

III. ESSAI

L'AXIOME DE DEDEKIND ET SON APPLICATION A L'ÉTUDE DES PARALLÈLES

par

R. NEUMEISTER

(Lycée Fustel-de-Coulanges, Strasbourg)

Introduction

Avant de donner une définition axiomatique des nombres irrationnels à l'aide d'une coupure, DEDEKIND (1) étudie la continuité de la ligne droite. Il énonce l'axiome, qui porte son nom, d'abord pour la droite orientée en insistant sur son évidence.

Dans cette étude nous avons commencé par définir une coupure sur une droite par trois conditions qui correspondent à nos trois premiers axiomes de la demi-droite (2). L'axiome de Dedekind permet de définir des points de la droite *par adjonction*, et pour cette raison il correspond à notre dernier axiome de la demi-droite.

Il y a une contradiction apparente à définir de nouveaux points en classant l'ensemble de tous les points ; mais nous avons montré qu'il y a des points classés indirectement, même ceux qui restent encore à définir.

La projectivité d'une coupure nous permet de définir une demi-droite parallèle à une demi-droite donnée. Nous montrons par un exemple que la relation de parallélisme n'est pas nécessairement symétrique si nous nous plaçons *strictement* dans le plan. Ainsi, nous mettons en évidence la *nécessité* de traiter la question des parallèles, sous sa forme la plus générale, dans l'espace à trois dimensions.

I. L'axiome de Dedekind

Définition d'une coupure sur une droite ou sur un segment de droite

Un point C d'une droite détermine sur cette droite deux demi-droites opposées $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ($\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}$). Nous disons encore que le point C partage les points de la droite en deux classes (I) et (II).

La classe (I) est l'ensemble des points de la demi-droite $\overrightarrow{CA}$, sauf peut-être son origine C.

La classe (II) est l'ensemble des points de la demi-droite $\overrightarrow{CB}$, sauf peut-être le point C.

Ainsi, tout point de la droite, sauf C, appartient à l'une des deux classes et à une seule. Le point C peut appartenir aux deux classes, soit à aucune, soit à une seule.

Nous allons caractériser ces deux classes par des propriétés résultant des axiomes de la demi-droite, sans faire intervenir explicitement le point C.

Conditions caractéristiques d'une coupure

Si les points d'une droite sont répartis en deux classes vérifiant les conditions suivantes, nous disons qu'on a *défini une coupure sur la droite*.

(1) Cf. Richard DEDEKIND : *Stetigkeit u. irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872.

(2) Cf. notre article dans le *Bull.* de l'A.P.M. de mai 1956 : Définition axiomatique des espaces linéaires et leur orientation.

(1) Tout point de la droite, sauf peut-être un seul, appartient à une et une seule de deux classes (I) et (II).

(2) Dans chaque classe il y a au moins un point.

(3) A et B étant deux points distincts appartenant respectivement aux classes (I) et (II), la demi-droite $\overrightarrow{AB}$ contient tous les points de la classe (II) et la demi-droite $\overrightarrow{BA}$ contient tous les points de la classe (I).

Si nous orientons la droite par la relation : $A < B$, la condition (3) peut aussi s'énoncer :

(3') Tout point de la classe (I) est avant tout point de la classe (II).

Coupure sur un segment de droite

Nous déduisons des conditions (1), (2), (3), que tout point de la demi-droite $\overrightarrow{AB}$ appartient nécessairement à la classe (I) et que tout point de la demi-droite $\overrightarrow{BA}$ appartient nécessairement à la classe (II).

Il y a donc des points classés indirectement.

Donc si deux points distincts A et B appartiennent respectivement aux classes (I) et (II), il suffit de classer les points du segment AB. Sur le segment de droite nous remplaçons (3) par

(3'') Si A' et B' sont deux points du segment de droite AB, appartenant respectivement comme A et B aux classes (I) et (II), le segment A'B contient tout point de la classe (II) et le segment B'A contient tout point de la classe (I).

