donc les signes $\forall$ et $\exists$), et remplacer l'ancienne conclusion par son contraire, soit :

(I') $\exists \varepsilon > 0$, tel que, $\forall \eta > 0, \exists x$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$, tel que $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.

Si les étudiants ne parviennent pas facilement à énoncer cela, c'est qu'on ne leur a pas assez fait remarquer les règles de la négation. Problème de langage mathématique, mais problème de langage courant aussi et qui devrait être étudié par le professeur de Mathématiques et par le professeur de français. Il y a d'ailleurs des remarques à ce sujet dans Platon, car les philosophes grecs s'exerçaient à nier les propositions. Nos élèves doivent savoir nier une proposition, à la fois en réfléchissant, parce qu'ils doivent être capables de s'expliquer, et aussi sans réfléchir, mais en appliquant strictement la règle. De même, dans une suite d'additions et de soustractions algébriques

$$a - \{ b - [c - (d - e)] \},$$

on peut réfléchir pour savoir si, finalement, e s'ajoute ou se retranche. Mais il y a une règle simple de la parité du nombre de signes « moins » (ici quatre) qui permet de conclure (e s'ajoute). L'enfant ou l'homme de la civilisation prémathématique n'avait pas vu ces règles qui sont une économie de pensée.

De la même façon, nous pouvons préciser le sens de cette phrase tirée d'un article de journal au sujet de l'arbitre dans une compétition sportive : « Personne ne refusera de nier que l'arbitre n'ait pas été injuste. » Je ne sais pas si l'auteur de la

phrase voulait exactement dire ce qu'on peut comprendre. Mais appliquons la règle du décompte des négations : 1° personne *n'* (le professeur de latin montre que personne se traduit en latin, soit par *personne*, soit par *quelqu'un* ; cela montre que le décompte des négations en français n'est pas chose facile ; raison de plus pour y insister) ; 2° *refusera* ; 3° *nier* ; 4° *n'ait pas été* ; 5° *injuste*, qui sont respectivement les négations de : 1° *quelques-uns* ; 2° *acceptera* ; 3° *affirmer* ; 4° *n'ait été* ; 5° *juste*. Il y a cinq négations, donc la phrase signifie que l'arbitre a été trouvé injuste.

L'élève de Mathématiques devra donc être rompu au décompte des négations et des affirmations. Mais il n'y a évidemment pas que cela. La place des expressions dans une phrase est très importante. Et pourtant on voit aussi des étudiants placer indifféremment les « quel que soit » avant ou après les « il existe ». Voyez ce que cela donne si, dans la définition (I) de la fonction continue, on inverse le $\forall$ et le $\exists$ du début :

(I'') $\exists \eta$ tel que, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta$ vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Cela signifie que la fonction est constante dans l'intervalle $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ puisque $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, quel que soit ε , donc égal à zéro : cela signifie donc que f est constante dans un voisinage convenable de x_0 .

Ce serait donc un bon exercice pour les élèves qui étudient cette question pour la première fois d'examiner toutes les phrases qu'on peut obtenir en changeant la place des mots ; le sens de la phrase (I) apparaîtra alors plus clairement.

Prenons un autre exemple, celui de la convergence simple et celui de la convergence uniforme d'une suite de fonctions, énoncés qui ne diffèrent que par la simple interversion d'un « il existe », et d'un « quel que soit ». La convergence simple de la suite des $f_n(x)$, vers $f(x)$ pour n infini s'exprimera symboliquement :

(II) $\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N$, on ait $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

La convergence uniforme : si, quel que soit ε , il existe un N , le même pour tous les x , soit :

(II') $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que, $\forall x, \forall n \geq N$, on ait $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

La seule différence entre ces deux phrases est que le « quel que soit » est placé de la première place dans (II) à la troisième dans (II').

De tels exercices, certainement profitables et efficacement formateurs, devraient être faits, sinon au niveau de la Quatrième, tout au moins dans les classes supérieures. Cela pourrait être préparé par des exercices de pure rédaction portant sur des résultats simples ou des exercices déjà bien compris. Là encore, il faut insister que pour faire ce travail, il faut disposer, en classe, d'un temps suffisant, car ce n'est pas à 18 ans que tous les scientifiques, dont nous avons besoin, doivent être rompus aux mécanismes de base.

Les incorrections de langage doivent donc être pourchassées. Non seulement chez les élèves, mais aussi dans les Mathématiques courantes elles-mêmes où elles sont souvent suggérées par les mots s'ils ont, en Mathématiques, un sens différent du sens usuel. Le mot *translation* évoque inévitablement un « mouvement » et non une transformation géométrique. Mieux vaudrait pour celle-ci utiliser un mot qui n'ait pas d'autre signification, au lieu d'employer une expression française ayant un sens ambigu. De même pour *déplacement* qui, en général, signifie l'ensemble de l'acte avec tous ses intermédiaires de son début à son terme, alors qu'en géométrie on l'utilise justement dans une autre acception.

