

# **BULLETIN** de l'**ASSOCIATION** des **PROFESSEURS** de **MATHÉMATIQUES** de l'**Enseignement Public**

## **SOMMAIRE**

### **I. ETUDE.**

- J. DIXMIER : Etude de certains espaces de fonctions et de différents modes de convergence ..... 241

### **II. PAGES A RELIRE.**

- BEZOUT : Préface à l'Algèbre, présentée par J. ITARD ... 248

### **III. ESSAI.**

- R. NEUMEISTER : L'axiome de Dedekind et son application à l'étude des parallèles ..... 252

### **IV. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.**

- L. SCHWARTZ : Langage et mathématiques ..... 262  
A. MARCHAND : Compte rendu des journées de Sèvres (2-4 novembre 1956) ..... 269  
J. LELONG-FERRAND : Recherche et Enseignement : Un grave problème de recrutement ..... 272  
« Faire aimer les mathématiques par une initiation vivante à la recherche » ..... 277

### **V. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE.**

- Y. CROZES : Axiomatique et redécouverte ..... 279

### **VI. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.**

- P. DEDRON et L. THIBERGE : Rapport sur le concours d'admission dans les Centres Pédagogiques Régionaux (session normale 1956) ..... 282

### **VII. LA VIE DE L'ASSOCIATION.**

- Réunion du Comité (24 janvier 1957) ..... 301  
Pour l'Assemblée Générale du 14 avril 1957 ..... 301  
Rapport général d'activité ..... 301  
Compte rendu financier ..... 307  
Rapport de la Commission de formation des maîtres ..... 307  
Rapport de la Commission des programmes ..... 312  
Le baccalauréat de mathématiques ..... 313  
Le baccalauréat de première partie ..... 315  
L. FELIX : Unification des termes et symboles ..... 316  
Le questionnaire de l'A.P.M. .... 319  
Le bloc-notes de l'A.P.M. .... 319

**Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public**

29, rue d'Ulm, Paris (5<sup>e</sup>)

Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Énoncés*.

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ... 300 F

Prix de l'abonnement au *Bulletin* ..... 1 000 F

Prix du numéro ..... 200 F

*Présidents d'Honneur*

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

**Bureau :**

- Président :* M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11<sup>e</sup>). OBE. 56-95.  
*Vice-Présidents :* Mlle AFFRE, 5, rue Gustave-Le-Bon, Paris (14<sup>e</sup>).  
M. BIGUENET, 41, rue M.-Michelis, Neuilly-sur-Seine.  
M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14<sup>e</sup>).  
M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5<sup>e</sup>).  
M. THÉRON, 38, rue Lacépède, Paris (5<sup>e</sup>).  
*Secrétaires :* Mlle FÉLIX, 3, rue Pierre-Berland, Versailles (S.-et-O.) (Conférences).  
M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16<sup>e</sup>).  
M. HUISMAN, 11, rue J.-Cœur, Paris (4<sup>e</sup>) (Bibliothèque et « Bulletin »).  
M. ITARD, 6, avenue Paul-Appell, Paris (14<sup>e</sup>) (Bibliographie).  
M. ROSTOLLAND, 19, rue des Ursulines, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).  
M. SIROS, 13, avenue J.-Racine, Sceaux (Seine) (Programmes).  
*Trésorier :* M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).  
*Comité de rédaction du « Bulletin » :* Mlle FÉLIX ; MM. CHAZAL, GIRARD, ITARD, SIROS ;  
Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

**Comité :**

*Membres élus*

*Sortants en 1957 :* M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; Mlle VERVAECKE (Lille, *Fénelon*) ; M. POCHARD (Nice) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (Lyon, *Ampère*).

*Sortants en 1958 :* Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (Compiègne) ; M. WALUSINSKI (*St-Cloud*).

*Sortants en 1959 :* Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

*Sortants en 1960 :* MM. DURRANDE (*St-Louis*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; RUFF (*St-Louis*) ; SIROS (*Lakanal*) ; THÉRON (*Louis-le-Grand*).

*Membres de droit*

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAUT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICAUD (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

**Rapporteurs**

*Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

**Correspondants**

*Aix-Marseille :* M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (*Rennes*) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (*Strasbourg, Kléber*) ; *Tunis :* M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

# BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public



## I. ÉTUDE

### ÉTUDE DE CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS ET DE DIFFÉRENTS MODES DE CONVERGENCE

par J. DIXMIER

*Maître de Conférences à la Sorbonne*

Dans les conférences précédentes relatives aux espaces topologiques, on est parti d'un exemple (l'ensemble des nombres réels) pour s'élever à des axiomes généraux. Historiquement, il a fallu analyser d'autres exemples que celui des nombres réels avant d'élaborer la théorie abstraite. Des exemples très importants ont été fournis par les espaces fonctionnels, c'est-à-dire les espaces dont les éléments sont des fonctions. L'étude approfondie des espaces fonctionnels a commencé à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle.

Dans cet exposé, on va uniquement donner des *exemples* d'espaces fonctionnels, et expliciter, sur ces exemples, certaines des notions générales des précédentes conférences. On ne donnera aucun théorème général sur les espaces fonctionnels.

#### PREMIER EXEMPLE

Nous désignerons par  $C$  l'ensemble des fonctions  $f(x)$ , à valeurs réelles, définies et continues pour  $0 \leq x \leq 1$ . Si  $f \in C$  et  $g \in C$ , on posera (1) :

$$d(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|.$$

Montrons que  $d$  est une distance sur  $C$ . Il faut vérifier les propriétés suivantes :

- 1)  $0 \leq d(f, g) < +\infty$  quelles que soient  $f$  et  $g$ .
- 2)  $d(f, g) = 0$  si et seulement si  $f = g$ .
- 3)  $d(f, g) = d(g, f)$  quelles que soient  $f$  et  $g$ .
- 4)  $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$  quelles que soient  $f, g, h$ .

(\*) Conférence prononcée le 17 janvier 1957, à l'Institut Henri-Poincaré, quatrième conférence du cycle sur la topologie organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs. Le texte de la troisième conférence ne nous étant pas parvenu en temps utile sera publié dans le Bulletin 185.

(1) On rappelle qu'une fonction telle que  $\varphi(x) = |f(x) - g(x)|$  a dans un intervalle une borne supérieure que l'on note  $\sup \varphi(x)$ .

Les propriétés 1, 2, 3 sont immédiates. D'autre part, soient  $f \in C$ ,  $g \in C$ ,  $h \in C$ . On a, quel que soit  $x \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq \\ \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - h(x)| &= d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

Ainsi,  $d(f, g) + d(g, h)$  majore  $|f(x) - h(x)|$  quel que soit  $x$ , et par suite majore  $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - h(x)| = d(f, h)$ . Ceci prouve la propriété 4.

Toutes les notions développées à propos des espaces métriques sont donc applicables à l'espace  $C$ . Dire qu'une suite de fonctions  $f_n$  de  $C$  tend vers  $f \in C$  signifie que  $d(f_n, f) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , c'est-à-dire que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que la relation  $n \geq N$  entraîne  $d(f_n, f) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ . On reconnaît la définition de la convergence uniforme de  $f_n$  vers  $f$ .

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $C$ . Un théorème classique de calcul différentiel donne une condition nécessaire et suffisante, appelée critère de Cauchy, pour que  $f_n$  converge uniformément. Cette condition est la suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que les relations  $m \geq N$ ,  $n \geq N$  entraînent  $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$  quel que soit  $x \in [0, 1]$  (autrement dit, entraînent  $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ , c'est-à-dire

$d(f_m, f_n) \leq \varepsilon$ ). La condition en question peut donc s'exprimer en disant que la suite  $(f_n)$  est une suite de Cauchy dans l'espace  $C$ . D'autre part, un autre théorème classique dit qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Donc, l'espace  $C$  est complet.

Qu'est-ce qu'une fonction à valeurs réelles sur l'espace  $C$  ? C'est une fonction  $A(f)$  qui, à toute  $f \in C$ , associe un nombre réel  $A(f)$ . Dire que cette fonction  $A$  est continue sur  $C$  signifie que, lorsque  $f_n$  converge uniformément vers  $f$ , le nombre  $A(f_n)$  tend vers  $A(f)$  au sens ordinaire.

Exemples : 1) Posons  $A(f) = \int_0^1 f(x) dx$ . Alors,  $A$  est une fonction continue sur  $C$  d'après un théorème classique. 2) Posons  $A(f) = f(1)$ . Alors, il est évident que  $A$  est une fonction continue sur  $C$ .

Considérons maintenant une application de  $C$  dans  $C$ , c'est-à-dire une transformation  $g = T(f)$  qui, à toute  $f \in C$ , fait correspondre une  $g \in C$ . Dire que  $T$  est continue signifie que, lorsque  $f_n$  converge uniformément vers  $f$ ,  $T(f_n)$  converge uniformément vers  $T(f)$ . Exemples : 1)  $T(f) = f_0 f$ , où  $f_0$  est une fonction continue fixe. Il est clair que  $T$  est continue. 2)  $T(f)$  est la fonction continue  $g$  définie par :

$$g(x) = \int_0^1 e^{xy} f(y) dy.$$

Montrons que  $T$  est continue. Soit  $f_n \in C$  une suite convergeant uniformément vers  $f \in C$ . Soient  $g_n = T(f_n)$ ,  $g = T(f)$ . On a :

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &= \left| \int_0^1 e^{xy} f_n(y) dy - \int_0^1 e^{xy} f(y) dy \right| \leq \int_0^1 e^{xy} |f_n(y) - f(y)| dy \\ &\leq e \sup_{0 \leq y \leq 1} |f_n(y) - f(y)| = ed(f_n, f). \end{aligned}$$

Donc  $d(g_n, g) \leq ed(f_n, f)$ , ce qui prouve bien que  $g_n$  converge uniformément vers  $g$ .

## DEUXIÈME EXEMPLE

Reprenons l'ensemble  $C$  précédent. Pour  $f \in C$  et  $g \in C$ , posons :

$$d'(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Montrons que  $d'$  est une distance sur  $C$ . Les propriétés 1, 2, 3 du premier exemple sont immédiates. L'inégalité triangulaire est facile : puisqu'on a  $|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$  pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$\int_0^1 |f(x) - h(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx,$$

c'est-à-dire  $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$ .

Ainsi, le même ensemble  $C$  de fonctions est muni d'une deuxième structure d'espace métrique. Pour éviter des confusions, nous désignerons par  $C'$  ce nouvel espace métrique. La convergence au sens de  $C'$  s'appelle la convergence en moyenne. Si une suite  $f_n$  de fonctions continues converge vers une fonction continue  $f$  au sens de  $C$ , c'est-à-dire uniformément,  $f_n$  converge vers  $f$  au sens de  $C'$ , car  $|f_n(x) - f(x)|$  tend vers 0 uniformément, donc  $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx$  tend vers 0. Mais la réciproque est inexacte, comme le montre l'exemple suivant : soient  $f_n(x) = x^n$ , et  $f(x) = 0$  ; alors :

$$d'(f_n, f) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc  $f_n$  tend vers  $f$  au sens de  $C'$  ; mais  $f_n$  ne tend pas vers  $f$  uniformément puisque  $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 \leq x \leq 1} x^n = 1$ .

Il existe donc sur  $C$  deux notions naturelles de convergence (et d'ailleurs une infinité d'autres dont nous ne parlerons pas). Ce phénomène est très courant dans les espaces fonctionnels.

Montrons que  $C'$  n'est pas complet. Définissons une fonction continue  $f_n$  de la manière suivante :

$$f_n(x) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

$$f_n(x) = 1 \text{ pour } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1.$$

$$f_n(x) \text{ est linéaire dans } \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right].$$

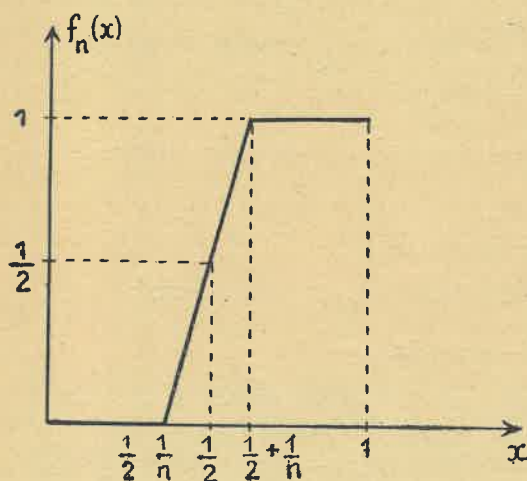


FIG. 1

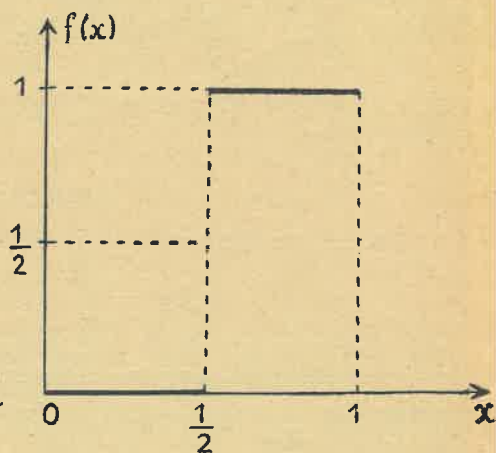


FIG. 2

Soit  $f$  la fonction égale à 0 pour  $0 \leq x < \frac{1}{2}$ , à  $\frac{1}{2}$  pour  $x = \frac{1}{2}$ , à 1 pour  $\frac{1}{2} < x \leq 1$ . Alors,  $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} d'(f_m, f_n) &= \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx + \int_0^1 |f(x) - f_m(x)| dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc, la suite  $(f_n)$  est une suite de Cauchy. Supposons qu'il existe une fonction continue  $g$  telle que  $d'(f_n, g) \rightarrow 0$ . L'inégalité :

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx + \int_0^1 |f_n(x) - g(x)| dx$$

où le deuxième membre tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ , prouve que

$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0$ . Or,  $f(x) - g(x)$  est continue, sauf au point

$x = \frac{1}{2}$ . Donc,  $f$  et  $g$  ne peuvent différer que pour  $x = \frac{1}{2}$ . Donc,  $g(x) = 0$

pour  $0 \leq x < \frac{1}{2}$  et  $g(x) = 1$  pour  $\frac{1}{2} < x \leq 1$ . Ceci contredit la conti-

nuité de  $g$  pour  $x = \frac{1}{2}$ .

(En agrandissant  $C'$  par l'adjonction de nouvelles fonctions, et par exemple de la fonction  $f$  ci-dessus, on peut obtenir un espace complet. C'est un des procédés d'introduction des fonctions intégrables au sens de LEBESGUE).

Reprenons la fonction  $A(f) = f(1)$  considérée dans le premier exem-

ple. Cette fonction n'est pas continue sur  $C'$ . En effet, soit  $f_n(x) = x^n$ . On a vu que  $f_n \rightarrow 0$  dans  $C'$ . Pourtant,  $A(f_n) = f_n(1) = 1$  ne tend pas vers  $A(0) = 0$ . Par contre, la fonction  $A(f) = \int_0^1 f(x) dx$  est continue sur  $C'$ . Car, si  $f_n$  converge en moyenne vers  $f$ , on a :

$$\begin{aligned} |A(f_n) - A(f)| &= \left| \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= d'(f_n, f) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d'où notre assertion.

### TROISIÈME EXEMPLE

Nous désignerons par  $D$  l'ensemble des fonctions  $f(x)$ , à valeurs réelles, définies pour  $0 \leq x \leq 1$ , admettant une dérivée continue pour  $0 < x < 1$  (il s'agit de dérivée à droite pour  $x = 0$ , de dérivée à gauche pour  $x = 1$ ). Si  $f \in D$  et  $g \in D$ , on posera :

$$\delta(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x) - g'(x)|.$$

On vérifie aussitôt les trois premières propriétés d'une distance. L'inégalité triangulaire résulte des relations suivantes :

$$\begin{aligned} &|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| + |f'(x) - h'(x)| \leq \\ &\sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x) - g'(x)| \\ &+ \sup_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - h(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |g'(x) - h'(x)| = \\ &\delta(f, g) + \delta(g, h) \end{aligned}$$

Donc,  $D$  est un espace métrique.

Dire qu'une suite de fonctions  $f_n \in D$  tend vers une fonction  $f \in D$  signifie que  $f_n$  tend uniformément vers  $f$  et que  $f'_n$  tend uniformément vers  $f'$  [d'après la définition de  $\delta(f_n, f)$ ].

L'espace  $D$  est complet. Car soit  $(f_n)$  une suite de Cauchy dans  $D$ . Les suites  $(f_n)$  et  $(f'_n)$  vérifient le critère de Cauchy, donc convergent uniformément vers des fonctions  $f$  et  $g$ , et un théorème classique dit que  $g = f'$ . Donc,  $f_n$  tend vers  $f$  au sens de  $D$ .

Pour toute  $f \in D$ , posons  $A(f) = f'\left(\frac{1}{2}\right)$ . Alors,  $A$  est une fonction continue sur  $D$ . [Par contre, si une suite de fonctions  $f_n$  de  $D$  tend uniformément, sans plus, vers une fonction  $f$  de  $D$ ,  $A(f_n)$  ne tend pas nécessairement vers  $A(f)$ ]. Cette fonction continue  $A(f)$  sur  $D$  est ce qu'on appelle, dans la théorie des distributions de SCHWARTZ, un doublet.

### QUATRIÈME EXEMPLE

Soit, dans le plan complexe,  $\Delta$  le disque ouvert défini par l'inégalité  $|z| < 1$ . Soit  $H$  l'ensemble des fonctions  $f(z)$  holomorphes dans  $\Delta$  et

telles que  $\int \int_{\Delta} |f(z)| d\sigma < +\infty$  ( $d\sigma$  désignant l'élément d'aire dans  $\Delta$ ).  
Pour  $f \in H$  et  $g \in H$ , posons :

$$d(f, g) = \int \int_{\Delta} |f(z) - g(z)| d\sigma.$$

On vérifie comme dans les exemples précédents que  $d$  est une distance. (On notera que  $d(f, g) < +\infty$  parce que  $\int \int_{\Delta} |f| d\sigma < +\infty$  et  $\int \int_{\Delta} |g| d\sigma < +\infty$ ). Donc,  $H$  est une espace métrique et la convergence ainsi définie dans  $H$  s'appelle encore convergence en moyenne. On va voir que, contrairement à ce qui se passe dans l'exemple 2,  $H$  est complet.

Montrons d'abord que, si  $f \in H$ , on a, pour tout nombre complexe  $\zeta$  tel que  $|\zeta| \leq a < 1$  :

$$(1) \quad |f(\zeta)| \leq \frac{1}{\pi(1-a)^2} \int \int_{\Delta} |f(z)| d\sigma.$$

Soient  $\Gamma_r$  et  $\Delta_r$  le cercle et le disque ouvert de centre  $\zeta$  et de rayon  $r$  ; ils sont contenus dans  $\Delta$  pour  $r < 1 - a$  ; on a, en posant  $z = \zeta + re^{i\theta}$

$$|2i\pi f(\zeta)| = \left| \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} |f(z)| r d\theta = \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int \int_{\Delta} |f(z)| d\sigma &\geq \int \int_{\Delta_r} |f(z)| d\sigma = \int_0^r \int_0^{2\pi} |f(z)| \rho d\rho d\theta \\ &\geq \int_0^r 2\pi |f(\zeta)| \rho d\rho = \pi r^2 |f(\zeta)| \end{aligned}$$

et, comme ceci est valable quel que soit  $r < 1 - a$ , on en déduit (1).