D'après ce que nous venons de voir, *tout point d'une droite définit une coupure sur cette droite.*

Réciproquement nous admettons l'axiome suivant :

Axiome de Dedekind : *Si nous avons défini sur une droite une coupure, il existe toujours un point C de la droite définissant cette coupure.*

Nous disons aussi : *la coupure définit le point C.*

REMARQUE : Si nous admettons en plus des quatre axiomes de la demi-droite, le théorème suivant résultant de l'axiome du plan : « Sur chaque segment de droite il y a au moins un point autre que ses extrémités », alors nous pouvons démontrer par l'absurde l'unicité du point C défini par une coupure.

Réciproquement, si nous admettons l'unicité du point C défini par une coupure, nous pouvons en déduire ce théorème sur le segment, sans nous servir de l'axiome du plan.

En général, nous nous servons de l'unicité du point C.

PROPRIÉTÉS ÉQUIVALENTES A L'AXIOME DE DEDEKIND

Soit sur une droite orientée une suite monotone de points A_i ($i = 1, 2, \dots$), caractérisée par les relations :

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq A_4 \leq \dots \leq A_i \leq A_{i+1} \leq \dots$$

Nous disons que la suite est bornée s'il y a un point B (borne) tel que pour tout i on a : $A_i \leq B$

THÉORÈME : *Sur une droite orientée, une suite monotone bornée de points définit un point L, origine d'une demi-droite, ensemble de toutes les bornes de la suite.*

En effet, L est défini par une coupure ; la classe (I) contient les points dépassés, c'est-à-dire les points de la suite et tous les points avant l'un quelconque de ces points. La classe (II) contient tous les points non dépassés.

Citons encore le théorème sur les segments emboîtés :

THÉORÈME : *Etant donnée, sur une droite, une suite de segments A_iB_i ($i = 1, 2, \dots$) tel que chaque segment contient le suivant et que tout point de la droite, sauf peut-être un seul, appartient à un prolongement d'un des segments au moins, alors il existe un point de la droite et un seul appartenant à tous les segments de la suite.*

PROJECTIVITÉ DE LA COUPURE

Soient deux segments de droite AB et $A'B'$ qui sont en relation projective dans une projection centrale de point de vue O . Cette projection, conservant l'ordre, transforme les deux classes définissant une coupure sur le segment AB en deux classes définissant également une coupure sur le segment $A'B'$. Les points C et C' définis

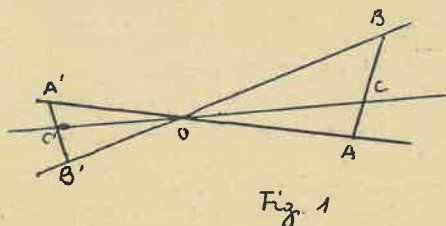


Fig. 1

respectivement par ces deux coupures sont sur une droite passant par le point O . La correspondance projective entre le segment de droite AB et le segment de plan (O, AB) permet d'appliquer également la coupure au segment de plan pour définir l'élément générique OC . Pour des raisons analogues, on peut définir une coupure sur un segment d'espace.

APPLICATION A LA DÉFINITION D'UNE DEMI-DROITE PARALLÈLE A UNE DEMI-DROITE DONNÉE

Considérons une demi-droite donnée $\overrightarrow{OA}$ et un point M non situé sur son support. Soit B un point de $\overrightarrow{MO}$. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble des demi-droites d'origine M et situées dans le demi-plan d'arête OM et contenant le point A ; ce sont aussi les demi-droites d'origine M coupant l'un des segments OA ou AB . Définissons une coupure sur cet ensemble : La classe (I) contient toutes les demi-droites coupant $\overrightarrow{OA}$ et la classe (II) est formée par les demi-droites ne coupant pas $\overrightarrow{OA}$.

Cette coupure définit une demi-droite $\overrightarrow{MI}$, où I désigne le point correspondant sur le segment AB . La demi-droite $\overrightarrow{MI}$ ainsi définie ne peut pas avoir de point commun avec la demi-droite $\overrightarrow{OA}$.

En effet, supposons provisoirement qu'elle ait un point commun K avec $\overrightarrow{OA}$. Mais alors il y a encore des points de $\overrightarrow{OA}$ qui dépassent K et par suite des demi-droites de la classe (I) qui dépassent $\overrightarrow{MK}$, donc $\overrightarrow{MK}$ ne peut pas être définie par cette coupure.

Nous concluons : La demi-droite $\overrightarrow{MI}$ définie par cette coupure est unique et n'a pas de point commun avec la demi-droite $\overrightarrow{OA}$.