On emploie de même indifféremment les mots famille, système, catégorie, groupe. Pourquoi ne pas choisir et s'en tenir à un seul mot.

Plus grave est l'ambiguïté de notations raccourcies, celle des fonctions composées, par exemple. Que signifie $f'(2x)$? Est-ce la dérivée de la fonction $x \rightarrow f(2x)$, ou la valeur de la dérivée de la fonction f pour la valeur $2x$ de la variable ? Les

expressions complètes sont claires, on ne peut les confondre ; mais la notation raccourcie est ambiguë.

Il faut bannir des expressions telles que « augmente indéfiniment », d'abord parce qu'il y a « augmente », et parce que, en énonçant trop brièvement deux propriétés, on risque d'en laisser une dans l'ombre. C'est bien le cas du lemme d'Abel où on peut correctement dire « si u_n décroît constamment et tend vers zéro » ; mais on risque de ne retenir que la deuxième condition. Mieux vaudra insister, grâce à une phrase plus longue : « Si u_n satisfait aux deux conditions suivantes : a) u_n décroît constamment, b) u_n tend vers zéro... » ; l'élève sera frappé par le chiffre deux et n'oubliera pas.

Il y a aussi beaucoup de confusion dans la terminologie relative aux équations et aux identités. Une identité peut être vraie ou fausse, on ne retient évidemment que les identités qui sont vraies ; mais avant d'en étudier une, on ne sait si elle est vraie ou fausse. Ainsi :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{est vraie ;} \\ (a + b)^3 &= a^3 + b^3 && \text{est fausse.}\end{aligned}$$

Il s'agit toujours de vérifier si ce qui est écrit, oui ou non, est vrai pour toutes les valeurs des lettres.

Quant à une équation, ou bien elle a une ou plusieurs racines, ou bien la solution est indéterminée (et si elle est vérifiée, quel que soit x , elle est une identité), ou bien elle n'a pas de solution. Dans tous les cas, il s'agit de trouver les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Prenons garde au mot *existence*, pas toujours employé en Mathématiques comme dans le langage courant. On le voit bien quand on introduit le ou les points à l'infini. Cette existence est pure convention, et non existence réelle, ainsi que le montre bien la pluralité des attitudes possibles : dans le plan euclidien, il n'y a pas de point à l'infini ; dans le plan de la géométrie projective, les points à l'infini sont sur une droite ; dans le plan de la géométrie anallagmatique, il y a un point à l'infini (et les élèves de Mathématiques Élémentaires constatent l'avantage qu'il y a à l'introduire). Voilà une belle occasion d'éveiller l'intelligence des élèves sur le sens du mot « exister ».

On ne se méfie pas assez des faux amis. On croit qu'un signe déjà connu peut être employé sans justification hors du domaine où sa première signification a été bien définie. Lorsqu'on définissait, autrefois, un nombre complexe par le symbole $a + bi$, on oubliait que les signes $+$ et $.$ n'ont aucun sens avant qu'on ait défini les opérations d'addition et de multiplication. Mais du fait qu'on avait écrit $a + bi$, on oubliait la nécessité de définir correctement ces opérations. On évite la faute, aujourd'hui, en introduisant les symboles (a, b) et sur l'ensemble de ces symboles, on définit une addition et une multiplication.

Mais la faute persiste dans d'autres cas. Soit, par exemple, la définition de l'intégrale curviligne dont le symbole est $\int_r A dx + B dy + C dz$. Que faut-il définir ? Est-ce le symbole $\int$, la courbe orientée (Γ) ou l'expression

$$A dx + B dy + C dz ?$$

Que signifient ces signes $+$? Dans $A dx$ que signifie ce signe $.$ et la multiplication de ce A par la différentielle de la fonction x ? Même si l'on se dit que « provisoirement le symbole n'a pas de signification », il est si compliqué qu'on ne sait plus ce qui est à définir et ce qui ne l'est pas et on se laisse tromper par les analogies. Il faudrait, comme pour les nombres complexes, écrire $\int_r (A, B, C)$, puis définir ce qui est écrit (A, B, C) , c'est-à-dire une forme différentielle. Soit un ensemble de trois fonctions vérifiant des conditions pour que la forme soit intégrale, par exem-

ple A , B et C sont des fonctions continues. On définira ensuite l'addition des formes différentielles, soit :

$$(A, B, C) + (A', B', C') = (A + A', B + B', C + C') ;$$

on définira ensuite les formes différentielles qui se trouvent être la différentielle d'une fonction ou

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

puis la multiplication de la forme différentielle (A, B, C) par la fonction g

$$(A, B, C)g = (Ag, Bg, Cg).$$

Alors seulement il est permis d'écrire une forme différentielle $A dx + B dy + C dz$; ce n'est pas amusant du tout. Il reste à définir son intégrale sur une courbe orientée. On pourra utiliser une représentation paramétrique, à condition de montrer que le résultat est indépendant de la représentation paramétrique choisie, et enfin montrer que l'intégrale de la différentielle de $f(x)$, c'est $f(x_2) - f(x_1)$.