Ceci posé, soit  $(f_n)$  une suite de Cauchy dans  $H$ . Pour tout nombre  $a$  tel que  $0 \leq a < 1$ , soit  $D_a$  le disque fermé de centre  $O$  et de rayon  $a$ . On a, d'après (1) :

$$d(f_m, f_n) \geq \pi(1-a)^2 |f_m(\zeta) - f_n(\zeta)|$$

pour tout  $\zeta \in D_a$ . Donc,  $f_n$  converge uniformément dans tout disque  $D_a$ , vers une fonction  $f$  qui, d'après le théorème de Weierstrass, est holomorphe dans  $\Delta$ . En outre, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\int \int_{D_a} |f_m(z) - f_n(z)| d\sigma \leq \varepsilon$$

pour  $m, n \geq N$ , quel que soit  $a < 1$  ; donc, on a

$$\int \int_{D_a} |f(z) - f_n(z)| d\sigma \leq \varepsilon$$

pour  $n \geq N$ , quel que soit  $a < 1$  ; donc, on a

$$\int \int_{\Delta} |f(z) - f_n(z)| d\sigma \leq \varepsilon$$

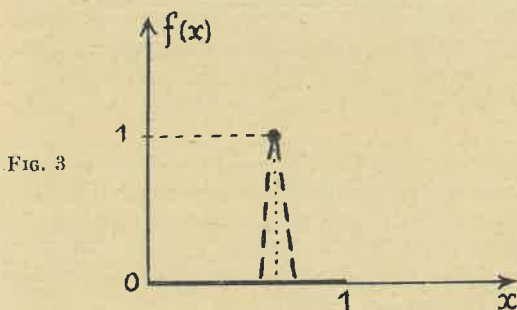
pour  $n \geq N$  ; ainsi,  $d(f_n, f) \rightarrow 0$ , et  $f_n$  tend vers  $f$  dans l'espace  $H$ .

# CINQUIÈME EXEMPLE

Soit  $B$  l'ensemble de toutes les fonctions  $f(x)$ , à valeurs réelles, définies sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Le mode de convergence le plus élémentaire sur  $B$  est la convergence en chaque point :  $f$  tend vers  $g$  si  $f(x)$  tend vers  $g(x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Nous allons montrer qu'on ne peut pas définir une distance sur  $B$  telle que la convergence correspondante soit la convergence en chaque point. Ceci montrera que la topologie ne doit pas se limiter à l'étude des espaces métriques.

L'ensemble  $C$  des fonctions continues est contenu dans  $B$ . Soit  $C_1$  l'ensemble des fonctions  $f \in B$  qui sont limites en chaque point d'une suite de fonctions de  $C$ . Les fonctions de  $C_1$  sont ce qu'on appelle les fonctions de première classe. On démontre, et nous admettons ici, qu'une telle fonction admet au moins un point de continuité. Si la convergence en chaque point pouvait être définie par une distance,  $C_1$  serait un ensemble fermé dans  $B$ , à savoir l'adhérence de  $C$  dans  $B$ . Or, nous allons construire une suite  $(f_n)$  de fonctions de  $C_1$ , convergeant en chaque point vers une fonction  $f$  qui n'appartient pas à  $C_1$ . Cette construction résulte des remarques suivantes :

a) Une fonction  $f \in B$ , égale partout à 0, sauf en un point où elle est égale à 1, appartient à  $C_1$  (elle est, par exemple, limite en chaque point d'une suite de fonctions continues linéaires par morceaux).



b) Une fonction  $f \in B$ , égale partout à 0, sauf en un nombre fini de points où elle est égale à 1, appartient à  $C_1$  (elle est somme d'un nombre fini de fonctions du type précédent).

c) Soit  $(r_1, r_2, \dots)$  l'ensemble des nombres rationnels rangés en une suite (2). Soit  $f_n$  la fonction égale à 0 partout, sauf aux points  $r_1, \dots, r_n$  où elle est égale à 1. Alors,  $f_n \in C_1$  pour tout  $n$ .

d) La suite  $(f_n)$  converge en chaque point vers la fonction  $f$  telle que  $f(x) = 0$  pour  $x$  irrationnel et  $f(x) = 1$  pour  $x$  rationnel. Or, cette fonction n'admet aucun point de continuité. Donc, elle n'appartient pas à  $C_1$ .

On verra dans une conférence ultérieure qu'on peut définir une topologie sur  $B$  telle que la notion correspondante de convergence soit celle de la convergence en chaque point.

J. D.

(2) Cela est possible puisque l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1 est dénombrable.

---

---

## II. PAGES A RELIRE

---

---

### PRÉFACE A L'ALGÈBRE

de BÉZOUT

Nous avons publié dans notre numéro 180 la préface à l'Algèbre de CLAIRAUT, où le grand mathématicien prônait la méthode de redécouverte.

En contrepartie, nous donnons ici la préface à l'Algèbre de BÉZOUT (1730-1783), où cette méthode est critiquée. Ce document illustre, par ailleurs, le lent développement de la théorie des équations au XVIII<sup>e</sup> siècle.

Nous reproduisons la préface d'après l'édition de 1787. La première édition est de 1766.

J. I.

### PREFACE

*Les connoissances que nous avons exposées dans les deux volumes précédents, servent de base à toutes les parties des Mathématiques ; et la méthode que nous avons suivie pour les présenter, peut servir à passer à des vérités plus composées. Mais en réfléchissant sur cette méthode, on a pu remarquer que le nombre des propositions qu'on est obligé de se rappeler pour l'intelligence d'une proposition nouvelle, s'accroît à mesure que celle-ci s'éloigne de l'origine de la chaîne qui les lie les unes aux autres.*

*Cette maniere de procéder à la démonstration ou à la recherche des vérités mathématiques, est sans doute lumineuse ; mais elle devient de plus en plus pénible à mesure que ces vérités s'éloignent davantage des connoissances primitives : elle a d'ailleurs l'inconvénient d'exiger de la part de l'esprit, de nouvelles ressources, de nouveaux expédients, à mesure qu'on passe à de nouveaux objets.*

*Cependant, quelque différents que soient les objets des recherches Mathématiques, les raisonnemens et les opérations qu'ils exigent, ont des parties communes qu'on peut ramener à des regles générales, à l'aide desquelles on peut soulager l'esprit d'une grande partie des efforts que chaque nouvelle question sembleroit exiger. La méthode qu'on appelle Analyse, est celle qui enseigne à trouver ces regles ; et l'instrument qu'elle emploie pour y parvenir, s'appelle l'Algebre.*

*L'Algebre, ou l'art de représenter par des signes généraux toutes les idées qu'on peut se former relativement aux quantités, est à proprement parler, une langue en laquelle nous traduisons d'abord certaines idées connues ; puis, par des regles constantes, nous combinons ces idées à l'aide des caracteres de cette langue ; et enfin, interprétant les résultats de ces combinaisons, nous en concluons des vérités que toute autre maniere de procéder auroit rendues d'un accès très-difficile, et auxquelles même il seroit souvent impossible d'atteindre par une autre voie.*

*Les avantages principaux qu'on peut retirer de cette science, sont*

donc de se faciliter l'intelligence et la découverte des vérités mathématiques, et de se procurer des moyens faciles et des regles générales pour résoudre toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Les Méthodes de l'Algebre ne nous étoient point nécessaires dans les volumes précédents, où les objets étoient simples ; mais la synthèse que nous y avons employée, ne peut nous procurer les mêmes facilités pour traiter ceux qui nous restent à parcourir. D'ailleurs une des choses qu'on doit avoir en vue dans l'étude des Mathématiques, c'est moins d'accumuler un grand nombre de propositions, que d'acquérir l'esprit de recherche et d'invention, qui seul peut faire mettre à profit les connoissances que l'on a acquises ; or la manière de procéder en Algebre tend directement à ce but.

L'objet principal que nous nous proposons, en donnant l'Algebre dans ce volume-ci, est de nous mettre en état de traiter, dans le suivant, la Méchanique, d'une maniere facile et utile. Mais pour tirer de l'Algebre les avantages qu'elle peut procurer, il faut s'être rendu familier l'usage des différentes opérations qu'elle enseigne, et s'être accoutumé à interpréter les phrases de cette langue ; c'est pour cette raison, que nous avons renfermé dans ce même volume, plusieurs applications de l'Algebre à l'Arithmétique et à la Géométrie. Nous nous étions proposés d'y faire entrer encore une autre branche de l'Analyse, celle qui regarde les quantités considérées comme variables, ou du moins, d'en donner ce qui nous seroit nécessaire pour quelques applications utiles à la Méchanique ; mais une espece de nécessité de conserver à cette troisieme Partie le même caractere d'impression qu'aux deux premieres, ne nous permet pas d'exécuter ce projet pour le moment, sans passer de justes bornes.

Les différentes méthodes qu'on a suivies jusqu'ici, pour exposer les principes de l'Algebre, se réduisent à deux principales. La première consiste à donner les regles des quatre opérations fondamentales, et celles qui conduisent à la résolution des équations du premier degré, par une voie qu'on peut regarder comme synthétique. La seconde, qui est purement analytique, conduit à trouver ces regles, en proposant des questions dont la résolution exige certaines opérations et certains raisonnemens, que par un examen postérieur, on trouve revenir les mêmes dans toutes les questions, et que par conséquent on érige en regles générales. Cette dernière méthode sembleroit d'abord préférable à la première, en ce qu'elle paroît devoir flatter l'amour propre des commençants, et irriter leur curiosité. Mais si l'on fait réflexion, qu'alors l'attention est nécessairement partagée entre trois objets, sçavoir l'état de la question, les raisonnemens pour l'exprimer algébriquement, et les opérations qu'il faut faire à l'aide de signes dont la signification échappe d'autant plus aisément qu'on est encore moins exercé à représenter ses idées d'une maniere abstraite, il me semble qu'on doutera que cette méthode soit la meilleure, dans les commencements, pour le plus grand nombre de lecteurs. Ne produiroit-elle pas, au contraire, un effet tout opposé à celui que quelques-uns lui attribuent ? Les raisonnemens qu'elle exige, quoique simples dans les commencements, où, sans doute, on ne traite que des questions simples, ces raisonnemens, dis-je, devant être tirés du fonds même de celui qui opere, ne l'humilient-ils pas, lorsqu'ils ne se

présenteront pas à lui ? La méthode d'invention suppose toujours une certaine finesse ; c'est celle qu'ont dû suivre les inventeurs, et par conséquent celle des hommes de génie ; or ceux-ci ne sont certainement pas le plus grand nombre.

Ce sont ces considérations qui nous ont déterminé à suivre la première méthode pour l'exposition des règles fondamentales ; mais comme un des objets que nous nous proposons est de faire acquérir au lecteur cette méthode d'invention, nous n'avons suivi la première, que jusqu'où il nous a paru nécessaire de le faire, pour que le défaut d'habitude des signes algébriques, ne fût plus un obstacle à l'intelligence de ce que nous aurions à présenter.

Nous ne dirons rien de la manière dont les choses sont traitées ; ce n'est plus à nous à la juger. Mais nous croyons pouvoir nous arrêter un moment sur quelques-unes des matières que nous avons considérées ; elles sont de deux sortes : les unes élémentaires ; les autres, au moins pour la plus grande partie, supposent qu'on s'est rendu les premières très-familieres. Pour les unes et pour les autres, nous avons fait ensorte de ne rien omettre de ce qui peut être utile. Nous avons distingué celles de la seconde sorte, par de petits caractères : quelques notes répandues dans l'ouvrage, et qui appartiennent à la partie élémentaire, sont à la vérité du même caractère, mais elles sont distinguées par une étoile. Parmi les objets compris sous le petit caractère, nous avons renfermé, entre autres choses, 1°. le Précis d'une méthode, qu'on trouvera avec plus d'étendue dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1764, et qui a pour objet, l'élimination des inconnues dans les équations. C'est une partie de l'Algèbre, sur laquelle il y a encore bien des choses à faire (1), et qui importe d'autant plus à la perfection de cette science ; que la résolution générale des équations en dépend absolument. 2°. Une méthode pour la résolution des équations. Nous ne dirons rien des tentatives qui ont été faites sur cette matière depuis la naissance de l'analyse. Nous remarquerons seulement que jusqu'à nos jours, on n'a pas passé le quatrième degré ; on n'a pas même eu une méthode uniforme pour les degrés qu'on sait résoudre. On trouve, à la vérité, dans l'Analyse démontrée du P. REYNEAU, une méthode que l'on y donne comme générale, et qui est due à M. TSCHIRNAÛS, qui la publia dans les actes de Leipsik (2) ; mais indépendamment des calculs rebatants et superflus auxquels elle entraîne, elle ne réussit pour le quatrième degré, que par une modification de la règle ; et quelques réflexions sur la forme que doivent nécessairement avoir les racines des équations des degrés supérieurs, font bientôt voir qu'elle ne réussiroit point passé le quatrième degré. Les bornes que les matières plus nécessaires à notre objet m'ont forcé de donner à l'exposition de la méthode que je propose m'ont empêché d'entrer dans quelques détails sur son application au cinquième degré et aux degrés supérieurs. Je m'étois même proposé de ne rien publier sur ce sujet, que

(1) Depuis la première édition de cet ouvrage, cette partie de l'Algèbre ne nous paraît plus laisser les mêmes choses à désirer. Voyez l'ouvrage qui a pour titre : *Théorie générale des Equations*, que nous avons publié en 1779.

(2) En 1683. J. I.

*lorsque, libre d'autres occupations, j'aurois pu y donner la perfection dont je le croyois susceptible : mais M. EULER ayant publié dans le tome IX des nouv. Comment. de Pétersbourg, qui vient de paroître, une méthode sur la même matiere, je donne ici les choses, telles que je les ai trouvées d'abord, c'est-à-dire, sur la fin de 1761. Au reste, on trouvera plus de détails dans les Mémoires de l'Académie ; on trouvera entre autres choses, une méthode pour les équations, dont le degré est marqué par un nombre composé ; cette méthode simplifie le travail dans ces cas : nous aurions pu l'employer ici pour le quatrieme degré ; mais dans le dessein où nous étions de faire voir ce que l'on pouvoit présumer de l'application de notre méthode, aux degrés supérieurs, nous avons préféré d'observer l'uniformité.*

*Sous le même caractère d'impression sont encore compris beaucoup d'autres objets que nous avons cru devoir traiter, pour ne pas obliger de recourir ailleurs.*

*Dans la seconde Section, nous nous sommes attachés à faire voir la maniere d'appliquer l'Algebre, d'en traduire les résultats, de les exprimer par lignes. Nous avons tâché de faire bien entendre comment l'Algebre comprend, dans une même équation, tous les différens cas d'une question ; ce que signifient les différentes racines, positives, négatives, réelles ou imaginaires.*

*La connoissance des principales propriétés des sections coniques, nous a paru devoir entrer dans notre plan, quelques unes de ces courbes se rencontrant assez souvent dans l'Architecture Navale. Enfin, leur usage pour la construction des équations nous y a encore déterminé. Nous avons fait ensorte de présenter ces objets, et plusieurs autres qu'on trouvera dans le cours de l'Ouvrage, de maniere qu'ils devinssent le germe de connoissances plus étendues pour ceux qui desireront les acquérir.*

---

### III. ESSAI

## L'AXIOME DE DEDEKIND ET SON APPLICATION A L'ÉTUDE DES PARALLÈLES

par

R. NEUMEISTER

(Lycée Fustel-de-Coulanges, Strasbourg)

### Introduction

Avant de donner une définition axiomatique des nombres irrationnels à l'aide d'une coupure, DEDEKIND (1) étudie la continuité de la ligne droite. Il énonce l'axiome, qui porte son nom, d'abord pour la droite orientée en insistant sur son évidence.

Dans cette étude nous avons commencé par définir une coupure sur une droite par trois conditions qui correspondent à nos trois premiers axiomes de la demi-droite (2). L'axiome de Dedekind permet de définir des points de la droite *par adjonction*, et pour cette raison il correspond à notre dernier axiome de la demi-droite.

Il y a une contradiction apparente à définir de nouveaux points en classant l'ensemble de tous les points ; mais nous avons montré qu'il y a des points classés indirectement, même ceux qui restent encore à définir.

La projectivité d'une coupure nous permet de définir une demi-droite parallèle à une demi-droite donnée. Nous montrons par un exemple que la relation de parallélisme n'est pas nécessairement symétrique si nous nous plaçons *strictement* dans le plan. Ainsi, nous mettons en évidence la *nécessité* de traiter la question des parallèles, sous sa forme la plus générale, dans l'espace à trois dimensions.

### I. L'axiome de Dedekind

*Définition d'une coupure sur une droite ou sur un segment de droite*

Un point C d'une droite détermine sur cette droite deux demi-droites opposées  $\overrightarrow{CA}$  et  $\overrightarrow{CB}$  ( $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}$ ). Nous disons encore que le point C partage les points de la droite en deux classes (I) et (II).

La classe (I) est l'ensemble des points de la demi-droite  $\overrightarrow{CA}$ , sauf peut-être son origine C.

La classe (II) est l'ensemble des points de la demi-droite  $\overrightarrow{CB}$ , sauf peut-être le point C.

Ainsi, tout point de la droite, sauf C, appartient à l'une des deux classes et à une seule. Le point C peut appartenir aux deux classes, soit à aucune, soit à une seule.

Nous allons caractériser ces deux classes par des propriétés résultant des axiomes de la demi-droite, sans faire intervenir explicitement le point C.

*Conditions caractéristiques d'une coupure*

Si les points d'une droite sont répartis en deux classes vérifiant les conditions suivantes, nous disons qu'on a *défini une coupure sur la droite*.

(1) Cf. Richard DEDEKIND : *Stetigkeit u. irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872.

(2) Cf. notre article dans le *Bull.* de l'A.P.M. de mai 1956 : Définition axiomatique des espaces linéaires et leur orientation.

(1) Tout point de la droite, sauf peut-être un seul, appartient à une et une seule de deux classes (I) et (II).

(2) Dans chaque classe il y a au moins un point.

(3) A et B étant deux points distincts appartenant respectivement aux classes (I) et (II), la demi-droite  $\overrightarrow{AB}$  contient tous les points de la classe (II) et la demi-droite  $\overrightarrow{BA}$  contient tous les points de la classe (I).

Si nous orientons la droite par la relation :  $A < B$ , la condition (3) peut aussi s'énoncer :

(3') Tout point de la classe (I) est avant tout point de la classe (II).

#### *Coupure sur un segment de droite*

Nous déduisons des conditions (1), (2), (3), que tout point de la demi-droite  $\overrightarrow{AB}$  appartient nécessairement à la classe (I) et que tout point de la demi-droite  $\overrightarrow{BA}$  appartient nécessairement à la classe (II).

*Il y a donc des points classés indirectement.*

Donc si deux points distincts A et B appartiennent respectivement aux classes (I) et (II), il suffit de classer les points du segment AB. Sur le segment de droite nous remplaçons (3) par

(3'') Si A' et B' sont deux points du segment de droite AB, appartenant respectivement comme A et B aux classes (I) et (II), le segment A'B contient tout point de la classe (II) et le segment B'A contient tout point de la classe (I).

D'après ce que nous venons de voir, *tout point d'une droite définit une coupure sur cette droite.*

Réciproquement nous admettons l'axiome suivant :

**Axiome de Dedekind :** *Si nous avons défini sur une droite une coupure, il existe toujours un point C de la droite définissant cette coupure.*

Nous disons aussi : *la coupure définit le point C.*

REMARQUE : Si nous admettons en plus des quatre axiomes de la demi-droite, le théorème suivant résultant de l'axiome du plan : « Sur chaque segment de droite il y a au moins un point autre que ses extrémités », alors nous pouvons démontrer par l'absurde l'unicité du point C défini par une coupure.

Réciproquement, si nous admettons l'unicité du point C défini par une coupure, nous pouvons en déduire ce théorème sur le segment, sans nous servir de l'axiome du plan.

En général, nous nous servons de l'unicité du point C.

#### PROPRIÉTÉS ÉQUIVALENTES A L'AXIOME DE DEDEKIND

Soit sur une droite orientée une suite monotone de points  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), caractérisée par les relations :

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq A_4 \leq \dots \leq A_i \leq A_{i+1} \leq \dots$$

Nous disons que la suite est bornée s'il y a un point B (borne) tel que pour tout i on a :  $A_i \leq B$

THÉORÈME : *Sur une droite orientée, une suite monotone bornée de points définit un point L, origine d'une demi-droite, ensemble de toutes les bornes de la suite.*

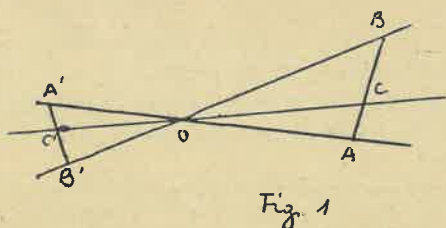
En effet, L est défini par une coupure ; la classe (I) contient les points dépassés, c'est-à-dire les points de la suite et tous les points avant l'un quelconque de ces points. La classe (II) contient tous les points non dépassés.