Par définition, la demi-droite $\overrightarrow{MI}$ est parallèle à la demi-droite donnée $\overrightarrow{OA}$; elle sépare les demi-droites qui sont sécantes avec $\overrightarrow{OA}$ des demi-droites non sécantes.

Nous donnons à cette définition un sens large en la complétant dans le cas où M est situé sur la droite OA :

Deux demi-droites de même support sont parallèles si elles sont de même sens.

Nous écrivons la relation de parallélisme :

$$\overrightarrow{MI} // \overrightarrow{OA} \quad (\overrightarrow{MI} \text{ parallèle à } \overrightarrow{OA}),$$

où les deux demi-droites jouent, d'après la définition, des rôles différents.

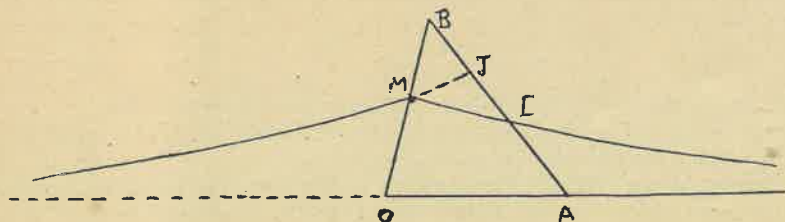


Fig. 2

Considérons maintenant les demi-droites d'origine M et situées dans le demi-plan d'arête OM ne contenant pas le point A ; ce sont les prolongements des demi-droites étudiées précédemment. Elles se répartissent encore en deux classes. Les demi-droites de la classe (I') coupent $\overrightarrow{OA}$ et les demi-droites de la classe (II') n'ont pas de point commun avec $\overrightarrow{OA}$. Cette coupure définit une demi-droite parallèle $\overrightarrow{MJ}$ à $\overrightarrow{OA}$, où le point J est situé sur le segment AB. D'après la propriété : « Deux droites non confondues ont au plus un point commun », nous pouvons conclure que les prolongements des demi-droites de la classe (I') appartiennent nécessairement à la classe (II). D'où il résulte encore que le point J appartient nécessairement au segment IB.

Il y a maintenant deux possibilités :

1° I et J sont confondus. Alors il existe une droite et une seule passant par le point M et ne coupant pas la droite OA. Nous appelons dans ce cas cette droite non sécante unique la parallèle par M à la droite OA (comme en géométrie euclidienne).

2° I et J sont distincts. L'ensemble des droites passant par M et non sécantes avec la droite OA est aussi l'ensemble des éléments génériques du segment de plan (M, IJ). Les extrémités MI et MJ de ce segment de plan s'appellent les parallèles par M à la droite OA (comme dans la géométrie de Lobatchevsky).

EXEMPLE D'UNE GÉOMÉTRIE PLANE

où LA RELATION DE PARALLÉLISME ENTRE DEUX DEMI-DROITES N'EST PAS SYMÉTRIQUE

Considérons un plan non plongé dans un espace à trois dimensions. Nous entendons par là que nous admettons seulement : (I) les axiomes de la demi-droite ; (II) les axiomes des espaces linéaires avec la restriction que nous ignorons les points non situés dans un plan ; et, en plus, (III) l'axiome de Dedekind :

Nous allons montrer par un exemple que, dans un tel plan, il peut y avoir des demi-droites pour lesquelles la relation de parallélisme n'est pas symétrique.

Soit un plan euclidien avec un système d'axes de coordonnées cartésiennes

rectangulaires ou obliques. Nous appelons ce plan avec sa structure euclidienne le *plan de comparaisons*. Ce plan a d'ailleurs une existence analytique, ce qui permet d'éviter les difficultés d'ordre axiomatique. Un point est défini par l'ensemble ordonné de deux nombres réels, nous le notons (x, y) .

Nous donnons maintenant à l'ensemble des points du plan de comparaison une *nouvelle structure linéaire* (D) par la définition de ce que nous appelons maintenant une droite (D). Cette définition est un *axiome supplémentaire particulier à la géométrie du plan de structure* (D) que nous nous proposons d'étudier.