Il y a une grave lacune si on ne dit pas tout cela ; c'est fâcheux du point de vue mathématique, car on rend toute démonstration correcte impossible. Et, pourtant, une définition correcte rendrait les plus grands services aux physiciens, car ce qu'on appelle travail élémentaire, ce n'est pas un $d\mathcal{Q}$, c'est une forme différentielle $A dx + B dy + C dz$, où A , B et C sont les trois composantes de la force. Et dans un champ de force, ce qu'on appelle circulation du vecteur-champ, sera l'intégrale $\int_{\Gamma} A dx + B dy + C dz$ ainsi correctement définie.

**

En conclusion, je voudrais retoucher tout ce que je viens de dire. Nous avons souligné l'importance du langage, de la correction, de la rigueur, de la mise au point de la rédaction. Mais il ne faut pas assommer l'enfant par trop d'exigence brutale et instantanée de rigueur et de correction. Il faut développer l'intuition. Car, au fond, comment trouve-t-on un problème ? Ce n'est pas par un raisonnement rigoureux. On voit rapidement, de façon non rigoureuse et, éventuellement, on peut se tromper. Mais, quand on croit avoir trouvé, on assure la solution en la mettant sous une forme rigoureuse (on s'aperçoit des erreurs à corriger, des améliorations à apporter). Cette méthode est vraie pour les élèves comme pour les grands mathématiciens. Cela ne signifie pas qu'il faut préparer tout de suite nos élèves à la découverte, mais il ne faut surtout pas les stériliser et ils auront aussi à trouver leurs problèmes.

Tous les procédés sont donc permis au premier stade de la recherche : trois points paraissent-ils se placer sur une droite ? Nous penserons qu'ils sont alignés. On ne trouvera pas un lieu géométrique sans l'examen de quelques cas particuliers. Il faut laisser s'exprimer toutes les idées ; est bon ce qui mène au résultat. Etape « sauvage » où il faut laisser libre cours à ses instincts. Ce n'est qu'après, la découverte faite, qu'on pourra, qu'on devra rechercher le maximum de rigueur.

Mais on ne peut développer l'aspiration à la rigueur sur n'importe quoi. L'âge des élèves intervient ici directement. A un enfant qui n'a jamais fait de géométrie, on peut faire construire les médianes d'un triangle et lui faire comprendre sur cet exemple la valeur de la certitude que, seule, une démonstration peut donner. La rigueur apparaîtra alors ce qu'elle est, un outil qui permet d'être bien sûr de ce qu'on sait, et non pas un sujet de tracasserie pour les élèves. On aura compris la *nécessité de la rigueur*.

Au contraire, si on veut présenter une théorie rigoureuse des fractions (ensembles de deux nombres p et q pris dans cet ordre qui...) à des enfants qui savent tant bien que mal les manipuler, on ne réussira qu'à les dégoûter des Mathématiques. Il

faut attendre un âge plus avancé où les élèves ressentiront le besoin d'une plus grande rigueur dans l'étude des nombres rationnels.

Autrement dit, je crois qu'il faut aller vite, surtout les débuts, où les exigences de rigueur ne peuvent pas être facilement comprises des débutants. On atteindra ainsi plus rapidement le domaine où l'exigence de rigueur apparaîtra bien à *tous* les élèves.

Même si certains élèves apprécient la démonstration de l'égalité de deux angles opposés par le sommet, j'accepterais volontiers cette propriété, évidente dans l'esprit de tous, pour avoir plus de temps pour les démonstrations qui intéressent tout le monde. Peut-on comprendre l'intérêt de la commutativité de l'addition des nombres relatifs tant qu'on n'a pas vu d'exemple d'opération non commutative.

Des exemples semblables seraient encore plus faciles à trouver dans tous les débuts de la géométrie et de l'espace. On ne comprend pas pourquoi le nombre 3 intervient (espace à trois dimensions) si l'on n'insiste pas sur l'axiome : « par trois points non alignés, il passe un plan et un seul ». Or, on a souvent l'ambition de démontrer que, par trois points non alignés, il ne passe qu'un seul plan, et, pour le faire, on admet que dans ce plan particulier, on peut appliquer tous les résultats démontrés dans la géométrie plane. Ce qui ne résulte pas du tout de la définition antérieure du plan dans l'espace ; le fait d'avoir employé le même mot « plan » dans la géométrie du plan d'Euclide et pour le plan dans l'espace, induit en erreur ; on admet que c'est la même chose, sans l'avoir, ou démontré, ou posé comme axiome.

En conclusion de cette discussion sur le langage, nous dirons qu'une fois stimulé l'esprit « sauvage » de la recherche, une fois la découverte acquise grâce à l'intuition, nous aurons le souci d'une formulation précise utilisant des formules et des mots parfaitement définis, d'une démonstration rigoureuse, et enfin d'une rédaction correcte.

L. S.