Citons encore le théorème sur les segments emboîtés :

**THÉORÈME :** *Etant donnée, sur une droite, une suite de segments  $A_i B_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) tel que chaque segment contient le suivant et que tout point de la droite, sauf peut-être un seul, appartient à un prolongement d'un des segments au moins, alors il existe un point de la droite et un seul appartenant à tous les segments de la suite.*

#### PROJECTIVITÉ DE LA COUPURE

Soient deux segments de droite  $AB$  et  $A'B'$  qui sont en relation projective dans une projection centrale de point de vue  $O$ . Cette projection, conservant l'ordre, transforme les deux classes définissant une coupure sur le segment  $AB$  en deux classes définissant également une coupure sur le segment  $A'B'$ . Les points  $C$  et  $C'$  définis



respectivement par ces deux coupures sont sur une droite passant par le point  $O$ . La correspondance projective entre le segment de droite  $AB$  et le segment de plan  $(O, AB)$  permet d'appliquer également la coupure au segment de plan pour définir l'élément générique  $OC$ . Pour des raisons analogues, on peut définir une coupure sur un segment d'espace.

#### APPLICATION A LA DÉFINITION D'UNE DEMI-DROITE PARALLÈLE A UNE DEMI-DROITE DONNÉE

Considérons une demi-droite donnée  $\overrightarrow{OA}$  et un point  $M$  non situé sur son support. Soit  $B$  un point de  $\overrightarrow{MO}$ . Nous nous proposons d'étudier l'ensemble des demi-droites d'origine  $M$  et situées dans le demi-plan d'arête  $OM$  et contenant le point  $A$  ; ce sont aussi les demi-droites d'origine  $M$  coupant l'un des segments  $OA$  ou  $AB$ . Définissons une coupure sur cet ensemble : La classe (I) contient toutes les demi-droites coupant  $\overrightarrow{OA}$  et la classe (II) est formée par les demi-droites ne coupant pas  $\overrightarrow{OA}$ .

Cette coupure définit une demi-droite  $\overrightarrow{MI}$ , où  $I$  désigne le point correspondant sur le segment  $AB$ . La demi-droite  $\overrightarrow{MI}$  ainsi définie ne peut pas avoir de point commun avec la demi-droite  $\overrightarrow{OA}$ .

En effet, supposons provisoirement qu'elle ait un point commun  $K$  avec  $\overrightarrow{OA}$ . Mais alors il y a encore des points de  $\overrightarrow{OA}$  qui dépassent  $K$  et par suite des demi-droites de la classe (I) qui dépassent  $\overrightarrow{MK}$ , donc  $\overrightarrow{MK}$  ne peut pas être définie par cette coupure.

Nous concluons : La demi-droite  $\overrightarrow{MI}$  définie par cette coupure est unique et n'a pas de point commun avec la demi-droite  $\overrightarrow{OA}$ .

Par définition, la demi-droite  $\overrightarrow{MI}$  est parallèle à la demi-droite donnée  $\overrightarrow{OA}$  ; elle sépare les demi-droites qui sont sécantes avec  $\overrightarrow{OA}$  des demi-droites non sécantes.

Nous donnons à cette définition un sens large en la complétant dans le cas où M est situé sur la droite OA :

Deux demi-droites de même support sont parallèles si elles sont de même sens.

Nous écrivons la relation de parallélisme :

$$\overrightarrow{MI} // \overrightarrow{OA} \quad (\overrightarrow{MI} \text{ parallèle à } \overrightarrow{OA}),$$

où les deux demi-droites jouent, d'après la définition, des rôles différents.

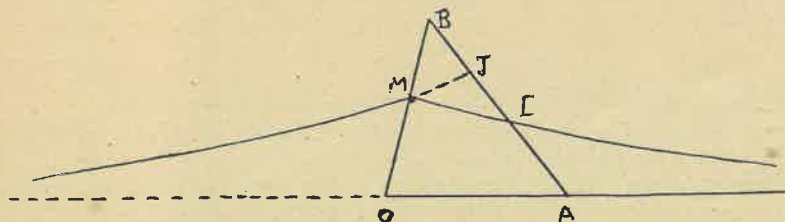


Fig. 2

Considérons maintenant les demi-droites d'origine M et situées dans le demi-plan d'arête OM ne contenant pas le point A ; ce sont les prolongements des demi-droites étudiées précédemment. Elles se répartissent encore en deux classes. Les demi-droites de la classe (I') coupent  $\overrightarrow{OA}$  et les demi-droites de la classe (II') n'ont pas de point commun avec  $\overrightarrow{OA}$ . Cette coupure définit une demi-droite parallèle  $\overrightarrow{MJ}$  à  $\overrightarrow{OA}$ , où le point J est situé sur le segment AB. D'après la propriété : « Deux droites non confondues ont au plus un point commun », nous pouvons conclure que les prolongements des demi-droites de la classe (I') appartiennent nécessairement à la classe (II). D'où il résulte encore que le point J appartient nécessairement au segment IB.

Il y a maintenant deux possibilités :

1° I et J sont confondus. Alors il existe une droite et une seule passant par le point M et ne coupant pas la droite OA. Nous appelons dans ce cas cette droite non sécante unique la parallèle par M à la droite OA (comme en géométrie euclidienne).

2° I et J sont distincts. L'ensemble des droites passant par M et non sécantes avec la droite OA est aussi l'ensemble des éléments génériques du segment de plan (M, IJ). Les extrémités MI et MJ de ce segment de plan s'appellent les parallèles par M à la droite OA (comme dans la géométrie de Lobatchevsky).

#### EXEMPLE D'UNE GÉOMÉTRIE PLANE

où LA RELATION DE PARALLÉLISME ENTRE DEUX DEMI-DROITES N'EST PAS SYMÉTRIQUE

Considérons un plan non plongé dans un espace à trois dimensions. Nous entendons par là que nous admettons seulement : (I) les axiomes de la demi-droite ; (II) les axiomes des espaces linéaires avec la restriction que nous ignorons les points non situés dans un plan ; et, en plus, (III) l'axiome de Dedekind :

Nous allons montrer par un exemple que, dans un tel plan, il peut y avoir des demi-droites pour lesquelles la relation de parallélisme n'est pas symétrique.

Soit un plan euclidien avec un système d'axes de coordonnées cartésiennes

rectangulaires ou obliques. Nous appelons ce plan avec sa structure euclidienne le *plan de comparaisons*. Ce plan a d'ailleurs une existence analytique, ce qui permet d'éviter les difficultés d'ordre axiomatique. Un point est défini par l'ensemble ordonné de deux nombres réels, nous le notons  $(x, y)$ .

Nous donnons maintenant à l'ensemble des points du plan de comparaison une *nouvelle structure linéaire* (D) par la définition de ce que nous appelons maintenant une droite (D). Cette définition est un *axiome supplémentaire particulier à la géométrie du plan de structure* (D) que nous nous proposons d'étudier.

Une droite (D) est définie par l'une des équations (D<sub>1</sub>) ou (D<sub>2</sub>) suivant les conditions correspondantes.

$$(D_1) \quad ux + vy = w$$

où les paramètres réels  $u, v, w$  satisfont à la condition :  $uv \geq 0$ , au plus un des paramètres  $u$  ou  $v$  étant nul.

$$(D_2) \quad y = \frac{-1}{x-a} + b$$

avec la condition :  $x > a$ , les paramètres  $a$  et  $b$  étant deux nombres réels.

Par rapport au plan de comparaison nos droites (D) sont donc de deux espèces : les droites (D<sub>1</sub>) ou les branches d'hyperboles (D<sub>2</sub>).

Si nous définissons les demi-droites d'origine  $(x_0, y_0)$  par une condition supplémentaire :  $x \geq x_0$  ou  $x \leq x_0$  ou, par défaut, des inégalités analogues pour  $y$ , alors les droites (D) vérifient les axiomes de la demi-droite.

Examinons si les axiomes des espaces linéaires (limités au plan) sont également vérifiés.

Soient deux points  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$ , montrons que par ces deux points il passe une droite (D) et une seule (axiome II, 1).

Si  $x_0 = x_1$ , il y a la droite d'espèce (D<sub>1</sub>)  $x = x_0$  qui est la seule solution.

Si  $x_0 \neq x_1$ , alors nous distinguons deux cas :

$$1^{\circ} \quad \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \leq 0$$

il y a une droite d'espèce (D<sub>1</sub>) qui convient seule.

$$2^{\circ} \quad \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} > 0$$

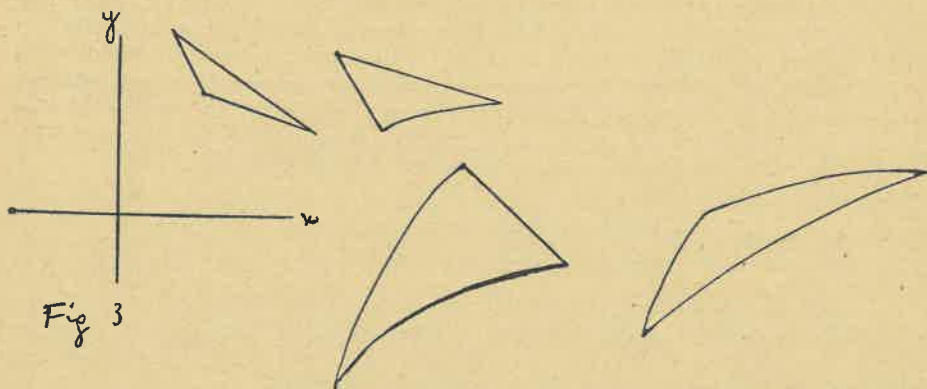


Fig 3

il n'y a qu'une droite d'espèce (D<sub>2</sub>) répondant à la question. L'axiome II, 1 est donc toujours vrai.

L'axiome II, 2 devient sous sa forme restreinte :

II, 2' : Etant donnée une droite, il y a encore un point non situé sur la droite. La droite et le point sont situés dans un même plan.

C'est mis en évidence par la définition du plan de structure (D).

Pour faciliter la vérification de l'axiome du plan (III, 3), nous nous contentons de signaler que par rapport au plan de comparaison il y a quatre types de triangles, dont les côtés sont représentés respectivement par des segments de droites ou des arcs d'hyperboles.

L'axiome de Dedekind nous sert pour définir une demi-droite  $\bar{\delta}$  d'origine  $(\alpha, \beta)$  parallèle à une demi-droite donnée  $\bar{d}$  d'origine  $(x_0, y_0)$ .

Etudions l'exemple où  $\bar{d}$  est définie par l'équation :

$$(\bar{d}) \quad y = \frac{-1}{x-a} + b$$

avec les conditions :

$$y_0 = \frac{-1}{x_0-a} + b$$

$$\text{et} \quad x \geq x_0 > a.$$

Supposons d'autre part :  $\beta \geq b$ .

Nous trouvons alors comme demi-droite  $\bar{\delta}$  d'origine  $(\alpha, \beta)$  parallèle à  $\bar{d}$

$$(\bar{\delta}) \quad y = \beta \quad \text{avec} \quad x \geq \alpha.$$

Cherchons maintenant la demi-droite d'origine  $(x_0, y_0)$  parallèle à  $\bar{\delta}$ , nous trouvons une demi-droite  $\bar{d}'$  autre que  $\bar{d}$  :

$$(\bar{d}') \quad y = \frac{-1}{x-a'} + \beta$$

avec les conditions :

$$y_0 = \frac{-1}{x_0-a'} + \beta$$

$$\text{et} \quad x \geq x_0.$$

Dans cet exemple, la relation de parallélisme n'est donc pas symétrique.

Mais :

$$\begin{array}{l} \bar{\delta} \parallel \bar{d} \\ \bar{d} \not\parallel \bar{\delta} \end{array}$$

AUTRE EXEMPLE : Donnons la demi-droite  $\bar{d}'$  que nous venons de définir ; la demi-droite parallèle d'origine  $(\alpha, \beta)$  est encore la demi-droite  $\bar{\delta}$  de l'exemple précédent.

Dans ce nouvel exemple, la relation de parallélisme est symétrique :

$$\begin{array}{l} \bar{\delta} \parallel \bar{d}' \\ \bar{d}' \parallel \bar{\delta} \end{array}$$

Dans notre plan de structure (D), nous pouvons trouver à titre d'exercice d'autres exemples, soit en changeant l'espèce de la demi-droite donnée, soit en changeant la région du plan où se trouve l'origine de la demi-parallèle cherchée.

Nous retenons comme conclusion :

THÉORÈME : Si un plan n'est pas plongé dans l'espace à trois dimensions, la relation de parallélisme n'est pas nécessairement symétrique.

REMARQUES SUR LES GÉOMÉTRIES NON-ARGIENNES

Rappelons que D. HILBERT (3) désigne par *géométrie non-argienne* une géométrie plane ne vérifiant pas toujours le théorème de Desargues, c'est-à-dire le théorème fondamental sur les triangles homologues. Une telle géométrie est encore caractérisée par l'absence des propriétés du quadrilatère complet, permettant, d'après VON STAUDT (4), de définir une division harmonique, sans utiliser aucune notion de métrique. On met ainsi en évidence, que pour démontrer ces propriétés projectives, il faut plonger le plan dans l'espace à trois dimensions afin d'éviter de se servir d'une métrique appropriée. L'importance pour la géométrie plane de l'axiome d'extension des espaces linéaires II, 2 est ainsi mise en évidence.

Dans l'exemple de géométrie non-argienne donné par HILBERT, les parallèles vérifient le postulat d'Euclide, et la relation de parallélisme est symétrique.

La géométrie du plan de structure (D), que nous venons de définir, est aussi une géométrie non-argienne. D'une façon générale, une géométrie plane sans relation de parallélisme symétrique est nécessairement non-argienne.

LES DEMI-DROITES PARALLÈLES DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Définition d'un demi-plan parallèle à une demi-droite

Considérons une demi-droite  $\vec{OX}$  et une droite (D) non située dans un même plan avec  $\vec{OX}$ . Nous classons les demi-plans d'arête (D) et situés du côté de  $\vec{OX}$  par rapport au plan O, (D). La classe (I) contient les demi-plans qui coupent  $\vec{OX}$  en un point variable X et la classe (II) est formée par les demi-plans qui n'ont pas de point commun avec  $\vec{OX}$ . Nous définissons ainsi une *coupure qui détermine par définition le demi-plan d'arête (D) parallèle à la demi-droite  $\vec{OX}$* .

Ce demi-plan parallèle d'arête (D) est *unique* et n'a pas de point commun avec  $\vec{OX}$ .

Donnons encore un sens à notre définition au cas où la droite (D) coupe le support de  $\vec{OX}$ . Nous disons dans ce cas que le demi-plan contenant une demi-droite de même support et de même sens que  $\vec{OX}$  est parallèle à  $\vec{OX}$ .

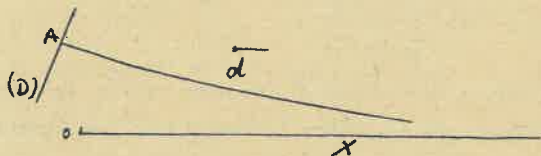


Fig 4

Considérons un plan passant par  $\vec{OX}$  et par un point A de (D), ce plan coupe le demi-plan d'arête (D) parallèle à  $\vec{OX}$  suivant la demi-droite  $\vec{d}$  parallèle à  $\vec{OX}$ .

En effet, cette intersection  $\vec{d}$  est située d'abord dans un même plan avec  $\vec{OX}$  et n'a pas de point commun avec cette demi-droite. Supposons provisoirement que  $\vec{d}$  ne

(3) Cf. D. HILBERT : *Grundlagen der Geom.*, pages 85-88.

(4) Cf. Chr. VON STAUDT : *Geom. der Lage*, Nüremberg, 1847, p. 43.

soit pas parallèle à  $\vec{OX}$ , alors il existe une parallèle  $\vec{d'}$  d'origine A qui sépare  $\vec{d}$  et  $\vec{OX}$ . Mais alors le demi-plan (D),  $\vec{d'}$  ne coupe pas non plus  $\vec{OX}$  et sépare le demi-plan parallèle considéré de  $\vec{OX}$ , ce qui est impossible.

D'où le théorème sur les demi-plans parallèles à une demi-droite.

**THÉORÈME :** Le demi-plan d'arête (D) parallèle à une demi-droite donnée  $\vec{OX}$  contient la famille des demi-parallèles à  $\vec{OX}$ , ayant pour origine un point de (D).

La demi-parallèle d'origine A à  $\vec{OX}$ , où A est sur (D), s'obtient comme intersection du demi-plan parallèle avec le plan AOX.

Réciproquement : A étant un point de (D) et  $\vec{AX'}$  la demi-droite d'origine A parallèle à  $\vec{OX}$ , le demi-plan (D,  $\vec{AX'}$ ) est parallèle à  $\vec{OX}$ .

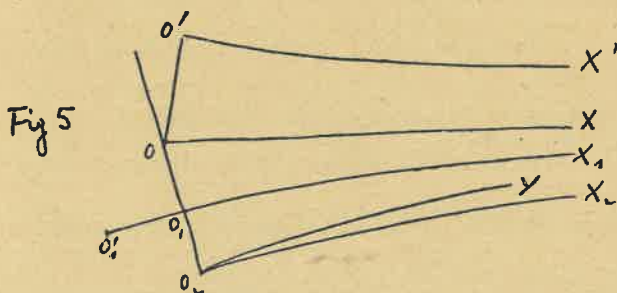
On peut encore démontrer la propriété :

Deux demi-droites parallèles à  $\vec{OX}$  n'ont pas de point commun.

Nous allons utiliser ces propriétés pour étudier la relation de parallélisme entre des demi-droites.

#### SYMÉTRIE DE LA RELATION DE PARALLÉLISME DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Considérons une demi-droite  $\vec{OX}$  et soit Q un plan passant par son origine O, mais ne contenant pas cette demi-droite. Nous nous proposons d'étudier les demi-droites parallèles à  $\vec{OX}$ , ayant leur origine dans le plan Q.



Soit  $\vec{OX'}$  une telle demi-parallèle à  $\vec{OX}$  (où l'origine O' est dans Q).

$\vec{OX'} \parallel \vec{OX}$  (par hypothèse).

Soit O<sub>1</sub> un autre point de Q, non aligné avec O et O'. Désignons par P le plan passant par OX et par le point O<sub>1</sub>. Le demi-plan d'arête O<sub>1</sub>O' et contenant  $\vec{OX'}$  est parallèle à  $\vec{OX}$  ; nous le notons (O<sub>1</sub>O', X').

Le plan P coupe ce demi-plan (O<sub>1</sub>O', X') parallèle à  $\vec{OX}$  suivant la parallèle  $\vec{O_1X_1}$  à  $\vec{OX}$ .

$\vec{O_1X_1} \parallel \vec{OX}$  (par construction).

Désignons par O<sub>2</sub> un point de —  $\vec{O_1O}$ . L'intersection de P avec le demi-plan (O<sub>2</sub>O', X') nous donne la parallèle  $\vec{O_2X_2}$  d'origine O<sub>2</sub> à  $\vec{OX}$ .

$\vec{O_2X_2} \parallel \vec{OX}$  (par construction).

Démontrons d'abord que  $\vec{O_2X_2}$  est parallèle à  $\vec{O_1X_1}$ .