Une droite (D) est définie par l'une des équations (D₁) ou (D₂) suivant les conditions correspondantes.

$$(D_1) \quad ux + vy = w$$

où les paramètres réels u, v, w satisfont à la condition : $uv \geq 0$, au plus un des paramètres u ou v étant nul.

$$(D_2) \quad y = \frac{-1}{x-a} + b$$

avec la condition : $x > a$, les paramètres a et b étant deux nombres réels.

Par rapport au plan de comparaison nos droites (D) sont donc de deux espèces : les droites (D₁) ou les branches d'hyperboles (D₂).

Si nous définissons les demi-droites d'origine (x_0, y_0) par une condition supplémentaire : $x \geq x_0$ ou $x \leq x_0$ ou, par défaut, des inégalités analogues pour y , alors les droites (D) vérifient les axiomes de la demi-droite.

Examinons si les axiomes des espaces linéaires (limités au plan) sont également vérifiés.

Soient deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) , montrons que par ces deux points il passe une droite (D) et une seule (axiome II, 1).

Si $x_0 = x_1$, il y a la droite d'espèce (D₁) $x = x_0$ qui est la seule solution.

Si $x_0 \neq x_1$, alors nous distinguons deux cas :

$$1^{\circ} \quad \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \leq 0$$

il y a une droite d'espèce (D₁) qui convient seule.

$$2^{\circ} \quad \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} > 0$$

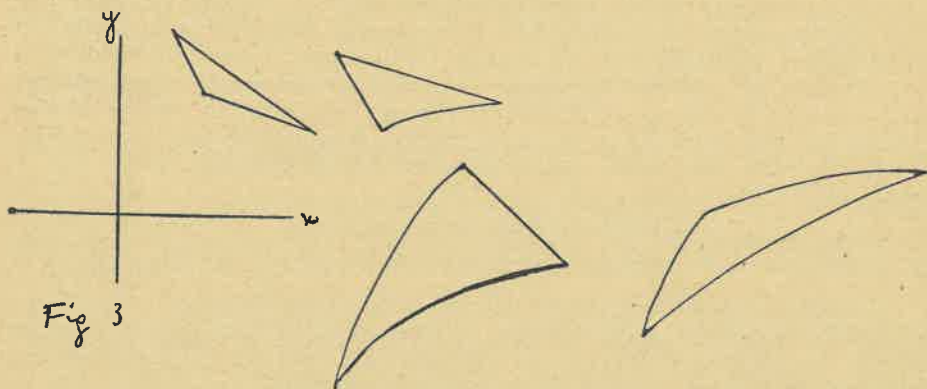


Fig 3

il n'y a qu'une droite d'espèce (D₂) répondant à la question. L'axiome II, 1 est donc toujours vrai.

L'axiome II, 2 devient sous sa forme restreinte :

II, 2' : Etant donnée une droite, il y a encore un point non situé sur la droite. La droite et le point sont situés dans un même plan.

C'est mis en évidence par la définition du plan de structure (D).

Pour faciliter la vérification de l'axiome du plan (III, 3), nous nous contentons de signaler que par rapport au plan de comparaison il y a quatre types de triangles, dont les côtés sont représentés respectivement par des segments de droites ou des arcs d'hyperboles.

L'axiome de Dedekind nous sert pour définir une demi-droite $\bar{\delta}$ d'origine (α, β) parallèle à une demi-droite donnée $\bar{d}$ d'origine (x_0, y_0) .

Etudions l'exemple où $\bar{d}$ est définie par l'équation :

$$(\bar{d}) \quad y = \frac{-1}{x-a} + b$$

avec les conditions :

$$y_0 = \frac{-1}{x_0-a} + b$$

et

$$x \geq x_0 > a.$$

Supposons d'autre part :

$$\beta \geq b.$$

Nous trouvons alors comme demi-droite $\bar{\delta}$ d'origine (α, β) parallèle à $\bar{d}$

$$(\bar{\delta}) \quad y = \beta \quad \text{avec} \quad x \geq \alpha.$$

Cherchons maintenant la demi-droite d'origine (x_0, y_0) parallèle à $\bar{\delta}$, nous trouvons une demi-droite $\bar{d}'$ autre que $\bar{d}$:

$$(\bar{d}') \quad y = \frac{-1}{x-a'} + \beta$$

avec les conditions :

$$y_0 = \frac{-1}{x_0-a'} + \beta$$

et

$$x \geq x_0.$$

Dans cet exemple, la relation de parallélisme n'est donc pas symétrique.