Supposons provisoirement le contraire et désignons par  $\vec{O_2Y}$  la demi-parallèle issue de  $O_2$  à  $\vec{O_1X_1}$ . Alors, dans le demi-plan d'arête  $OO_1$  et contenant les demi-droites  $\vec{OX}$ ,  $\vec{O_1X_1}$ ,  $\vec{O_2X_2}$  et  $\vec{O_2Y}$ , la demi-droite  $\vec{O_2Y}$  sépare  $\vec{O_1X_1}$  et  $\vec{O_2X_2}$  et par suite  $\vec{O_2Y}$  sépare aussi  $\vec{OX}$  et  $\vec{O_2X_2}$ , ce qui est contraire au fait que  $\vec{O_2X_2}$  est parallèle à  $\vec{OX}$ . Donc  $\vec{O_2Y}$  coïncide nécessairement avec  $\vec{O_2X_2}$ . D'où :

$$\vec{O_2X_2} // \vec{O_1X_1} \quad (\text{démontré}).$$

Cette relation entraîne que le demi-plan d'arête  $O_2O'$  et contenant  $\vec{O_2X_2}$  et  $\vec{O'X'}$  est parallèle à  $\vec{O_1X_1}$ , d'où encore :

$$\vec{O'X'} // \vec{O_1X_1} \quad (\text{démontré}).$$

Donc le demi-plan  $(OO', X')$  est parallèle à  $\vec{O_1X_1}$ , d'où :

$$\vec{OX} // \vec{O_1X_1} \quad (\text{démontré}).$$

Cette dernière relation est donc symétrique, car nous avons déjà par construction :

$$\vec{O_1X_1} // \vec{OX}.$$

En partant de cette relation symétrique nous déduisons par le même procédé la relation

$$\vec{OX} // \vec{O'X'} \quad (\text{démontré}).$$

Nous résumons :

**THÉORÈME I :** *Dans l'espace à trois dimensions la relation de parallélisme est symétrique.*

**THÉORÈME II :** *Deux demi-droites parallèles à une même troisième, sont parallèles entre elles.*

Ce dernier théorème a été mis en évidence dans deux cas :

- 1) les demi-droites  $\vec{OX}$ ,  $\vec{O'X'}$ ,  $\vec{O_1X_1}$ , dont les origines ne sont pas en ligne droite ;
- 2) les demi-droites  $\vec{OX}$ ,  $\vec{O_1X_1}$ ,  $\vec{O_2X_2}$ , dont les origines sont sur une même droite.

Il nous reste à voir le cas où l'origine se déplace sur le support, de l'une des demi-droites. Soit par exemple  $O'_1$  un point sur la droite  $O_1X_1$ . Remplaçons le plan  $Q$  par le plan  $Q'$  passant par les points  $O, O', O'_1$ . Les demi-parallèles à  $\vec{OX}$  d'origine  $O_1$  et  $O'_1$  ont pour support commun l'intersection du plan  $O_1OX$  (identique à  $O'_1OX$ ) avec le plan  $O_1O'X'$  (identique à  $O'_1O'X'$ ). Ces deux parallèles à  $OX$  sont en plus situées, respectivement par rapport à  $Q$  et  $Q'$ , du même côté que  $O'X'$ , donc elles sont de même sens.

Nous venons donc de démontrer que si nous remplaçons sur son support une demi-droite par une demi-droite de même sens, nous ne changeons rien aux relations de parallélisme avec d'autres demi-droites. Cela justifie la définition suivante.

**DÉFINITION :** *Deux droites orientées sont dites parallèles, si deux demi-droites déterminant ces orientations sont parallèles.*

*Une relation de parallélisme entre des demi-droites peut donc toujours être interprétée comme relation de parallélisme entre les droites orientées déterminées par ces demi-droites.*

Résumons encore les propriétés fondamentales de la relation de parallélisme :

1° On a toujours :

$$\vec{d} // \vec{d} \quad (\text{réflexivité}).$$

2° Si  $\vec{d} // \vec{d}'$  on a aussi  $\vec{d}' // \vec{d}$  (symétrie).

3° Si  $\vec{d} // \vec{d}'$  et  $\vec{d}' // \vec{d}''$ ,

on a aussi  $\vec{d} // \vec{d}''$  (transitivité),

d'où :

**THÉORÈME :** *Dans l'espace à trois dimensions, les droites orientées parallèles à une droite orientée donnée, forment une classe d'équivalence.*

Cette propriété s'applique encore au plan plongé dans l'espace à trois dimensions.

Elle est également valable dans l'espace à  $n$  dimensions pour  $n > 3$ . En effet, l'ensemble de trois droites orientées parallèles deux à deux se trouve toujours dans un même espace à trois dimensions. Elles vérifient donc les trois conditions précédentes.

A la classe des droites orientées parallèles à une droite orientée donnée correspond l'ensemble de leurs supports. Ce qui nous définit en particulier :

dans le plan : un faisceau de droites parallèles ;

et dans l'E<sup>3</sup> : une gerbe de droites parallèles.

**DÉFINITION :** *Une droite est dite parallèle à une droite orientée donnée, si elle est le support d'une droite orientée parallèle à la droite orientée donnée.*

**PROPRIÉTÉ :** *Par tout point de l'espace il passe une parallèle, et une seule, à une droite orientée donnée.*

R. N.

## IV. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

### LANGAGE ET MATHÉMATIQUES <sup>(1)</sup>

par LAURENT SCHWARTZ

*Professeur à la Sorbonne*

Une théorie ou une étude complète des relations entre langage et Mathématiques serait un très gros travail. Je me bornerai à quelques observations d'ordre pratique, faites du point de vue pédagogique, en particulier sur l'importance du langage en Mathématiques. Les mathématiciens sont bien convaincus de cette importance (les physiciens le sont peut-être moins) ; mais il n'est pas mauvais de s'en convaincre encore plus.

Je commencerai pas quelques exemples pris au hasard de ce que j'appellerai des formulations prémathématiques d'un fait scientifique. Le fait scientifique est perçu, compris même, mais l'individu — enfant ou adolescent des divers âges ou même hommes à différentes époques de l'histoire — ne peut l'expliquer en langage mathématique.

Je prends le cas de mes deux enfants, alors qu'ils avaient 6 et 10 ans. Je demandai au plus jeune quel âge aurait son frère quand il aurait, lui, 40 ans. Il répondit tout de suite 44 ans. Mais pourquoi ? « Eh bien, me répondit-il, parce que 6 et 10, et puis 40 et 44, ça fait la même chose. » Le fait scientifique était compris, mais ne pouvait être formulé de façon exacte. Un adulte, ayant une certaine formation mathématique, mais ayant quitté le lycée depuis longtemps, dirait peut-être : « 10 est à 6 comme 44 est à 40 », sans préciser comment est faite la comparaison des deux nombres, différence ou rapport.

Un individu sans formation scientifique ou ayant perdu de vue les principes de cette formation est donc incapable de formuler un fait scientifique un peu complexe. Et cependant, cette formulation est indispensable. Car l'enfant qui dit : « c'est la même chose » pourra résoudre de cette façon les petits problèmes les plus élémentaires qui se posent à cet âge ; mais pour progresser, il faut une formulation précise ; ce n'est pas une manie de professeur, c'est une nécessité du travail scientifique.

Je citerai le cas, non plus d'un enfant, mais d'un professeur au Collège de France. Voulant exprimer que la précision des résultats est proportionnelle au carré du nombre des expériences, il dit : cent expériences ayant permis d'atteindre une certaine précision, 400 expériences donneront une précision seulement deux fois plus grande ; la précision est donc bien proportionnelle au carré du nombre d'expériences. L'exemple cité par le professeur montre qu'il a compris la loi de Gauss et qu'il l'applique correctement, mais, s'il veut l'énoncer, il dit le carré là où il devrait dire la racine carrée.

On pourrait citer beaucoup d'autres exemples. Livres de géographie ou de médecine abondent en rapports inversés ; géographes et médecins ne se trompent pas quand ils reviennent au fait réel qu'ils ont voulu mesurer ; mais ils ne sont pas parvenus à traduire correctement cette mesure. Il y a là l'expression d'une mentalité en quelque sorte prémathématique qui n'interdit pas toute activité à son auteur, mais peut l'empêcher d'accéder à des recherches un peu plus complexes. C'est pourquoi

---

(1) Nous donnons ici le texte, *enregistré au magnétophone*, de la conférence faite par M. Laurent Schwartz, lors des journées d'étude de Sèvres, le 3 novembre 1937. Nous conservons ainsi le ton direct, la phrase toute naturelle, la pensée en quelque sorte spontanée qui ne furent pas de minces attraits de cette importante et brillante conférence. (N.D.L.R.)

nous faisons tant d'efforts, du début à la fin de notre enseignement pour favoriser l'acquisition de ce langage mathématique.

C'est pourquoi les Mathématiques ont une valeur formative bien au-delà des Mathématiques elles-mêmes. Indépendamment du fait que les Mathématiques sont la clé de toutes les autres sciences, l'apprentissage de la formulation mathématique par la perfection du langage mathématique a une valeur formative éminente, même par exemple pour des naturalistes qui, dans le cours de leurs études, n'utiliseront que fort peu de Mathématiques.

Les résultats de notre enseignement restent insuffisants sur ce plan. On le voit au Baccalauréat et aux examens de licence où nos étudiants commettent encore des erreurs grossières par faute de compréhension logique ou insuffisance de langage plus que par ignorance mathématique. Cela tient en grande partie à l'insuffisance de l'horaire d'enseignement des Mathématiques qui rend impossible l'habitude raisonnée de « la mise en langage mathématique ». L'élève comprend beaucoup plus de choses qu'il ne peut en exprimer. S'il avait pu acquérir ces moyens d'expression, il y a un âge, vers la Troisième ou la Seconde, où cette difficulté ne gênerait plus son développement, où il serait inexcusable de ne pouvoir formuler sa pensée avec précision.

#### LANGUE FRANÇAISE OU FORMULE.

Étudions maintenant la formulation mathématique elle-même. Elle peut prendre diverses formes. On peut utiliser une formule :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

On peut aussi énoncer la phrase « le carré d'une somme... »

Il n'y a pas de *différence théorique* entre ces deux formulations, mais seulement une *différence pratique*. La formule seule, ou la phrase complète, constituent les procédés extrêmes de l'expression ; il peut y avoir des procédés intermédiaires. Souvent, mais pas toujours, la formule est la plus courte.

Mais, si d'un point de vue mathématique, les deux expressions se valent, il peut n'en être pas de même au point de vue pédagogique où la façon d'exprimer compte beaucoup. Quelle sera l'expression qui sera la mieux comprise par l'enfant, ou le plus rapidement ? Sans aucun doute, ici, ce sera la formule. Il faudra donc commencer par elle et pendant un certain temps s'en tenir à ce moyen d'expression. L'enfant pourra utiliser la formule avec des nombres, des polynômes, etc... Puis, une fois le fait bien compris, il apprendra à l'exprimer en français. C'est un exercice très utile, non seulement parce qu'il doit savoir dire ce qu'il a bien compris, mais aussi parce que c'est une école de langage mathématique. Seulement cet excellent exercice correspond à un deuxième stade de la formation et il ne faut pas trop insister : l'enfant risque, sur cet exemple, de n'en pas bien saisir l'utilité. Et, pourtant, celui qui n'y parviendrait pas, même s'il a bien compris l'emploi de la formule, sera sans doute incapable de rédiger convenablement la solution d'un problème.

Prenons un autre exemple :  $e = 1/2 g t^2$ . Quant à moi, j'ai été soulagé quand on m'a donné la formule ; auparavant, on m'avait parlé d'espaces parcourus proportionnels aux carrés des durées, etc... Discours compliqués ; la formule éclaire tout. Que ne l'avait-on donnée plus tôt ? Je sais bien qu'on veut tenir compte de l'ordre historique, qu'on veut montrer au jeune physicien comment on est parvenu à la loi, car, après tout, elle ne tombe pas du ciel. Mais on peut donner la formule tout de suite, *si c'est plus simple*, quitte à bien faire comprendre ensuite comment on l'a trouvée (car on doit faire comprendre comment on découvre).

De même pour la formule des gaz parfaits  $p v = \frac{m}{M} RT$ . C'est encore plus net car on l'obtient par approximations successives. On étudie d'abord la loi de Mariotte  $p v = \text{Cte}$ , à température constante. L'élève oublie ou ne pense pas que c'est à tempé-

rature constante (il lui arrive même d'oublier que c'est pour une masse déterminée de gaz). Puis on fait varier la température, à pression ou volume constant, et on parvient à la formule  $p v = \frac{m}{M} RT$ . L'élève est satisfait : il se sent capable de

résoudre tous les problèmes. Cependant la loi de Mariotte subsiste en sa mémoire comme une loi distincte, et il ne sait alors plus bien quand on applique la première formule ou la seconde. En fait, on aura rendu un mauvais service à l'élève en méconnaissant l'importance des moyens mis à notre disposition par la formule.

Il est vrai que si on énonce celle-ci, l'élève ne s'intéressera peut-être plus à la méthode par laquelle on a pu l'établir. Eh bien, tant pis ! Ce qui est essentiel, c'est qu'il sache manier la physique, il est moins indispensable qu'il sache comment on a trouvé toutes les lois.

Pour apprendre comment on découvre, il sera plus instructif, en travaux pratiques, de faire découvrir une formule sur quelque chose qui soit inconnu de l'élève. Et même dans ce cas, ce qu'il retiendra ensuite, c'est la formule finale obtenue.

Je ne veux pas insister, mais j'ai cru utile de dire qu'on s'attache trop au point de vue historique et qu'on ne tire pas tout ce qui pourrait l'être du point de vue synthétique final. La formule, forme extrême du langage, en quelques lettres, exprime notre compréhension des nombreux faits physiques qui y sont impliqués, et ceci de la façon la plus simple.

Ceci n'est évidemment pas vrai à tous les stades du développement de l'intelligence. Un très jeune enfant pourra, à la rigueur, comprendre la règle du carré exprimée en langage ordinaire, alors que, pour lui, la formule serait incompréhensible, et plus tard ce sera l'inverse.

Mais, dans beaucoup de cas, dans les Mathématiques Supérieures en particulier, il n'y a pas de formules résumant tout ce qui est nécessaire à l'expression de la pensée ; il faut joindre quelques phrases aux formules. Sans doute est-ce là une des difficultés que rencontrent les étudiants qui ont à retenir, non seulement des formules, mais un certain nombre de phrases.

Un exemple est donné par la définition de la continuité d'une fonction en un point. Cela peut s'exprimer en formules, dans le langage de Peano. Mais ces formules ne disent rien de plus ; ce n'est pas parce qu'on aura écrit  $\forall$  pour « quel que soit » et  $\exists$  pour « il existe », qu'on aura mieux compris (même si  $\forall$  et  $\exists$  sont plus rapides à écrire. Il y a un effort à faire pour formuler :

« Quel que soit un nombre  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un nombre  $\eta$  strictement positif tel que, pour tout  $x$  compris entre  $\eta_0 - \eta$  et  $\eta_0 + \eta$  on ait

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon. »$$

Il y a loin de la formule idéale  $(a + b)^2$ . Il faut se rappeler et la signification et l'expression : c'est faire une construction logique qui ne cessera jamais de demander de la réflexion.

Cette connaissance du langage scientifique, indispensable aux étudiants de nos Facultés, est un des objets de l'Enseignement du Second Degré. Là encore, j'insiste sur la nécessité d'un nombre d'heures indispensable pour que les élèves moyens se familiarisent avec ce langage. Il y a là, d'ailleurs, un problème en relation avec l'apprentissage de la langue, et il faut alerter les professeurs de lettres. Quand l'étudiant éprouve des difficultés pour définir la continuité, il montre aussi qu'il ne comprend pas bien des phrases énoncées. Les professeurs de lettres insistent sur la formation du style, ou sur la langue littéraire ou poétique : les mots, les phrases, doivent y avoir un pouvoir suggestif. Ce n'est pas mauvais en soi, mais c'est le contraire du langage scientifique où ce qui est écrit ou dit doit avoir la même signification pour tout le monde. L'apprentissage de ce langage doit être fait par le professeur de Mathématiques et celui de physique, mais aussi par le professeur de

français, à partir d'exemples tirés de la vie courante, en insistant sur l'architecture de la phrase, sur sa structure, sur sa signification précise, plutôt que sur le style.

On est frappé par les lacunes de nos étudiants, en Faculté, quant au langage scientifique. Regardons, par exemple, ce qu'est la négation d'une proposition. Reprenons la définition de la continuité d'une fonction, donnée plus haut, et écrivons-la sous la forme symbolique habituelle aujourd'hui :

(I)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$  tel que,  $\forall x$  vérifiant  $|x - x_0| < \eta$ , on ait  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ .

(Je crois d'ailleurs que, pour les étudiants, il vaut mieux, au début, écrire la phrase au complet).

Ceci posé, demandons à un étudiant ce qu'est une fonction qui n'est pas continue au point  $x_0$ . Trop souvent, la réponse est confuse. Or je prétends que ce n'est pas un problème mathématique, mais une question de logique courante et de bon langage français. De nombreux exercices de négation d'une proposition, — même à partir d'une phrase banale comme : « j'emporte un parapluie quand il pleut » — seront utiles à tous ceux qui auront à faire des raisonnements par l'absurde où l'on commence par nier ce qu'on veut obtenir pour montrer ensuite que cette négation est contradictoire.

Il y a deux moyens de trouver la négation d'une proposition :

1° On peut réfléchir : la proposition directe commence par « quel que soit  $\varepsilon$ , il se produit un certain événement (si la fonction est continue) ». Donc si la fonction n'est pas continue, il existe un certain  $\varepsilon$  assez petit pour lequel l'événement ne se produit pas. Reste à voir ce qu'est cet événement et en prendre la négation. Or cet événement, c'est qu'il existe  $\eta$  tel que la propriété  $|x - x_0| < \eta$ , etc... La négation est, « il n'existe pas de  $\eta$  tel que la propriété ait lieu », ou encore, « quel que soit  $\eta$ , la propriété ne sera pas vraie ». Ce qui se produisait, c'était que, quel que soit  $x$  compris entre  $x_0 - \eta$  et  $x_0 + \eta$ , on avait... Cela ne se produira pas : donc il existera une valeur de  $x$  comprise entre  $x_0 - \eta$  et  $x_0 + \eta$ , qui entraînera l'événement contraire de ce qui était énoncé d'abord, soit  $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ .

Un tel énoncé demande un effort soutenu ; il est facile de s'embrouiller et on s'embrouille trop souvent.

2° On peut parvenir simplement au résultat en appliquant une règle de logique : pour former la négation d'une proposition, on peut permuter les expressions « quel que soit » et « il existe » (donc les signes  $\forall$  et  $\exists$ ), et remplacer l'ancienne conclusion par son contraire, soit :

(I')  $\exists \varepsilon > 0$ , tel que,  $\forall \eta > 0, \exists x$  vérifiant  $|x - x_0| < \eta$ , tel que  $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ .

Si les étudiants ne parviennent pas facilement à énoncer cela, c'est qu'on ne leur a pas assez fait remarquer les règles de la négation. Problème de langage mathématique, mais problème de langage courant aussi et qui devrait être étudié par le professeur de Mathématiques et par le professeur de français. Il y a d'ailleurs des remarques à ce sujet dans Platon, car les philosophes grecs s'exerçaient à nier les propositions. Nos élèves doivent savoir nier une proposition, à la fois en réfléchissant, parce qu'ils doivent être capables de s'expliquer, et aussi sans réfléchir, mais en appliquant strictement la règle. De même, dans une suite d'additions et de soustractions algébriques

$$a - \{ b - [c - (d - e)] \},$$

on peut réfléchir pour savoir si, finalement,  $e$  s'ajoute ou se retranche. Mais il y a une règle simple de la parité du nombre de signes « moins » (ici quatre) qui permet de conclure ( $e$  s'ajoute). L'enfant ou l'homme de la civilisation prémathématique n'avait pas vu ces règles qui sont une économie de pensée.

De la même façon, nous pouvons préciser le sens de cette phrase tirée d'un article de journal au sujet de l'arbitre dans une compétition sportive : « Personne ne refusera de nier que l'arbitre n'ait pas été injuste. » Je ne sais pas si l'auteur de la

phrase voulait exactement dire ce qu'on peut comprendre. Mais appliquons la règle du décompte des négations : 1° personne *n'* (le professeur de latin montre que personne se traduit en latin, soit par *personne*, soit par *quelqu'un* ; cela montre que le décompte des négations en français n'est pas chose facile ; raison de plus pour y insister) ; 2° refusera ; 3° nier ; 4° n'ait pas été ; 5° injuste, qui sont respectivement les négations de : 1° quelques-uns ; 2° acceptera ; 3° affirmer ; 4° n'ait été ; 5° juste. Il y a cinq négations, donc la phrase signifie que l'arbitre a été trouvé injuste.

L'élève de Mathématiques devra donc être rompu au décompte des négations et des affirmations. Mais il n'y a évidemment pas que cela. La place des expressions dans une phrase est très importante. Et pourtant on voit aussi des étudiants placer indifféremment les « quel que soit » avant ou après les « il existe ». Voyez ce que cela donne si, dans la définition (I) de la fonction continue, on inverse le  $\forall$  et le  $\exists$  du début :

(I'')  $\exists \eta$  tel que,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall \eta$  vérifiant  $|x - x_0| \leq \eta$ , on ait  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ .

Cela signifie que la fonction est constante dans l'intervalle  $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$  puisque  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ , quel que soit  $\varepsilon$ , donc égal à zéro : cela signifie donc que  $f$  est constante dans un voisinage convenable de  $x_0$ .

Ce serait donc un bon exercice pour les élèves qui étudient cette question pour la première fois d'examiner toutes les phrases qu'on peut obtenir en changeant la place des mots ; le sens de la phrase (I) apparaîtra alors plus clairement.

Prenons un autre exemple, celui de la convergence simple et celui de la convergence uniforme d'une suite de fonctions, énoncés qui ne diffèrent que par la simple interversion d'un « il existe », et d'un « quel que soit ». La convergence simple de la suite des  $f_n(x)$ , vers  $f(x)$  pour  $n$  infini s'exprimera symboliquement :

(II)  $\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que  $\forall n \geq N$ , on ait  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

La convergence uniforme : si, quel que soit  $\varepsilon$ , il existe un  $N$ , le même pour tous les  $x$ , soit :

(II')  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que,  $\forall x, \forall n \geq N$ , on ait  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

La seule différence entre ces deux phrases est que le « quel que soit » est placé de la première place dans (II) à la troisième dans (II').

De tels exercices, certainement profitables et efficacement formateurs, devraient être faits, sinon au niveau de la Quatrième, tout au moins dans les classes supérieures. Cela pourrait être préparé par des exercices de pure rédaction portant sur des résultats simples ou des exercices déjà bien compris. Là encore, il faut insister que pour faire ce travail, il faut disposer, en classe, d'un temps suffisant, car ce n'est pas à 18 ans que tous les scientifiques, dont nous avons besoin, doivent être rompus aux mécanismes de base.

Les incorrections de langage doivent donc être pourchassées. Non seulement chez les élèves, mais aussi dans les Mathématiques courantes elles-mêmes où elles sont souvent suggérées par les mots s'ils ont, en Mathématiques, un sens différent du sens usuel. Le mot *translation* évoque inévitablement un « mouvement » et non une transformation géométrique. Mieux vaudrait pour celle-ci utiliser un mot qui n'ait pas d'autre signification, au lieu d'employer une expression française ayant un sens ambigu. De même pour *déplacement* qui, en général, signifie l'ensemble de l'acte avec tous ses intermédiaires de son début à son terme, alors qu'en géométrie on l'utilise justement dans une autre acception.

On emploie de même indifféremment les mots famille, système, catégorie, groupe. Pourquoi ne pas choisir et s'en tenir à un seul mot.

Plus grave est l'ambiguïté de notations raccourcies, celle des fonctions composées, par exemple. Que signifie  $f'(2x)$  ? Est-ce la dérivée de la fonction  $x \rightarrow f(2x)$ , ou la valeur de la dérivée de la fonction  $f$  pour la valeur  $2x$  de la variable ? Les

expressions complètes sont claires, on ne peut les confondre ; mais la notation raccourcie est ambiguë.

Il faut bannir des expressions telles que « augmente indéfiniment », d'abord parce qu'il y a « augmente », et parce que, en énonçant trop brièvement deux propriétés, on risque d'en laisser une dans l'ombre. C'est bien le cas du lemme d'Abel où on peut correctement dire « si  $u_n$  décroît constamment et tend vers zéro » ; mais on risque de ne retenir que la deuxième condition. Mieux vaudra insister, grâce à une phrase plus longue : « Si  $u_n$  satisfait aux deux conditions suivantes : a)  $u_n$  décroît constamment, b)  $u_n$  tend vers zéro... » ; l'élève sera frappé par le chiffre deux et n'oubliera pas.

Il y a aussi beaucoup de confusion dans la terminologie relative aux équations et aux identités. Une identité peut être vraie ou fausse, on ne retient évidemment que les identités qui sont vraies ; mais avant d'en étudier une, on ne sait si elle est vraie ou fausse. Ainsi :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{est vraie ;} \\ (a + b)^3 &= a^3 + b^3 && \text{est fausse.}\end{aligned}$$

Il s'agit toujours de vérifier si ce qui est écrit, oui ou non, est vrai pour toutes les valeurs des lettres.

Quant à une équation, ou bien elle a une ou plusieurs racines, ou bien la solution est indéterminée (et si elle est vérifiée, quel que soit  $x$ , elle est une identité), ou bien elle n'a pas de solution. Dans tous les cas, il s'agit de trouver les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Prenons garde au mot *existence*, pas toujours employé en Mathématiques comme dans le langage courant. On le voit bien quand on introduit le ou les points à l'infini. Cette existence est pure convention, et non existence réelle, ainsi que le montre bien la pluralité des attitudes possibles : dans le plan euclidien, il n'y a pas de point à l'infini ; dans le plan de la géométrie projective, les points à l'infini sont sur une droite ; dans le plan de la géométrie anallagmatique, il y a un point à l'infini (et les élèves de Mathématiques Élémentaires constatent l'avantage qu'il y a à l'introduire). Voilà une belle occasion d'éveiller l'intelligence des élèves sur le sens du mot « exister ».

On ne se méfie pas assez des faux amis. On croit qu'un signe déjà connu peut être employé sans justification hors du domaine où sa première signification a été bien définie. Lorsqu'on définissait, autrefois, un nombre complexe par le symbole  $a + bi$ , on oubliait que les signes  $+$  et  $.$  n'ont aucun sens avant qu'on ait défini les opérations d'addition et de multiplication. Mais du fait qu'on avait écrit  $a + bi$ , on oubliait la nécessité de définir correctement ces opérations. On évite la faute, aujourd'hui, en introduisant les symboles  $(a, b)$  et sur l'ensemble de ces symboles, on définit une addition et une multiplication.

Mais la faute persiste dans d'autres cas. Soit, par exemple, la définition de l'intégrale curviligne dont le symbole est  $\int_r A dx + B dy + C dz$ . Que faut-il définir ? Est-ce le symbole  $\int$ , la courbe orientée  $(\Gamma)$  ou l'expression

$$A dx + B dy + C dz ?$$

Que signifient ces signes  $+$  ? Dans  $A dx$  que signifie ce signe  $.$  et la multiplication de ce  $A$  par la différentielle de la fonction  $x$  ? Même si l'on se dit que « provisoirement le symbole n'a pas de signification », il est si compliqué qu'on ne sait plus ce qui est à définir et ce qui ne l'est pas et on se laisse tromper par les analogies. Il faudrait, comme pour les nombres complexes, écrire  $\int_r (A, B, C)$ , puis définir ce qui est écrit  $(A, B, C)$ , c'est-à-dire une forme différentielle. Soit un ensemble de trois fonctions vérifiant des conditions pour que la forme soit intégrale, par exem-

ple  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des fonctions continues. On définira ensuite l'addition des formes différentielles, soit :

$$(A, B, C) + (A', B', C') = (A + A', B + B', C + C') ;$$

on définira ensuite les formes différentielles qui se trouvent être la différentielle d'une fonction ou

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

puis la multiplication de la forme différentielle  $(A, B, C)$  par la fonction  $g$

$$(A, B, C)g = (Ag, Bg, Cg).$$

Alors seulement il est permis d'écrire une forme différentielle  $A dx + B dy + C dz$  ; ce n'est pas amusant du tout. Il reste à définir son intégrale sur une courbe orientée. On pourra utiliser une représentation paramétrique, à condition de montrer que le résultat est indépendant de la représentation paramétrique choisie, et enfin montrer que l'intégrale de la différentielle de  $f(x)$ , c'est  $f(x_2) - f(x_1)$ .

Il y a une grave lacune si on ne dit pas tout cela ; c'est fâcheux du point de vue mathématique, car on rend toute démonstration correcte impossible. Et, pourtant, une définition correcte rendrait les plus grands services aux physiciens, car ce qu'on appelle travail élémentaire, ce n'est pas un  $d\mathcal{Q}$ , c'est une forme différentielle  $A dx + B dy + C dz$ , où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les trois composantes de la force. Et dans un champ de force, ce qu'on appelle circulation du vecteur-champ, sera l'intégrale  $\int_{\Gamma} A dx + B dy + C dz$  ainsi correctement définie.

\*\*

En conclusion, je voudrais retoucher tout ce que je viens de dire. Nous avons souligné l'importance du langage, de la correction, de la rigueur, de la mise au point de la rédaction. Mais il ne faut pas assommer l'enfant par trop d'exigence brutale et instantanée de rigueur et de correction. Il faut développer l'intuition. Car, au fond, comment trouve-t-on un problème ? Ce n'est pas par un raisonnement rigoureux. On voit rapidement, de façon non rigoureuse et, éventuellement, on peut se tromper. Mais, quand on croit avoir trouvé, on assure la solution en la mettant sous une forme rigoureuse (on s'aperçoit des erreurs à corriger, des améliorations à apporter). Cette méthode est vraie pour les élèves comme pour les grands mathématiciens. Cela ne signifie pas qu'il faut préparer tout de suite nos élèves à la découverte, mais il ne faut surtout pas les stériliser et ils auront aussi à trouver leurs problèmes.

Tous les procédés sont donc permis au premier stade de la recherche : trois points paraissent-ils se placer sur une droite ? Nous penserons qu'ils sont alignés. On ne trouvera pas un lieu géométrique sans l'examen de quelques cas particuliers. Il faut laisser s'exprimer toutes les idées ; est bon ce qui mène au résultat. Etape « sauvage » où il faut laisser libre cours à ses instincts. Ce n'est qu'après, la découverte faite, qu'on pourra, qu'on devra rechercher le maximum de rigueur.

Mais on ne peut développer l'aspiration à la rigueur sur n'importe quoi. L'âge des élèves intervient ici directement. A un enfant qui n'a jamais fait de géométrie, on peut faire construire les médianes d'un triangle et lui faire comprendre sur cet exemple la valeur de la certitude que, seule, une démonstration peut donner. La rigueur apparaîtra alors ce qu'elle est, un outil qui permet d'être bien sûr de ce qu'on sait, et non pas un sujet de tracasserie pour les élèves. On aura compris la *nécessité de la rigueur*.

Au contraire, si on veut présenter une théorie rigoureuse des fractions (ensembles de deux nombres  $p$  et  $q$  pris dans cet ordre qui...) à des enfants qui savent tant bien que mal les manipuler, on ne réussira qu'à les dégoûter des Mathématiques. Il

faut attendre un âge plus avancé où les élèves ressentiront le besoin d'une plus grande rigueur dans l'étude des nombres rationnels.

Autrement dit, je crois qu'il faut aller vite, surtout les débuts, où les exigences de rigueur ne peuvent pas être facilement comprises des débutants. On atteindra ainsi plus rapidement le domaine où l'exigence de rigueur apparaîtra bien à *tous* les élèves.

Même si certains élèves apprécient la démonstration de l'égalité de deux angles opposés par le sommet, j'accepterais volontiers cette propriété, évidente dans l'esprit de tous, pour avoir plus de temps pour les démonstrations qui intéressent tout le monde. Peut-on comprendre l'intérêt de la commutativité de l'addition des nombres relatifs tant qu'on n'a pas vu d'exemple d'opération non commutative.

Des exemples semblables seraient encore plus faciles à trouver dans tous les débuts de la géométrie et de l'espace. On ne comprend pas pourquoi le nombre 3 intervient (espace à trois dimensions) si l'on n'insiste pas sur l'axiome : « par trois points non alignés, il passe un plan et un seul ». Or, on a souvent l'ambition de démontrer que, par trois points non alignés, il ne passe qu'un seul plan, et, pour le faire, on admet que dans ce plan particulier, on peut appliquer tous les résultats démontrés dans la géométrie plane. Ce qui ne résulte pas du tout de la définition antérieure du plan dans l'espace ; le fait d'avoir employé le même mot « plan » dans la géométrie du plan d'Euclide et pour le plan dans l'espace, induit en erreur ; on admet que c'est la même chose, sans l'avoir, ou démontré, ou posé comme axiome.

En conclusion de cette discussion sur le langage, nous dirons qu'une fois stimulé l'esprit « sauvage » de la recherche, une fois la découverte acquise grâce à l'intuition, nous aurons le souci d'une formulation précise utilisant des formules et des mots parfaitement définis, d'une démonstration rigoureuse, et enfin d'une rédaction correcte.

L. S.

## Compte-rendu général des journées de Sèvres

(2-3-4 novembre 1956)

Les 2, 3, 4 novembre 1956 un stage a réuni au Centre International d'Etudes Pédagogiques de Sèvres : MM. les Inspecteurs généraux de Mathématiques, des professeurs français et quelques-uns de leurs collègues et amis de Grande-Bretagne, de Belgique, des Pays-Bas, de Suisse. M. le Directeur de l'Enseignement du Second Degré nous a exprimé son regret de ne pouvoir se rendre à Sèvres. Le stage s'est déroulé dans une atmosphère de sympathie grâce à l'hospitalité toujours accueillante de Mme l'Inspectrice générale HATINGUAIS, Directrice du Centre.

Les discussions passionnées, toujours amicales, qui ont suivi certains exposés, les longues conversations par petits groupes en dehors des séances, montrent assez l'importance des thèmes choisis pour ce Congrès :

- 1) la vision dans l'espace, problème de l'enseignement de la géométrie dans l'espace ;
- 2) les problèmes posés par l'initiation à l'algèbre ;
- 3) les Mathématiques : langage et symboles.

Avant d'aborder ces trois problèmes, nous entendons M. le Haut-Commissaire à l'énergie atomique, PERRIN. Il met l'accent sur la situation inquiétante dans laquelle se trouve notre pays, où une faible proportion de jeunes se dirigent vers des carrières scientifiques, alors que la technique prend une place de plus en plus importante dans notre monde moderne. *Notre enseignement des Mathématiques, nous dit M. PERRIN,*

*doit avoir un double rôle : il doit contribuer à la culture générale, il doit permettre la formation d'un plus grand nombre de scientifiques et préparer ces derniers à leur métier.*

*Pour que notre enseignement soit efficace, nous devons d'abord lutter contre le snobisme de l'ignorance scientifique et détruire des idées fausses, par exemple, chez certains, la conviction que l'automatisation n'engendre que des inconvénients : chômage, diminution de l'intérêt des ouvriers pour leur métier, etc... Il faut d'abord que chacun reconnaisse que la pénétration de la technique dans l'industrie, en entraînant une certaine libération de l'homme, contribue à rendre tout métier plus intéressant.*

Le premier rôle de notre enseignement sera plus sûrement rempli si cet enseignement ne comporte pas trop de ces questions abstraites qui rebutent tant d'élèves. Nous ne devons pas, non plus, trop croire à une rigueur prématurée, et nous devons faire, au début, de larges appels à l'intuition, sans dissimuler le rôle de l'intuition, sans vouloir faire croire à la construction d'un édifice rigoureux.

*En ce qui concerne les programmes, la place de la géométrie, — exercice de pensée passionnant, mais dont l'utilité est assez limitée —, pourrait être réduite, et celle de l'algèbre et de l'analyse accrue. Il faut faire acquérir aux élèves la connaissance de certaines grandes méthodes et des résultats essentiels des Mathématiques : cela peut et doit faire partie de la culture générale.*

*Le second rôle de notre enseignement est de former plus de techniciens et d'ingénieurs. Il faut, avant toute chose, diminuer le discrédit jeté sur les sciences et diriger les élèves moyens vers les sections scientifiques : un programme ne comportant pas trop de questions abstraites, en ne rebutant pas les élèves moyens, permettra de recruter les scientifiques de façon moins stricte. Il faut d'autre part songer sérieusement à une réforme de nos concours. Actuellement, rares sont les candidats reçus du premier coup à une grande école, les candidats malheureux recommencent leur préparation en Mathématiques Spéciales : nous manquons de professeurs et les meilleurs d'entre eux passent leur temps à répéter aux mêmes élèves les mêmes programmes pendant deux ou trois ans.*

Tels sont, mis en évidence par M. le Haut-Commissaire PERRIN, certains des problèmes actuels de l'enseignement des Mathématiques, problèmes qui seront bien souvent évoqués au cours des séances suivantes.

La matinée du 3 novembre est consacrée au problème de l'enseignement de la géométrie dans l'espace. M. BIGUENET (*professeur d'E.N.P.*), *parle des deux aspects du problème de la vision dans l'espace :*

1) la vision dans l'espace et la représentation des objets avant l'étude de la géométrie ;

2) la vision dans l'espace chez nos élèves de Première (classe du Baccalauréat) qui rencontrent pour la première fois la géométrie dans l'espace.

Il fait une analyse méthodique et approfondie des difficultés rencontrées par nos élèves et propose quelques remèdes. L'exécution de modèles par les élèves permet d'éliminer certaines difficultés. M. BIGUENET nous présente quelques modèles admirablement réalisés par des élèves des sections techniques. Dans ces sections, la collaboration entre professeur de Mathématiques et professeur de Technique est indispensable, car la vision dans l'espace est nécessaire pour certaines techniques (modeleurs, dessinateurs, etc...). L'enseignement concret est certes plus facile, plus accessible, mais il n'est pas prolongeable, nous dit M. BIGUENET, qui reconnaît la supériorité incontestable de l'abstraction. Aussi termine-t-il son exposé en émettant un vœu, formulé également par de nombreux collègues :

- faire une étude concrète des solides dans le premier cycle ;
- faire ensuite une étude abstraite qui pourrait être répartie sur deux ans.

M. JÉRONNEZ apporte quelques précisions sur l'enseignement de la géométrie

dans l'espace en Belgique. Les modèles utilisés sont construits par les élèves, car l'intérêt des élèves est beaucoup plus éveillé par des modèles qu'ils ont construits eux-mêmes. L'action sert de motivation à l'abstraction. *Le programme de géométrie commence par l'étude des solides à l'aide de ces modèles et la liaison plan-espace est toujours conservée.* Il ne faut pas dissimuler les difficultés : maladresse manuelle de certains élèves, incapacité parfois d'obtenir une précision suffisante. Le travail par équipes permet d'y remédier et évite le découragement de l'élève maladroit, plus à l'aise dans les questions abstraites. Il faut surtout que l'élève moyen reçoive un enseignement efficace et ce but peut être atteint avec l'utilisation des modèles.

M. SERVAIS (Belgique) analyse les difficultés de la vision dans l'espace et étudie la prise de conscience de la structure spatiale par l'enfant. Cette étude le conduit à préconiser un enseignement de la géométrie dans l'espace, actif jusqu'à 15 ans, et déductif après 15 ans.

L'après-midi du 3 novembre est en partie consacrée à l'exposé de M. le Professeur SCHWARTZ (Sorbonne) sur le sujet : « *Mathématiques, Langage et Symboles* ».

Au cours de la discussion qui suit cet exposé, les avis sont très partagés. Les défenseurs de la rigueur ont des adversaires. Comment, disent ces derniers, pouvons-nous exiger une grande rigueur de nos élèves dans les raisonnements qui reposent sur des axiomes, peut-être contestables, et dans l'établissement desquels l'intuition a eu une si grande part ? Ces professeurs préfèrent un enseignement plus intuitif où les élèves travaillent, comme le dit M. GATTEGNO, « avec leurs outils, sur des situations à leur niveau ». Quant à la collaboration avec les professeurs de Lettres, elle paraît à certains fort difficile à réaliser ? N'y a-t-il pas une grande différence entre le style concis des Mathématiques et les « développements littéraires » ? Cette coordination, pourtant effective dans certains établissements, est une des préoccupations actuelles de beaucoup de professeurs, et M. WALUSINSKI pense que l'objection serait écartée si les professeurs de Lettres faisaient faire, en plus des dissertations, rapports et comptes rendus.