Mais :

$$\begin{array}{l} \bar{\delta} \parallel \bar{d} \\ \bar{d} \not\parallel \bar{\delta} \end{array}$$

AUTRE EXEMPLE : Donnons la demi-droite $\bar{d}'$ que nous venons de définir ; la demi-droite parallèle d'origine (α, β) est encore la demi-droite $\bar{\delta}$ de l'exemple précédent.

Dans ce nouvel exemple, la relation de parallélisme est symétrique :

$$\begin{array}{l} \bar{\delta} \parallel \bar{d}' \\ \bar{d}' \parallel \bar{\delta} \end{array}$$

Dans notre plan de structure (D), nous pouvons trouver à titre d'exercice d'autres exemples, soit en changeant l'espèce de la demi-droite donnée, soit en changeant la région du plan où se trouve l'origine de la demi-parallèle cherchée.

Nous retenons comme conclusion :

THÉORÈME : Si un plan n'est pas plongé dans l'espace à trois dimensions, la relation de parallélisme n'est pas nécessairement symétrique.

REMARQUES SUR LES GÉOMÉTRIES NON-ARGIENNES

Rappelons que D. HILBERT (3) désigne par *géométrie non-argienne* une géométrie plane ne vérifiant pas toujours le théorème de Desargues, c'est-à-dire le théorème fondamental sur les triangles homologues. Une telle géométrie est encore caractérisée par l'absence des propriétés du quadrilatère complet, permettant, d'après VON STAUDT (4), de définir une division harmonique, sans utiliser aucune notion de métrique. On met ainsi en évidence, que pour démontrer ces propriétés projectives, il faut plonger le plan dans l'espace à trois dimensions afin d'éviter de se servir d'une métrique appropriée. L'importance pour la géométrie plane de l'axiome d'extension des espaces linéaires II, 2 est ainsi mise en évidence.

Dans l'exemple de géométrie non-argienne donné par HILBERT, les parallèles vérifient le postulat d'Euclide, et la relation de parallélisme est symétrique.

La géométrie du plan de structure (D), que nous venons de définir, est aussi une géométrie non-argienne. D'une façon générale, une géométrie plane sans relation de parallélisme symétrique est nécessairement non-argienne.

LES DEMI-DROITES PARALLÈLES DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Définition d'un demi-plan parallèle à une demi-droite

Considérons une demi-droite $\vec{OX}$ et une droite (D) non située dans un même plan avec $\vec{OX}$. Nous classons les demi-plans d'arête (D) et situés du côté de $\vec{OX}$ par rapport au plan O, (D). La classe (I) contient les demi-plans qui coupent $\vec{OX}$ en un point variable X et la classe (II) est formée par les demi-plans qui n'ont pas de point commun avec $\vec{OX}$. Nous définissons ainsi une *coupure qui détermine par définition le demi-plan d'arête (D) parallèle à la demi-droite $\vec{OX}$* .

Ce demi-plan parallèle d'arête (D) est *unique* et n'a pas de point commun avec $\vec{OX}$.

Donnons encore un sens à notre définition au cas où la droite (D) coupe le support de $\vec{OX}$. Nous disons dans ce cas que le demi-plan contenant une demi-droite de même support et de même sens que $\vec{OX}$ est parallèle à $\vec{OX}$.

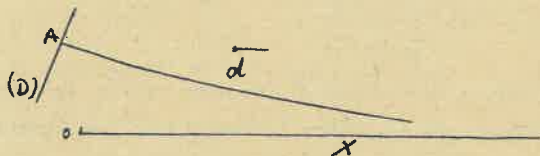


Fig 4

Considérons un plan passant par $\vec{OX}$ et par un point A de (D), ce plan coupe le demi-plan d'arête (D) parallèle à $\vec{OX}$ suivant la demi-droite $\vec{d}$ parallèle à $\vec{OX}$.

En effet, cette intersection $\vec{d}$ est située d'abord dans un même plan avec $\vec{OX}$ et n'a pas de point commun avec cette demi-droite. Supposons provisoirement que $\vec{d}$ ne

(3) Cf. D. HILBERT : *Grundlagen der Geom.*, pages 85-88.