Le 4 novembre, notre Collègue ITARD (Professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Henri-IV, membre correspondant de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences) fait, sur « *L'Algèbre au XVI<sup>e</sup> siècle* », un intéressant et vivant exposé dont il a bien voulu rédiger ici un bref résumé :

La causerie n'avait d'autre but de montrer sur quelques exemples, quelle fut l'évolution, plus exactement la révolution, de l'algèbre entre 1550 et 1600 environ.

Quelques pages d'algébristes, français pour la plupart, ce choix n'étant dû qu'aux commodités offertes par la Bibliothèque Nationale, ont été projetées en vues fixes.

Les plus anciennes étaient extraites de *l'Algèbre*, en français, de Jacques PELETIER, du Mans, ouvrage imprimé à Lyon en 1554. La notation est la notation cossique de STIFEL, avec emploi de plusieurs lettres pour désigner les inconnues dans les problèmes à plusieurs variables. Le calcul algébrique sur les polynômes est déjà très développé.

La notation de Jean BORREL, dans sa *Logistique latine*, de 1559, est originale. Les équations à plusieurs inconnues sont bien mises en évidence, et, fait très rare pour l'époque, apparaît un signe d'égalité. Le signe actuel  $=$  naissait vers la même époque en Angleterre.

Guillaume GOSSELIN, de Caen, un des premiers mathématiciens qui s'intéresse à DIOPHANTE, a, dans son *Ars Magna*, de 1577, une notation où se sent l'influence de l'algébriste grec.

Mais, à cet égard, c'est Raffaello BOMBELLI, qui, dans son *Algebra*, en italien, de 1572, est le plus intéressant. La page qui fut projetée correspond à la résolution d'une équation du troisième degré. C'était à l'époque une découverte récente, quarante ans environ de la science italienne. La notation de BOMBELLI est surtout intéressante par

l'utilisation des exposants numériques. Elle appartient à une tradition qui remonte au moins au Français Nicolas CHUQUET (fin du xv<sup>e</sup> siècle), et qui se prolonge après BOMBELLI chez le Flamand STEVIN.

Les dernières vues, extraites d'un ouvrage posthume de VIÈTE (1615) montrent la naissance des Mathématiques modernes : calcul littéral, permettant de calculer, tant sur les données que sur les inconnues, emploi systématique des formules, clarté du symbolisme qui se suffit à lui-même et comporte sa propre preuve.

Cet exposé n'a pas pour intention de préconiser un enseignement historique de l'algèbre. Mais, alors, *Comment devons-nous donc initier les élèves à l'algèbre ?* C'est le sujet de la discussion qui suit, discussion, il faut le dire, un peu sacrifiée en raison de l'heure tardive. Tout le monde reconnaît la nécessité d'assurer de solides bases d'arithmétique. Il faut toujours « favoriser, par des exercices variés, la prise de conscience opératoire », nous dit M. SERVAIS. Il faut surtout sans cesse utiliser les erreurs de nos élèves, faire l'inventaire de ces erreurs, les analyser pour rendre notre enseignement plus accessible, donc plus efficace.

Ainsi que le révèle le compte rendu qui précède, les discussions furent souvent animées. Une question, cependant, faisait toujours l'unanimité chez les professeurs français : celle de l'insuffisance des horaires de Mathématiques dans toutes les classes de l'Enseignement Secondaire. Les professeurs français écoutaient avec envie leurs collègues belges parler de leurs horaires. Que de beaux projets, pour mettre à profit le bénéfice d'un stage comme celui-ci... avec des horaires plus généreux !

A. MARCHAND (*Lycée de Sèvres*).

---

## RECHERCHE ET ENSEIGNEMENT : UN GRAVE PROBLÈME DE RECRUTEMENT

Une récente circulaire (du 12-1-1957), émanant de la Direction de l'Enseignement du Second Degré, oblige désormais tous les candidats à l'Agrégation à signer l'engagement, en cas de succès, d'enseigner dans un Lycée, pendant 5 ans au moins, dès la rentrée scolaire suivant le concours. Je passe sur les modalités qui font, qu'en cas d'empêchement majeur (parmi lesquels figurent les obligations militaires), le candidat s'engage à rester, pendant un an après la cessation de cet empêchement, à la disposition de l'Enseignement du Second Degré, en attendant que celui-ci lui accorde un poste. Je passe aussi sur le fait que cet engagement n'est compensé par aucun avantage, tel que : bourse d'études, admission dans une Cité universitaire, etc... Mais je voudrais attirer l'attention sur les conséquences dangereuses pour la vie scientifique de la Nation, et plus encore pour l'Enseignement du Second Degré lui-même, que cette mesure, en apparence normale et régulière, mais aggravant des difficultés antérieures, ne manquerait pas d'entraîner.

Cette circulaire ne peut, en effet, avoir d'autre but que de récupérer, au profit de l'Enseignement du Second Degré (1), les quelques agrégés qui, chaque année, entraient au C.N.R.S. (Centre National de la Recherche Scientifique), pour devenir, dans la plupart des cas, des professeurs de l'Enseignement Supérieur. Et, parmi les candidats ainsi visés, figurent en premier les élèves des Ecoles Normales Supérieures

---

(1) Certes, la circulaire prévoit bien des dérogations, mais insiste sur leur caractère tout à fait exceptionnel, et il est prévu de ne les accorder qu'après les résultats du concours.

tenus, par un règlement intérieur, de passer le concours d'Agrégation. Cette circulaire est donc en contradiction avec le décret du 4 juillet 1956 (toutefois moins libéral que celui du 22 août 1854), qui précise que ces Ecoles préparent aussi à la Recherche.

Or, il faut savoir que la Recherche Scientifique exige de plus en plus de connaissances préliminaires, de facultés d'assimilation et d'adaptation, qui requièrent un esprit jeune. Il n'est donc guère souhaitable de l'aborder après l'âge de 29 ou 30 ans, qui serait celui d'un agrégé ayant satisfait à ses obligations militaires et professionnelles. Il est d'ailleurs à craindre que de nouvelles circulaires ne viennent encore allonger la durée du stage obligatoire dans l'Enseignement du Second Degré (durée antérieurement fixée à deux ans), jusqu'au moment où les candidats à la Recherche devront attendre le jour de leur retraite pour réaliser leur vocation.

Certes, le but poursuivi, de donner un plus grand nombre d'agrégés à l'Enseignement du Second Degré est louable, mais il ne faut pas oublier que l'Agrégation a, jusqu'à présent, été considérée, non seulement comme un concours de recrutement des professeurs de Lycée, mais aussi comme un diplôme (2), dont beaucoup s'enorgueillissent, qui n'ont jamais enseigné dans un Lycée. Puis-je rappeler, en particulier, qu'en Mathématiques pures, le corps des chercheurs, qui coïncide presque exactement avec celui des professeurs, ou futurs professeurs de l'Enseignement Supérieur, est actuellement formé en grande partie de Normaliens agrégés ? Et c'est pour ne pas concurrencer le recrutement des maîtres du Second Degré, que le C.N.R.S. a, jusqu'ici, en Mathématiques pures, adopté dans la plupart des cas, et malgré les difficultés qu'il se créait ainsi, la règle de n'accorder de bourses de recherches qu'aux candidats agrégés.

Examinons maintenant les conséquences de la mesure qui vient d'être prise :

1° Si la coercition réussit, l'Enseignement du Second Degré retire à la Recherche Scientifique et à l'Enseignement Supérieur, quatre ou cinq mathématiciens et quelques autres agrégés scientifiques, sans résoudre pour autant le problème angoissant de son recrutement.

En dehors des conséquences scientifiques désastreuses impliquées par ce détournement, l'Enseignement du Second Degré y perd lui-même les Maîtres qui auraient, dans les années futures, formé les licenciés et les agrégés dont il a besoin. Il est peut-être tentant, mais catastrophique, en cas de disette, de dévorer jusqu'à la semence qui devrait être réservée pour les moissons futures.

2° La Recherche Scientifique et l'Enseignement Supérieur se recrutent désormais complètement en dehors du corps des agrégés, ce qui est parfaitement concevable, mais implique :

a) Le C.N.R.S., recrutant les chercheurs au niveau de la licence, devient un rival beaucoup plus dangereux pour l'Agrégation.

b) L'Agrégation, conçue exclusivement comme un concours de recrutement du Second Degré, perd une grande partie de sa valeur et de son prestige.

c) L'Enseignement Supérieur ne comportant plus d'agrégés, se désintéresse totalement de la formation des professeurs du Second Degré, dont il s'est occupé, jusqu'ici, avec compétence et dévouement.

3° Le passage inverse, de la Recherche à l'Enseignement du Second Degré, n'est plus accompagné des garanties professionnelles que donne l'Agrégation pour l'exercice de ce métier infiniment délicat qu'est l'enseignement. Or, il importe que l'on trouve dans l'Enseignement du Second Degré, des professeurs et des inspecteurs

---

(2) Les qualifications du personnel des Facultés des Sciences tiennent compte du titre d'agrégé ; le Ministère lui-même a établi des échelons indiciaires propres à la catégorie des « assistants agrégés » qu'il place au-dessus de celle des assistants licenciés ou docteurs.

généraux dont l'horizon dépasse les programmes de la classe de Mathématiques Spéciales.

4° A ces conséquences matérielles, s'ajouterait enfin le préjudice moral considérable que cette mesure de coercition causerait à l'Agrégation elle-même.

Est-ce à dire que nous devons, en demandant que cette mesure soit rapportée, nous résigner à voir mourir en France cet Enseignement du Second Degré dont nous sommes fiers à juste titre, et le titre d'Agrégé, si universellement estimé ? Non, car une analyse de la crise actuelle et des erreurs qui ont été commises, me paraissent pouvoir suggérer des remèdes plus efficaces qu'une mesure partielle et dangereuse.

### Le recrutement des agrégés

La désaffection de notre jeunesse à l'égard de toutes les carrières universitaires a des causes multiples, bien connues de mes lecteurs : l'insuffisance des traitements, les classes surchargées, entassées dans des locaux vétustes et souvent dangereux, les horaires absurdes imposés par le manque de salles, l'obligation pour certains d'enseigner des disciplines qui ne sont pas les leurs, sans parler de la désinvolture avec laquelle les bureaux de l'Education Nationale traitent parfois ceux en qui ils devraient respecter la dignité de la fonction enseignante. Il ne faut certes pas s'étonner si les jeunes désertent l'enseignement au profit de carrières respectées et mieux rémunérées, dont les inconvénients ne leur apparaîtront peut-être que plus tard. Mais sachons reconnaître tout d'abord que le véritable concurrent pour le recrutement des professeurs scientifiques de l'Enseignement du Second Degré n'est, ni la Recherche Scientifique, ni l'Enseignement Supérieur, comme tend à le faire croire la Circulaire du 12 janvier : quelle que soit leur utilité sur le plan national, ce sont les Grandes Ecoles scientifiques qui, séduisant nos meilleurs élèves de sciences par la promesse d'un avenir brillant, et d'une situation sociale considérée, tarissent maintenant le recrutement des professeurs de Sciences de toutes catégories. Aussi est-il curieux de constater qu'une des grandes craintes de l'Inspection générale est de voir disparaître, faute de professeurs, ces classes de Mathématiques Spéciales qui, justement, détournent de la carrière universitaire, de la Recherche, et même souvent de toute carrière scientifique, les sujets les mieux doués en Sciences. Cette crainte est paradoxale, si l'on se place au point de vue strictement égoïste du recrutement de l'Enseignement du Second Degré ; car, si les bacheliers étaient obligés de préparer en Faculté les concours des grandes écoles (ce qui devrait être concevable), ils y perdraient sans doute la possibilité d'acquérir un entraînement précieux que nos propédeutiques surchargées ne peuvent peut-être leur donner à l'heure actuelle ; mais il est probable qu'un certain nombre de ces jeunes gens se détourneraient de leur but primitif pour préparer une thèse ou un professorat.

Si l'Enseignement du Second Degré veut des professeurs, il faut qu'il prenne conscience de sa responsabilité dans l'orientation des jeunes bacheliers, et qu'il n'envoie pas systématiquement les meilleurs vers les Ecoles où ils seront perdus sans retour pour lui. Mises à part les E.N.S., qui ne sauraient fournir tous les professeurs dont on a besoin, les Facultés sont les seuls organismes susceptibles de rendre un jour à l'Enseignement du Second Degré, comme professeurs, les bacheliers qui leur sont confiés.

Il est donc aussi paradoxal que la connaissance formelle du cours de Mathématiques Spéciales soit considérée comme la première chose à exiger d'un candidat à l'Agrégation de Mathématiques : cela aboutit en fait à éliminer ceux des candidats qui ne sont pas passés par les classes de Spéciales. Or, mis à part le cas des normiens, le « taupin » devenu étudiant de Faculté et candidat à l'Agrégation ne peut être qu'une exception.

Si l'on veut que le bachelier, devenu étudiant de Faculté, puisse atteindre l'Agré-

gation, faudrait-il encore qu'on lui laisse accomplir une scolarité normale. Or, depuis des années, l'Enseignement du Second Degré mange son blé en herbe, et il ne doit point s'étonner si la moisson d'agrégés est maigre. Car ces candidats à l'Agrégation dont les Jurys déplorent chaque année la faiblesse, sont, pour la plupart, des professeurs de Lycées ou de Collèges, surchargés de cours et de copies : rappelons que 38 agrégés seulement ont pu être admis, au dernier concours, alors qu'il y avait plus de 100 postes vacants. Et l'on peut penser qu'il n'aurait servi à rien d'allonger la liste, les candidats « collés » étant déjà presque tous des enseignants.

Ce point de vue, pourtant, serait cruel et maladroit. Ceux qui connaissent un peu les milieux étudiants savent en effet que rien ne détourne autant les jeunes licenciés de préparer l'Agrégation que le spectacle de leurs aînés échouant en masse au concours. Et je connais telle grande Faculté de province où, après un certain nombre d'échecs retentissants, le nombre des candidats est pratiquement, cette année, tombé à zéro. Or il est bien difficile d'affirmer que, dans un concours, même d'Agrégation, tous les candidats valables ont été détectés. Car il faut savoir ce qu'est une série de quatre compositions de sept heures chacune, pendant lesquelles on travaille jusqu'au vertige, pour comprendre l'inhibition, chez un grand nombre de candidats, des facultés de réflexion et de discernement, qui, justement, leur sont réclamées. Et il faut reconnaître que l'enseignement de nos Facultés, qui reste avant tout un enseignement de culture, n'entraîne guère les candidats à ce genre de compétition. Osons dire ici que nombre de candidats valables restent chaque année sur le carreau, pour des raisons diverses, dont la principale est qu'ils n'ont pas été suffisamment « chauffés » pour le concours.

Certes, il est relativement facile d'organiser une bonne préparation au concours pour un groupe d'étudiants homogènes, qui peuvent se consacrer entièrement à leurs études, et résident sur place, comme c'est le cas dans les E.N.S., et aussi quand le personnel enseignant est en nombre suffisant. Mais rien n'est plus décevant pour les professeurs des Facultés de province, que ces cours d'Agrégation devant un petit nombre d'étudiants de niveaux très divers, qui viennent, une fois sur deux, n'ont pas le temps de rédiger de problèmes, et oublient peu à peu tout ce qu'ils avaient appris pendant leurs années de licence.

Car nos étudiants sont sollicités de façon extrêmement pressante, dès leur licence terminée, souvent même avant, et au plus tard après leur premier échec à l'Agrégation, pour occuper des postes d'enseignement, souvent situés à trois ou quatre heures de train de la ville de Faculté où ils poursuivent leurs études. C'est pour tenir compte des possibilités de ces étudiants, qui constituent la majorité, que les cours d'Agrégation sont « tassés » entre le mercredi après-midi et le jeudi soir, sans d'ailleurs que tous puissent y assister. Et ceux mêmes qui les suivent n'ont pas le temps matériel de travailler par eux-mêmes. Quel résultat attendre d'une assistance passive aux cours ? Il tend à se créer, dans ces centres de préparation provinciaux, une atmosphère de découragement qui influence même ceux qui travaillent dans de meilleures conditions matérielles.

Or, il est bien difficile à un étudiant de condition modeste de refuser le poste qu'on lui offre si prématurément, et il est certain qu'à l'heure actuelle, nos Lycées et nos Collèges ne pourraient fonctionner sans l'appoint fourni par les étudiants. Nous sommes donc loin de pouvoir réaliser la solution idéale qui, comme le dit si justement le dernier rapport d'Agrégation, serait de permettre à tous les licenciés, titulaires d'un diplôme d'études supérieures, de préparer l'Agrégation sans avoir à enseigner. Cependant, les I.P.E.S. viennent d'être créés pour jouer ce rôle vis-à-vis du C.A.P.E.S. Mais il est à craindre que ces I.P.E.S. ne détournent encore plus nos étudiants de l'Agrégation ; car, en dépit des Circulaires les invitant à le faire, je n'ai jamais vu un étudiant de C.A.P.E.S. suivre un cours d'Agrégation, et l'obligation de passer le C.A.P.E.S. avant l'Agrégation, et même avant le diplôme d'études supérieures, à

laquelle est subordonné l'emploi des bourses, ne pourra que porter un grave préjudice à l'Agrégation.

En attendant une solution idéale au problème des bourses, il serait juste que l'on donne au moins, à ces malheureux étudiants-professeurs, des facilités qui leur permettent de terminer leurs études. Ne pourrait-on concevoir, par exemple, que dans le voisinage des villes de Faculté, quelques postes leur soient réservés, où ils pourraient, pendant deux ou trois ans, bénéficier d'horaires d'enseignement réduits et de facilités pour assister aux cours de la Faculté ? Ne pourrait-on aussi tenir compte du fait que, pour ces candidats, le mois de juin, qui est celui du concours, est aussi le plus chargé en travail de classe, et créer à leur intention une session d'automne, qui bénéficierait du travail et de la réflexion des vacances ?

Peut-être ne serait-il pas mauvais de rétablir, sous une forme plus large, ces « stages d'Agrégation », dont le principe ne paraissait pas si mauvais, mis à part le fait qu'ils s'accompagnaient de l'obligation d'assister en priorité à des conférences dites « pédagogiques », dont certaines étaient sans rapport avec la matière enseignée, et qui, comme par hasard, empêchaient les stagiaires d'assister à une partie des cours d'Agrégation.

Pour terminer, je rappellerai que le règlement des I.P.E.S. prévoit, lui aussi, un engagement de service dans l'enseignement public. Je n'ai rien à dire contre le principe de cet engagement, parfaitement justifié ici, puisqu'il est la contre-partie d'avantages matériels importants, ce qui n'est pas le cas de l'engagement exigé par la Circulaire du 12 janvier 1957, des candidats à l'Agrégation. Mais il me semble que toutes les mesures qui s'assortissent d'un engagement trop strict, pèchent par une profonde erreur psychologique : car ce n'est pas par la contrainte qu'on amènera des jeunes gens, sollicités de tous côtés, à entrer dans l'Enseignement du Second Degré ; celui-ci risque trop de leur apparaître, depuis les derniers règlements, comme un purgatoire ou une prison.

Au contraire, seul un régime aussi libéral que possible, peut attirer et retenir une jeunesse qui n'a pas toujours bien conscience de ses goûts et de ses possibilités. Que les I.P.E.S. et les autres organismes destinés à recruter des professeurs, se contentent du même engagement qui est demandé à l'entrée des E.N.S. : servir l'Etat pendant dix ans. Qu'on fasse miroiter aux candidats d'autres possibilités que celle d'enseigner dans un Lycée ; qu'ils sachent que s'ils en ont l'étoffe et l'envie, ils pourront, tout comme les polytechniciens, accéder aux plus hautes carrières scientifiques : Recherche, Enseignement Supérieur, Energie atomique, O.N.R.A., que sais-je ? Alors, et alors seulement, en attirant les élites et en encourageant les masses, nous trouverons les professeurs dont nous avons besoin.