(4) Cf. Chr. VON STAUDT : *Geom. der Lage*, Nüremberg, 1847, p. 43.

soit pas parallèle à $\vec{OX}$, alors il existe une parallèle $\vec{d'}$ d'origine A qui sépare $\vec{d}$ et $\vec{OX}$. Mais alors le demi-plan (D), $\vec{d'}$ ne coupe pas non plus $\vec{OX}$ et sépare le demi-plan parallèle considéré de $\vec{OX}$, ce qui est impossible.

D'où le théorème sur les demi-plans parallèles à une demi-droite.

THÉORÈME : Le demi-plan d'arête (D) parallèle à une demi-droite donnée $\vec{OX}$ contient la famille des demi-parallèles à $\vec{OX}$, ayant pour origine un point de (D).

La demi-parallèle d'origine A à $\vec{OX}$, où A est sur (D), s'obtient comme intersection du demi-plan parallèle avec le plan AOX.

Réciproquement : A étant un point de (D) et $\vec{AX'}$ la demi-droite d'origine A parallèle à $\vec{OX}$, le demi-plan (D, $\vec{AX'}$) est parallèle à $\vec{OX}$.

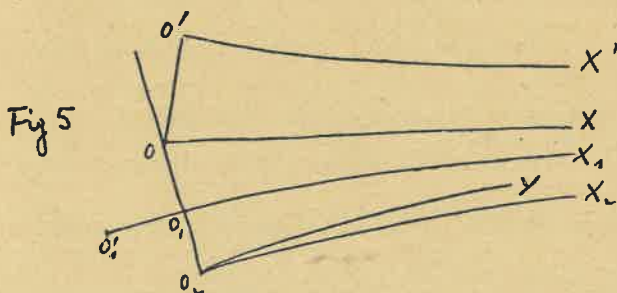
On peut encore démontrer la propriété :

Deux demi-droites parallèles à $\vec{OX}$ n'ont pas de point commun.

Nous allons utiliser ces propriétés pour étudier la relation de parallélisme entre des demi-droites.

SYMÉTRIE DE LA RELATION DE PARALLÉLISME DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Considérons une demi-droite $\vec{OX}$ et soit Q un plan passant par son origine O, mais ne contenant pas cette demi-droite. Nous nous proposons d'étudier les demi-droites parallèles à $\vec{OX}$, ayant leur origine dans le plan Q.



Soit $\vec{OX'}$ une telle demi-parallèle à $\vec{OX}$ (où l'origine O' est dans Q).

$\vec{OX'} \parallel \vec{OX}$ (par hypothèse).

Soit O₁ un autre point de Q, non aligné avec O et O'. Désignons par P le plan passant par OX et par le point O₁. Le demi-plan d'arête O₁O' et contenant $\vec{OX'}$ est parallèle à $\vec{OX}$; nous le notons (O₁O', X').

Le plan P coupe ce demi-plan (O₁O', X') parallèle à $\vec{OX}$ suivant la parallèle $\vec{O_1X_1}$ à $\vec{OX}$.

$\vec{O_1X_1} \parallel \vec{OX}$ (par construction).

Désignons par O₂ un point de — $\vec{O_1O}$. L'intersection de P avec le demi-plan (O₂O', X') nous donne la parallèle $\vec{O_2X_2}$ d'origine O₂ à $\vec{OX}$.

$\vec{O_2X_2} \parallel \vec{OX}$ (par construction).

Démontrons d'abord que $\vec{O_2X_2}$ est parallèle à $\vec{O_1X_1}$.

Supposons provisoirement le contraire et désignons par $\vec{O_2Y}$ la demi-parallèle issue de O_2 à $\vec{O_1X_1}$. Alors, dans le demi-plan d'arête OO_1 et contenant les demi-droites $\vec{OX}$, $\vec{O_1X_1}$, $\vec{O_2X_2}$ et $\vec{O_2Y}$, la demi-droite $\vec{O_2Y}$ sépare $\vec{O_1X_1}$ et $\vec{O_2X_2}$ et par suite $\vec{O_2Y}$ sépare aussi $\vec{OX}$ et $\vec{O_2X_2}$, ce qui est contraire au fait que $\vec{O_2X_2}$ est parallèle à $\vec{OX}$. Donc $\vec{O_2Y}$ coïncide nécessairement avec $\vec{O_2X_2}$. D'où :