Mais qu'on sache bien ceci : ce n'est pas en refusant une bourse de Recherche au n° 1 du Concours d'Agrégation, sous prétexte que le 39<sup>e</sup> a raté sa composition de Mécanique, que l'on aura des chances de persuader les jeunes gens de cette vérité, que l'Agrégation leur ouvre la porte de l'un des plus beaux métiers qui soient.

Jacqueline LELONG-FERRAND,  
*Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris.*

---

## FAIRE AIMER LES MATHÉMATIQUES PAR UNE INITIATION VIVANTE A LA RECHERCHE

Pour une initiation efficace aux sciences

L'importance des sciences et des techniques dans la civilisation contemporaine n'est pas niable. L'information du grand public à cet égard augmente à un rythme accéléré, mais ce qui est peut-être moins clairement conçu, c'est l'importance des Mathématiques et le fait que ce sont les Mathématiques qui permettent en ce moment à la civilisation de s'exprimer et de se prolonger.

Il est donc urgent que tous les esprits avertis prennent conscience du double aspect des Mathématiques dans l'enseignement :

1) Aujourd'hui comme hier, elles font partie de la culture générale, mais aujourd'hui elles en sont un élément essentiel. Sans connaissances mathématiques, on pouvait être cultivé au siècle de Louis XIV : la structure complexe du monde actuel ne permet pas d'être un « honnête homme » si l'on n'est pas, au moins, introduit aux formes de la pensée mathématique, qu'il s'agisse de s'intéresser aux grandes synthèses scientifiques, aux conditions économiques, ou à l'organisation des collectivités par exemple.

2) En dehors de cet esprit de compréhension générale, qui n'est pas l'esprit technicien au sens habituel du terme, le nombre des professions qui requièrent des connaissances mathématiques précises pour tous ceux qui jouent un rôle dans la transformation du monde, est de plus en plus considérable, qu'il s'agisse de production, de gestion ou de distribution.

Développer la compréhension des Mathématiques et les aptitudes à leur bonne utilisation, implique un tournant dans l'enseignement des Mathématiques, et, par conséquent, doit provoquer ou stimuler une réflexion nouvelle sur leur pédagogie. Il faut « une Mathématique à plusieurs entrées », car *il faut enseigner les Mathématiques pour tous*.

Oui, TOUS : garçons et filles, enfants déjà aptes à comprendre les idées abstraites, et enfants plus doués pour percevoir le concret ; enfants capables de réactions rapides en face de situations imprévues, ou enfants ayant besoin de lente réflexion. Il faut trouver le moyen de surmonter aisément les premières difficultés, celles qui rebutent les jeunes esprits et refoulent des enfants trop vite découragés dans l'immense cohorte de ceux qui se glorifient de n'avoir jamais rien compris aux Mathématiques.

Il ne s'agit pas, évidemment, de supprimer toutes les difficultés ; le meilleur pédagogue ne pourra pas rendre la diagonale du carré commensurable avec le côté, même si les élèves en éprouvent de la gêne ; il faudra toujours apprendre à raisonner, et pour construire une démonstration valable, on ne se tirera jamais d'affaire avec des jongleries de mots ou des « procédés pédagogiques ». Il restera toujours des difficultés à vaincre et l'effort à fournir pour les surmonter restera l'exercice le plus fructueux pour la formation de l'esprit, aussi bien que pour celle du caractère. Mais encore faut-il que l'enfant ou l'adolescent ait envie de faire cet effort, et qu'il sente combien il sera nécessaire à sa vie d'homme. La place actuelle des Mathématiques parmi les autres disciplines est évidemment d'abord trop restreinte pour que l'élève prenne conscience de leur importance, mais, cependant, quel que soit l'horaire qu'on leur réserve, on peut concevoir une aide efficace par le moyen de livres qui prépareront, aideront ou prolongeront l'action prééminente du maître en dehors de la classe.

On peut la préparer en s'adressant à la sensibilité et à la curiosité des élèves : n'est-il pas possible, en effet, de concevoir des ouvrages de genres variés qui puissent aider les professeurs dans leur tâche en donnant aux jeunes lecteurs le goût de

l'observation et de la réflexion, l'envie de découvrir par eux-mêmes, en leur montrant comment les découvertes mathématiques ont été faites ? Certaines formes de l'héroïsme, certain goût de l'aventure, et quelquefois même celui du risque, ne trouvent-ils pas encore l'occasion de se manifester chez les chercheurs, chez les grands pionniers de la science moderne, et tout aussi bien chez les courageux et les plus modestes exécutants des tâches titanesques de l'industrialisation du monde ? De nos jours, c'est dans les laboratoires, ou bien sur les chantiers des barrages, ou bien dans les centrales nucléaires que retentit l'appel du cor du valeureux Roland.

Déjà, des essais sont faits, mais trop souvent d'une dangereuse schématisation : quel prix attacher à cette information fragmentaire ou même trompeuse, livrée à bon marché par une presse enfantine à caractère bassement commercial ? En ce domaine, les réussites sont rares. Cependant, il est possible d'informer avec exactitude, de vulgariser sans déformer, surtout d'éveiller la curiosité sans mentir, sans promettre plus que l'on ne peut tenir, et enfin d'inciter l'enfant et l'adolescent à l'effort de la recherche, plutôt que de l'abandonner au plaisir passif de l'admiration.

Préparer l'esprit ne suffit pas et pour aider l'élève en prolongeant l'action du maître, on pourrait envisager un livre qui excite le goût de l'invention et aide la recherche solitaire par un choix progressif de ces exercices indispensables à l'acquisition des techniques fondamentales qui familiarisent avec le domaine des Mathématiques.

On peut penser, entre autres modes d'ouvrages, à ceux qui suivent, mais beaucoup d'autres formes peuvent aussi être imaginées.

1° Un livre qui, dans l'état actuel des programmes et pour les deux premières années au moins (ou encore pour 5° et 4°), répondrait aux besoins du travail dirigé et des exercices pratiques qu'on essaye de promouvoir. Un livre qui serait, pour l'apprenti mathématicien, ce qu'est la flore pour le botaniste, la grammaire et le dictionnaire pour le littéraire.

2° Ou une manière de présenter les programmes au début de façon plus vivante, plus facilement compréhensible pour l'enfant lorsqu'il est réduit à ses seuls moyens.

L'enseignement par correspondance, et certains éditeurs, font déjà quelques essais en ce sens, de manière à créer un attrait qui relève même parfois du jeu.

Bien entendu, des cours élémentaires en voie de publication, ou récemment parus, pourront être présentés.

3° Ou un livre plus méthodologique, destiné aux maîtres, et rassemblant des questions avec leurs prolongements possibles autour de quelques centres d'intérêt.

4° Ou un livre basé sur l'histoire des sciences, mais qui, par le moyen de constructions concrètes, ferait utiliser à l'élève des connaissances abstraites qui leur semblent, sans cela, inutiles (technologie, constructions électriques, etc...).

5° Ou une étude psychologique avec applications qui pourrait servir aux maîtres. Etc... etc ..

Pour provoquer la composition d'un tel livre, pour provoquer un élan de promotions d'ingénieurs et de chercheurs, un prix de 500 000 F est offert par une initiative privée pour en récompenser l'auteur, ou les auteurs. Suivant la formule de Paul VALÉRY, on voudrait « un livre élémentaire dû à la collaboration d'un grand géomètre et d'un homme intelligent, aussi mal doué que possible, ou qui se croie tel ».

Les personnes que ce projet intéresse sont priées d'annoncer leur participation éventuelle, avant le 1<sup>er</sup> juin. Les projets ou présentations devront être remis avant le 1<sup>er</sup> décembre.

Toutes communications ou demandes de renseignements complémentaires doivent être adressées au « Secrétariat du Concours V., aux bons soins de l'Association des Professeurs de Mathématiques, 29, rue d'Ulm, Paris, 5° ».

## ≡ V. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE ≡

### AXIOMATIQUE ET REDÉCOUVERTE

Rapport 1957

Ce rapport consiste en une bibliographie sommaire. Nous indiquons ci-dessous quelques ouvrages d'information sur les axiomatiques les plus utiles à notre enseignement élémentaire.

#### 1. L'axiomatique de HILBERT

Notre enseignement le plus traditionnel repose sur la géométrie d'Euclide, géométrie codifiée par HILBERT : *Grundlagen der geometrie*, Leipzig, 1899. Les éléments de base en sont les points, les droites et les plans. L'étude en est faite en cinq étapes : appartenances, ordres, congruences, directions, continuité. Voici quelques classiques de cette géométrie :

HALSTED. *Rational geometry. A text book for the Science of Space*, London, 1904. Une traduction française a été faite par P. BARBARIN et publiée par Gauthier-Villars, Paris, 1911. Cet ouvrage est malheureusement difficile à trouver en librairie.

L. GODEAUX. *Les géométries*. Collection Armand Colin, Paris, 1937. On y trouvera, au chapitre IV consacré aux principes de la géométrie, la liste des axiomes de HILBERT. En outre, cet ouvrage, bien que modeste de dimensions, permet d'effectuer un survol des géométries de LOBATCHEFSKI et de RIEMANN, des géométries affines, arguésiennes et projectives. Pour comprendre la Galaxie, il faut avoir contemplé ANDROMÈDE, de même pour comprendre la géométrie euclidienne, il faut l'avoir vue parmi d'autres géométries. Ainsi, l'exemple prend toute sa valeur formatrice s'il est serti de contre-exemples.

BELA KEREKJARTO. *Les fondements de la géométrie* (Tome I) (Akademiai Kiado, Budapest). Cet ouvrage, achevé en 1946, a été édité en français en 1955. Cette version française est actuellement en vente chez Gauthier-Villars. C'est, à ma connaissance tout au moins, l'exposé le plus récent de la géométrie hilbertienne. Conjointement, l'auteur développe d'ailleurs une axiomatique qui lui est propre et qui diffère de celle d'HILBERT en ceci : HILBERT codifie séparément la congruence des segments et celle des angles, puis il lie ces deux codifications en postulant l'un des cas d'égalité des triangles ; KEREKJARTO codifie seulement la congruence des segments, mais il pousse cette codification assez loin pour pouvoir en faire surgir une théorie des figures isométriques.

#### 2. L'axiomatique de M. G. CHOQUET

Cette axiomatique, qui fut présentée par M. G. CHOQUET au cours de conférences faites pour l'Association des Professeurs de Mathématiques, est aujourd'hui rédigée dans l'ouvrage suivant :

*L'enseignement des Mathématiques*, publication collective de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques ; rédigée par MM. PIAGET, BETH, DIEUDONNÉ, LICHNEROWICZ, CHOQUET et GATTIGNO ; éditée en Suisse par Delachaux et Niestlé. C'est au chapitre V, intitulé « Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire », que M. G. CHOQUET, après un bref examen critique des manuels et un aperçu sur la pluralité des prémisses, expose sa construction originale de la géométrie classique. Le développement s'effectue en trois sections : I. La géométrie de la droite  $\Delta$  : ordre total et congruence des couples ponctuels. II. La géométrie du plan : distance et mesure par  $\Delta$ , jonction de deux

points par une droite, régions et retournements, parallélisme. III. Etude des isométries et de l'orientation. L'exposé se termine par trois notes : structure de corps annexée à une droite, plans euclidiens non archimédiens, exemple de plan non-euclidien. De nombreux collègues nous ont écrit pour nous demander des informations sur l'axiomatique de M. G. CHOQUET ; ce livre sera certainement pour eux un puissant outil de travail.

### 3. L'axiomatique de R. BRISAC

On sait toute l'importance attribuée par Henri POINCARÉ au groupe des déplacements. On relit toujours avec admiration le chapitre IV de « La Science et l'Hypothèse », les chapitres III et IV de « La Valeur de la Science. C'est ce point de vue qui est adopté par Robert BRISAC.

R. BRISAC. *Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne*. Paris, Gauthier-Villars, 1955. Après avoir admis un système d'axiomes, d'appartenance et d'ordre voisin de celui de HILBERT, l'auteur fait une étude détaillée de la notion de groupe. Il étudie plus particulièrement le groupe des applications biunivoques de l'espace sur lui-même, puis il introduit axiomatiquement, le « groupe des déplacements », sous-groupe du précédent. Citons alors ce passage de la préface de M. René DE POSSEL : « Le lecteur verra avec quel bonheur l'auteur s'est servi de l'axiome de retournement du segment pour bâtir la théorie des droites et plans perpendiculaires, comment il a disséqué la démonstration classique du théorème de Pythagore, dégagée de ses petits triangles, pour la ramener à la commutativité du produit scalaire, laquelle résulte de l'axiome de retournement de l'angle. Il trouvera une théorie des parallèles et des translations particulièrement simple, un exposé du théorème fondamental de la mesure des grandeurs, en appendice une théorie complète et enseignable de l'orientation. »

### 4. L'axiomatique de H. WEYL

Le système de HILBERT date de 1899, celui de Herman WEYL date de 1918. Entre ces deux dates s'est produite une profonde révolution scientifique : l'éclosion puis l'affirmation de la théorie de la Relativité. C'est un fait incontestable que l'homme du  $xx^e$  siècle ne voit pas l'Univers physique avec les mêmes yeux que l'homme du  $xix^e$  siècle. Ainsi, à une transformation de notre conception du monde sensible correspond une transformation fondamentale de notre géométrie. Pour bien comprendre l'idée maîtresse de H. WEYL, il faut remonter aux sources et lire les admirables pages qui ouvrent « Temps, Espace, Matière ». Il faut ensuite étudier la structure d'espace vectoriel, puis celle d'espace ponctuel associé à un espace vectoriel. Ces structures sont aujourd'hui bien connues des étudiants, de nombreux cours et de nombreux livres les exposent, nous en citerons un pour sa grande commodité.

H. WEYL. *Temps. Espace. Matière*, publié à Zurich en 1918, traduit en français par G. JUVET et R. LEROY et publié à Paris par la Librairie scientifique Albert Blanchard en 1922. Cet ouvrage marque une date importante de l'évolution de la pensée mathématique et son importance historique en fait un livre de bibliothèque. Le chapitre premier s'intitule : « L'espace euclidien, son expression mathématique et son rôle en physique ». Après un aperçu concret des concepts spatiaux élémentaires, H. WEYL pose les bases de la géométrie affine, vectorielle et ponctuelle ; il étudie ensuite les formes quadratiques et, par le produit scalaire, introduit la géométrie métrique. Un tel point de vue prépare d'amples généralisations, la suite de l'ouvrage en est une preuve éclatante.

A. LICHNEROWICZ. *Eléments de calcul tensoriel*. Collection Armand Colin, Paris, 1951. Parmi les livres, qui adoptent ce point de vue, nous avons choisi celui

de M. LICHNEROWICZ pour son caractère très maniable. Un professeur qui adopte en classe de Mathématiques Élémentaires l'axiomatique de Herman WEYL peut utiliser le livre de M. LICHNEROWICZ de la façon suivante : 1° Définir un espace vectoriel (Chapitre I, n<sup>os</sup> 1 à 5). — 2° Définir un espace ponctuel associé à ce dernier (Chapitre II, n<sup>os</sup> 25, 26, 27). — 3° Développer, à partir de ces définitions, toute la partie affine du programme. — 4° Définir l'espace vectoriel euclidien (Retour au chapitre I, n<sup>o</sup> 15 et suivants). — 5° Définir l'espace ponctuel euclidien (Chapitre II, n<sup>o</sup> 29). — 6° Développer, à partir de ces définitions, toute la partie métrique du programme. Les avantages de ce mode d'exposition sont les suivants : possibilité de faire en un an un cours complet n'exigeant des élèves aucune connaissance préalable, harmonisation facile des cours de physique et de mathématiques, interdiction absolue du bricolage géométrique et mise en place de quelques notions solides utilisables par les élèves dans toute la suite de leurs études.

### 5. Aperçus variés

Lorsqu'on a l'occasion de rencontrer les mêmes élèves plusieurs fois au cours de leur scolarité, on peut envisager pour eux d'heureuses variations d'éclairage. Les programmes du premier cycle suivent consciencieusement l'ordre hilbertien, le programme de la classe de Mathématiques Élémentaires qui s'ouvre par une présentation des vecteurs s'accommode fort bien de l'axiomatique de Herman WEYL. On peut alors considérer la classe de Seconde, à la fois comme une classe de recommencement et de transition ; cette possibilité fait de cette classe l'une des plus intéressantes de l'Enseignement Secondaire. Parmi les ouvrages qui permettent de prendre conscience de la variété des éclairages possibles, nous citerons :

G BOULIGAND. *L'accès aux principes de la géométrie euclidienne*, Vuibert, 1951. On relit toujours avec plaisir ce petit livre, où la synthèse classique et la synthèse moderne, l'intuition et la codification sont heureusement confrontées. C'est là que M. BOULIGAND présente le « rapporteur binaire », qui crée et multiplie les droites perpendiculaires, assurant ainsi, au sein du groupe linéaire, l'existence d'un groupe de rotations autour de chaque point.

ESTÈVE et MITAULT. *Cours de géométrie*. Edités par Gauthier-Villars en 1935, ces ouvrages sont remarquables pour leur grande probité à l'égard des axiomes et la netteté de la distinction qu'ils établissent entre propriétés linéaires et propriétés métriques.

A. DELACHET. *La géométrie contemporaine*. Collection Que sais-je, P.U.F. Vue d'ensemble des tendances actuelles en géométrie. Le rôle de la notion de groupe y est fortement souligné, on y trouvera en particulier une définition des déplacements, voisine de celle de R. BRISAC, et prête à être adaptée à l'enseignement le plus élémentaire. D'autre part, ce livre est un modèle de marche progressive du concret à l'abstrait.

P. DEFRISE. *Visages de la Mathématique*. Office et publicité, rue Neuve, 36, Bruxelles. Les géométries actuellement pratiquées sont heureusement confrontées dans cet ouvrage qui contient une mise en évidence très opportune et très sensible du lien bilatéral Equivalence-Groupe de Transformations.

Nous arrêtons ici cette liste d'ouvrages anciens ou nouveaux que nous consultons souvent, lorsque chaque année nous remettons notre cours sur le métier. Mais il va de soi que cette liste n'est pas exhaustive.

Nous poursuivrons ultérieurement ce rapport par une étude analogue concernant l'arithmétique. Par ailleurs, nous examinerons comment ces diverses axiomatiques (et peut-être d'autres que nous avons omises) peuvent être adaptées à notre enseignement élémentaire. Pour ce programme, nous sollicitons de nos collègues toutes les informations possibles.

Y. CROZES (*Lycée Henri-IV*).

## ≡ VI. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS ≡

### CONCOURS D'ADMISSION DANS LES CENTRES PÉDAGOGIQUES RÉGIONAUX Session normale de 1956

#### Section F. Mathématiques

Extraits (1) du rapport de MM. P. DEDRON et L. THIBERGE

*Inspecteurs généraux, Présidents des Jurys*

Pour cette session, comme pour toutes les précédentes, les candidats et les candidates ont subi les épreuves théoriques devant deux Jurys différents, les sujets des deux compositions écrites étant, comme d'habitude, communs aux deux sections ; la double correction était encore assurée, pour chaque composition, par un membre du Jury de la section masculine et un membre du Jury de la section féminine.

Le présent rapport peut donc présenter simultanément les observations ou conseils concernant les deux sections, avec toutes les comparaisons opportunes.

#### COMPOSITION DES JURYS

Par arrêté du 14 mars 1956, les deux jurys furent ainsi constitués :

##### *Section masculine :*

- M. THIBERGE, Inspecteur général, Président.
- M. DIXMIER, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
- M. COSSART, professeur (Centrale) au Lycée Chaptal.
- M. ECALLE, professeur (Navale) au Lycée St-Louis (Stanislas).
- M. KLEIN, professeur (Agro) au Lycée St-Louis.

##### *Section féminine :*

- M. DEDRON, Inspecteur général, Président.
- M. BRILLOUËT, professeur à l'Ecole Nat. Sup. de Mécanique de Nantes.
- Mlle BRULARD, professeur (Mathématiques Supérieures) au Lycée Fénélon.
- M. GUAYDIER, professeur (Centrale) au Lycée St-Louis (Stanislas).
- M. MULTON, professeur au Lycée Buffon.