$$\vec{O_2X_2} // \vec{O_1X_1} \quad (\text{démontré}).$$

Cette relation entraîne que le demi-plan d'arête O_2O' et contenant $\vec{O_2X_2}$ et $\vec{O'X'}$ est parallèle à $\vec{O_1X_1}$, d'où encore :

$$\vec{O'X'} // \vec{O_1X_1} \quad (\text{démontré}).$$

Donc le demi-plan (OO', X') est parallèle à $\vec{O_1X_1}$, d'où :

$$\vec{OX} // \vec{O_1X_1} \quad (\text{démontré}).$$

Cette dernière relation est donc symétrique, car nous avons déjà par construction :

$$\vec{O_1X_1} // \vec{OX}.$$

En partant de cette relation symétrique nous déduisons par le même procédé la relation

$$\vec{OX} // \vec{O'X'} \quad (\text{démontré}).$$

Nous résumons :

THÉORÈME I : *Dans l'espace à trois dimensions la relation de parallélisme est symétrique.*

THÉORÈME II : *Deux demi-droites parallèles à une même troisième, sont parallèles entre elles.*

Ce dernier théorème a été mis en évidence dans deux cas :

- 1) les demi-droites $\vec{OX}$, $\vec{O'X'}$, $\vec{O_1X_1}$, dont les origines ne sont pas en ligne droite ;
- 2) les demi-droites $\vec{OX}$, $\vec{O_1X_1}$, $\vec{O_2X_2}$, dont les origines sont sur une même droite.

Il nous reste à voir le cas où l'origine se déplace sur le support, de l'une des demi-droites. Soit par exemple O'_1 un point sur la droite O_1X_1 . Remplaçons le plan Q par le plan Q' passant par les points O, O', O'_1 . Les demi-parallèles à $\vec{OX}$ d'origine O_1 et O'_1 ont pour support commun l'intersection du plan O_1OX (identique à O'_1OX) avec le plan $O_1O'X'$ (identique à $O'_1O'X'$). Ces deux parallèles à OX sont en plus situées, respectivement par rapport à Q et Q' , du même côté que $O'X'$, donc elles sont de même sens.

Nous venons donc de démontrer que si nous remplaçons sur son support une demi-droite par une demi-droite de même sens, nous ne changeons rien aux relations de parallélisme avec d'autres demi-droites. Cela justifie la définition suivante.

DÉFINITION : *Deux droites orientées sont dites parallèles, si deux demi-droites déterminant ces orientations sont parallèles.*

Une relation de parallélisme entre des demi-droites peut donc toujours être interprétée comme relation de parallélisme entre les droites orientées déterminées par ces demi-droites.

Résumons encore les propriétés fondamentales de la relation de parallélisme :

1° On a toujours :

$$\vec{d} // \vec{d} \quad (\text{réflexivité}).$$

2° Si $\vec{d} // \vec{d'}$ on a aussi $\vec{d'} // \vec{d}$ (symétrie).

3° Si $\vec{d} // \vec{d'}$ et $\vec{d'} // \vec{d''}$,

on a aussi $\vec{d} // \vec{d''}$ (transitivité),

d'où :

THÉORÈME : *Dans l'espace à trois dimensions, les droites orientées parallèles à une droite orientée donnée, forment une classe d'équivalence.*

Cette propriété s'applique encore au plan plongé dans l'espace à trois dimensions.

Elle est également valable dans l'espace à n dimensions pour $n > 3$. En effet, l'ensemble de trois droites orientées parallèles deux à deux se trouve toujours dans un même espace à trois dimensions. Elles vérifient donc les trois conditions précédentes.

A la classe des droites orientées parallèles à une droite orientée donnée correspond l'ensemble de leurs supports. Ce qui nous définit en particulier :

dans le plan : un faisceau de droites parallèles ;

et dans l'E³ : une gerbe de droites parallèles.

DÉFINITION : *Une droite est dite parallèle à une droite orientée donnée, si elle est le support d'une droite orientée parallèle à la droite orientée donnée.*

PROPRIÉTÉ : *Par tout point de l'espace il passe une parallèle, et une seule, à une DROITE ORIENTÉE donnée.*

R. N.