#### RAPPORTS SUR L'ECRIT (Candidats et candidates) (2)

##### **Première composition (M. COSSART).**

On propose d'étudier quelques propriétés de la transformation ponctuelle (T) suivante : A et B sont deux points fixes distincts à distance finie, I est le milieu de AB, nous appellerons C le point à l'infini de la médiatrice de AB.

---

(1) Nous nous excusons, faute de place, de ne pouvoir publier ce rapport *in extenso*. Au moins avons-nous conservé les larges extraits les plus propres à aider les futurs candidats. Regrettons cependant, à cette occasion, que l'Administration du Second Degré ne prenne pas sa part des frais de publication des rapports officiels qui resteraient ignorés des professeurs et des candidats si les Associations de Spécialistes ne les publiaient pas dans leurs *Bulletins*. (N.D.L.R.).

(2) Voir les énoncés de ces compositions dans notre *Bulletin* 178, p. 528.

L'homologue  $M'$  de  $M$  est tel que : 1° Il est dans le plan  $MAB$  ; 2°  $AM'$  est perpendiculaire à  $AM$  ; 3°  $BM'$  est perpendiculaire à  $BM$ .

### I. Dans un plan passant par $AB$

*Paragraphe 1 :* Il se décomposait en six propositions distinctes qui devaient éclairer toutes les autres questions.

Il en est souvent ainsi dans un problème de Concours ; néanmoins, bien des candidats ont négligé ce début, n'examinant que superficiellement les singularités de (T), sans doute pressés d'établir les relations

$$(1) \quad \overline{mM} \cdot \overline{m'M'} = \overline{mA} \cdot \overline{mB} = \overline{m'A} \cdot \overline{m'B} = -\overline{Am} \cdot \overline{Am'} = -\overline{Bm} \cdot \overline{Bm'}.$$

Celles-ci se démontrent dans le cas général, en utilisant la puissance de  $m$  par rapport au cercle  $AMBM'$  (de diamètre  $MM'$ ).

En dehors du cas général, les cas singuliers sont ainsi définis :  $ABC$  est le triangle des singularités ; à chaque sommet correspond un point quelconque du côté opposé.

Revenons au cas général : (T) peut être définie comme associant à  $M$  son diamétralement opposé  $M'$  sur le cercle  $ABM$ .

Par définition même, (T) est réciproque [bi-univoque en dehors des singularités]. A un point à l'infini distinct de  $C$ , il correspond le point à l'infini dans la direction perpendiculaire.

(T) n'a pas de points doubles.

*Paragraphe 2 :*  $M'$  décrit en général le même cercle que  $M$ ,  $MM'$  enveloppant le centre de ce cercle. Mais  $M'$  en  $A$  donne toute la droite  $BC$ , et  $M'$  en  $B$  donne toute la droite  $CA$ . Ces deux droites sont deux lieux singuliers complémentaires et correspondent aux points  $A$  et  $B$  comme enveloppes singulières de  $MM'$ .

*Paragraphe 3 :* a) La droite (D), lieu de  $M$  fixe  $m$  et aussi  $m'$ . Le lieu de  $M'$  est donc la symétrique (D') de (D) par rapport à  $I$ .

La correspondance définie par (1)  $\overline{mM} \cdot \overline{m'M'} = \overline{mA} \cdot \overline{mB} = C^e$  est biunivoque et régulière si  $m \neq A$  et de  $B$ . Elle justifie que  $M'$  décrit bien toute la droite (D') [réciproque].

Enveloppe de  $MM'$ . — Considérons la conique de sommets  $m, m'$ , de foyers  $A$  et  $B$ . Le théorème de Poncelet, relatif à cette conique, au point  $M$  et au foyer  $A$ , montre que la tangente autre que  $Mm$  coupe la tangente (D') en  $m'$  en un point  $M_1$  tel que  $\widehat{MAM_1} = \Pi/2$ , donc  $M_1 = M'$ . Réciproquement, toute tangente à cette conique coupe les droites (D) et (D') en des points  $U$  et  $V$  tels que  $\widehat{UAV} = \widehat{UBV} = \frac{\Pi}{2}$  ;  $U$  et  $V$  forment donc un couple  $MM'$ .

En outre, (D) contient le point  $C$ . Il faut donc ajouter à (D'), lieu général, la droite  $AB$  comme lieu singulier.

b) Si  $M$  décrit la droite ( $\Delta$ ), issue de  $A$ ,  $M'$  décrit en général la droite ( $\Delta'$ ) perpendiculaire à ( $\Delta$ ) en  $A$ . Il est aisé d'établir que le passage de  $M$  à  $M'$  résulte d'une similitude de centre  $B$ , d'angle  $\frac{\Pi}{2}$ , portant  $\Delta$  sur  $\Delta'$ . L'enveloppe de  $MM'$  est alors la parabole de foyer  $B$ , tangente à ( $\Delta$ ) et ( $\Delta'$ ). En outre, quand  $M$  vient en  $A$ ,  $M'$  est indéterminé sur  $BC$  (lieu singulier) et  $MM'$  tourne autour de  $A$  (enveloppe singulière).

*Paragraphe 4 :* Si  $M$  décrit une droite (D) parallèle à  $AB$ , l'application des formules (1) dans les axes  $IB$  et  $IC$ , par exemple, montre que  $M'$  est sur une certaine parabole ( $\mathcal{P}$ ) d'axe  $IC$ , passant par  $A$  et  $B$ .

Le sommet S de cette parabole est le transformé du pied H de la perpendiculaire abaissée de I sur (D).

Quand M décrit (D),  $m$  décrit BC tout entière,  $m'$  aussi, donc M' décrit toute la parabole ( $\mathcal{P}$ ).

Construction des tangentes en A et B : Si M vient en  $M_0$  sur BC, M' tend vers A,  $AM'$  devient la tangente en A, donc  $AM_0$  est la normale en A.

*Problème inverse* : Si M décrit une parabole telle que ( $\mathcal{P}$ ), en vertu de la réciprocité de (T), M' décrira une droite telle que (D), construite en utilisant le passage de S à H par exemple.

Néanmoins, ( $\mathcal{P}$ ) contenant les trois points A, B, C, il convient d'ajouter à (D) les trois lieux singuliers BC, CA, AB.

*Remarque* : Notons, pour donner un moyen de vérifier cette question, comme les suivantes, que :

Si M décrit une courbe algébrique ( $\mathcal{C}$ ) d'ordre  $n$  admettant A, B, C comme points d'ordre  $a, b, c$  respectivement, M' décrira une courbe algébrique ( $\mathcal{C}'$ ) d'ordre  $n - a - b - c$ , lieu complété par les droites BC, CA, AB comptées  $a, b, c$  fois respectivement.

Enfin ( $\mathcal{C}$ ) rencontrant BC en  $n - b - c$  points, A sera pour ( $\mathcal{C}'$ ) un point d'ordre  $n - b - c$ .

*Paragraphe 5* : Dans les mêmes axes que ci-dessus et par application des formules (1), le calcul montre que M' est sur l'hyperbole  $\mathcal{H}$ , de centre I, passant par A et B, asymptote à IC et à la perpendiculaire ( $\Delta_1$ ) en I à ( $\Delta$ ).

Comme au paragraphe précédent, bien des candidats omettent d'établir la réciproque. On démontrera comme ci-dessus que M' décrit bien toute l'hyperbole trouvée, ou bien l'on reprendra tous les calculs en sens inverse, à partir de M' en position quelconque sur ( $\mathcal{H}$ ).

*Problème inverse* : Si M décrit une hyperbole de la famille ( $\mathcal{H}$ ), en vertu de la réciprocité de (T), M' décrira la droite ( $\Delta$ ) perpendiculaire en I à l'asymptote oblique ( $\Delta_1$ ) de ( $\mathcal{H}$ ).

On ajoutera encore les trois lieux singuliers BC, CA, AB.

NOTA. -- On peut donner une solution géométrique de cette question. En effet, soit N l'intersection de  $BM'$  avec  $\Delta_1$ ,  $n$  sa projection sur BC. N est l'homologue de M dans la transformation ( $T'$ ) analogue à (T), mais définie avec I et B.

Par suite :  $\overline{Bn} = \overline{mI} = \overline{Im'}$  et  $\overline{BN} = \overline{KM'}$  si K est l'intersection de  $BM'$  avec IC. Cette dernière relation donne  $\overline{BM'} = \overline{BN} + \overline{BK}$  et montre que M' appartient à l'hyperbole ( $\mathcal{H}$ ) d'asymptotes IC et  $\Delta_1$ , passant par B.

La réciproque s'établit, par exemple, en signalant que si BM prend toutes positions possibles autour de B, il en est de même de  $BM'$ , donc M' décrit toute l'hyperbole ( $\mathcal{H}$ ).

*Paragraphe 6* : Le lieu de M étant défini par  $mM^2 = k \cdot \overline{mA} \cdot \overline{mB}$ , en utilisant  $\overline{mM} \cdot \overline{m'M'} = \overline{mA} \cdot \overline{mB}$ , il vient  $\frac{\overline{mM'}}{\overline{mM}} = \frac{1}{k}$  puis  $m'M'^2 = \frac{1}{k} \overline{m'A} \cdot \overline{m'B}$  et réciproquement, ce qui donne le lieu général de M', soit  $\Lambda$ . Il faut ajouter les deux lieux singuliers BC et CA.

Si L est une hyperbole, on a  $k > 0$   $k = e^2 - 1$ .

$\frac{1}{k} > 0$ , donc  $\Lambda$  est une hyperbole.  $\frac{1}{k} = e'^2 - 1$ , d'où la relation  $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$  correspondant au fait que les directions asymptotiques de L et  $\Lambda$  sont orthogonales.

L et  $\Delta$  sont confondues si  $e^2 = 2$ , L est une hyperbole équilatère. MM' reste alors parallèle à AB, puisque  $k = 1$  et  $\overline{m'M'} = \overline{mM}$ .

Si L est une ellipse dont l'axe focal a pour sommets A et B, on a  $-1 < k < 0$ .

Le lieu  $\Delta$ , défini par  $\overline{m'M'^2} = \frac{1}{k} \overline{m'A} \cdot \overline{m'B}$ , où  $\frac{1}{k} < -1$ , est une ellipse de petit axe AB. On a alors :

donc  $e^2 - 1 = e'^2 - 1$  et enfin  $e' = e$ .

Les deux ellipses L et  $\Delta$  sont semblables, le grand axe AB de L étant le petit axe de  $\Delta$ . Très peu de candidats ont trouvé cette propriété.

L et  $\Delta$  seront confondues si  $k = -1$ , donc suivant le cercle de diamètre AB ; MM' enveloppe alors le point I.

## II. Géométrie dans l'Espace

La plupart des questions de cette partie II sont des applications directes des questions correspondantes de la partie I, mais il importait de souligner les différences ; c'est sur leur examen que les copies ont été appréciées.

Ainsi la question II, 1° n'est pas une réédition pure et simple du I, 1°. Si M est sur AB, M' est indéterminé sur la droite de l'infini du plan médiateur de AB et réciproquement, (T) étant toujours réciproque. M en A ou B donne un transformé indéterminé dans le plan perpendiculaire à AB en B ou en A.

La deuxième question, toute nouvelle, apportera des résultats applicables dans toute la suite, conjointement avec les résultats du I. Ce sont encore les formules (1) qui donneront la réponse :

$m$  étant fixe, donc  $\overrightarrow{mM}$  et  $\overrightarrow{m'M'}$  sont parallèles, et  $\overline{mM} \cdot \overline{m'M'} = \overline{mA} \cdot \overline{mB}$ . On passe de M à M', dans ce cas de figure par : 1° l'inversion de centre  $m$  et de puissance  $\overline{mA} \cdot \overline{mB}$  ; 2° la translation ( $\overrightarrow{mm'}$ ). On en déduit sans peine les lieux demandés.

Paragraphe 3° : Le plan (P) passant par A sera défini :  $\alpha$ ) comme lieu de perpendiculaires à AB et donnera pour lieu de M' une famille de cercles s'appuyant sur AB, situés dans des plans perpendiculaires à AB ;

$\beta$ ) comme lieu de droites issues de A et le lieu de M' se trouve engendré par d'autres droites issues de A.

Ce lieu est donc un cône ( $\mathcal{K}$ ) de sommet A, de base circulaire perpendiculaire à AB, cette droite étant génératrice du cône ( $\mathcal{K}$ ). Comme (P) passe par A, il faut ajouter pour lieu singulier le plan perpendiculaire en B à AB.

Le cône ( $\mathcal{K}$ ) admet pour plan de symétrie (II) le plan mené par AB perpendiculairement à (P). II coupe P suivant une droite  $\Delta$ , dont la transformée  $\Delta_1$  est perpendiculaire en A à (P).

AB et  $\Delta_1$  sont les deux génératrices principales du cône ( $\mathcal{K}$ ), donc les sections circulaires sont : 1° perpendiculaires à AB ; 2° perpendiculaires à  $\Delta_1$ , donc parallèles à (P). ( $\mathcal{K}$ ) est un cône de Hachette.

Paragraphe 4° : Si M décrit une sphère ( $\omega$ ) passant par A et B, tout plan AMB donne sur cette sphère un cercle qui est son propre transformé (I, 2°), donc ( $\omega$ ) se conserve globalement. On ajoutera les lieux singuliers obtenus pour M en A ou B, et qui sont les plans perpendiculaires à AB en B et A.

Ce qui suit, n'a été traité par aucun candidat de manière satisfaisante :

Un cercle ( $\gamma$ ) est défini par une sphère ( $\omega$ ) et un plan (P), passant par A par exemple. Le lieu de M' est alors l'intersection de ( $\omega$ ) avec le cône ( $\mathcal{K}$ ) transformé de (P) [M ne devant pas venir en A, les lieux singuliers n'interviennent pas dans cette question].

Pour que l'intersection de  $(\omega)$  et  $(\mathcal{K})$  soit un cercle, il faut et il suffit que le plan tangent à  $(\omega)$  en A soit direction de section circulaire de  $(\mathcal{K})$ . Or  $(\mathcal{K})$  a deux directions cycliques :

$\alpha$ ) le plan (P) qui serait alors tangent à  $(\omega)$ , et le lieu de M se réduirait à A, ce qui est exclu dans l'énoncé ;

$\beta$ ) le plan médiateur de AB —  $(\omega)$  doit alors être la sphère de diamètre AB. Dans ce cas, M et M' sont symétriques par rapport à I, et le lieu de M' est bien un cercle.

*Paragraphes 5° et 6° :* Ce sont des applications très simples des questions I, 4° et I, 5°, associées aux résultats de la question II, 2°.

Un seul point nouveau : le lieu des asymptotes  $\Delta_1$  des hyperboles trouvées au 6°, b) : le plan (Q) étant engendré par des droites  $\Delta$  issues de I, on a vu au I, 5° que les asymptotes étaient les perpendiculaires  $\Delta_1$  à  $\Delta$ , issues de I dans les plans AB,  $\Delta$ .

Or, les droites  $\Delta$  et  $\Delta_1$  se correspondent dans la transformation  $(T')$  définie dans notre solution au I, 5°, *NOTA*.

Le lieu des droites  $\Delta_1$  se définit comme au II, 3° : c'est le cône de Hachette de sommet I, qui a pour génératrices principales (orthogonales aux sections circulaires) AB et la perpendiculaire en I à (Q).

Complétons les observations faites au cours de cet exposé, et que nous a suggérées la correction des copies :

Tous les candidats lisent leur texte trop superficiellement et omettent de répondre à des questions faciles.

Reprochons à plusieurs candidats de paraphraser certains passages du texte, sans fournir les justifications demandées, ce qui est du plus mauvais effet : on peut se demander s'il s'agit d'incompréhension mathématique, de paresse intellectuelle, ou de manque de conscience.

Relevons également bien des affirmations gratuites, en particulier dans l'examen des réciproques relatives aux lieux des points M' et aux enveloppes des droites MM'.

Dans quelques cas, heureusement très rares, nous avons même eu l'impression que le candidat bluffe sciemment. Aucun concours ou examen n'est un coup de poker, nos candidats doivent se persuader que nous exigeons d'eux, ici, tout d'abord, une scrupuleuse honnêteté intellectuelle.

Hâtons-nous de dire que les bonnes copies, et même d'autres plus faibles, dénotent un souci du fini, de la bonne présentation, de la concision et de la rigueur, qui fait la meilleure impression. C'est par ces moyens que tout candidat peut, et même doit, rechercher une « cote de faveur » que nous ne leur marchanderons pas.

Les termes impropres, certains néologismes boiteux, ont été quelquefois sanctionnés : Arête d'un cône ! On dit biunivoque pour réciproque, [qualité de (T)]. On évoque sans explication la « méthode de la séparatrice » dans la réciproque d'une enveloppe. On écrit aussi bien  $\overrightarrow{AB}$  ou  $\overleftarrow{AB}$  pour AB.

On confond point double de (T) avec la notion de point double d'une courbe algébrique.

Nous regrettons que certains calculs, certains raisonnements géométriques corrects, se traduisent par une conclusion d'une effarante imprécision, et deviennent inutilisables dans les questions suivantes.

Répétons qu'un calcul fait pour établir un lieu, ne dispense pas, parce que c'est un calcul, de la réciproque.

Ainsi, au I, 4°, si M est sur (D), M' est sur une certaine parabole  $\mathcal{P}$ , résultat obtenu en se servant du fait que M a une ordonnée constante. Or, le calcul reste le même, que M décrive (D) tout entière, ou seulement un segment de (D).

Il reste donc à utiliser le fait que M décrit tout (D) :

1° en remarquant que m décrit tout AB, m' aussi, et M' décrit entièrement ( $\mathcal{P}$ ) ;

2° en montrant que si  $M'$  est sur  $(\mathcal{P})$ , en dehors des points A, B, C, son homologue M est quelque part sur (D).

Soulignons aussi que la réciprocité de (T) ne peut servir à établir ces réciproques, mais donne la réponse aux propositions contraires. Ainsi, toujours en I, 4°, la réciprocité de (T) ne justifie pas que  $M'$  décrit entièrement  $(\mathcal{P})$  pourvu que M décrive tout D, mais elle prouve que si M est sur  $(\mathcal{P})$  [excluons encore A, B, C],  $M'$  sera sur la droite (D), justement en vertu de la réciproque de la proposition directe, dont on ne peut se passer ici.

Si les questions posées semblaient nombreuses, elles étaient toutes vraiment simples, et même familières, et leur résolution ne demandait aucun appareil d'érudition. Pourtant, les candidats donnent bien souvent l'impression d'être des novices, qui rencontrent de telles questions pour la première fois ; par exemple, il n'est que de signaler leur gaucherie dans l'emploi des divisions semblables (I, 3°, b) ou de l'inversion (II, 2°), comme dans l'élaboration des modestes formules (1) pour laquelle ils vont « dénicher » à grand-peine des triangles semblables.

En s'exerçant sur les textes déjà nombreux des sessions antérieures du C.A.P.E.S., et même sur les textes plus élémentaires que publient à profusion les ouvrages de la classe de Mathématiques, les candidats devraient acquérir toute la sûreté qui leur manque pour lire et pour interpréter leur énoncé de problème au jour du concours.

Il est évident qu'un tel entraînement fait encore gravement défaut à la plupart d'entre eux.

### Seconde composition (M. ECAILLE).

Nous commencerons par deux critiques d'ordre général :

1) Les candidats ont été surpris par les questions du problème qui se rattachaient au programme de Sciences expérimentales (dénombrements, combinaisons, formules du binôme) ; ils ont préféré, en général, consacrer la majeure partie de leur temps à celles qui se rattachaient au programme de Mathématiques (trigonométrie). Ils ne devraient pas oublier que le programme du C.A.P.E.S. porte sur toutes les classes secondaires, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral.

2) Les candidats ont une fâcheuse tendance à négliger la rédaction de la solution et plus encore la présentation des résultats. Certes, on conçoit qu'au jour du concours le temps limité ne laisse pas beaucoup de loisirs pour « signoler » la rédaction, et les correcteurs ne sont pas très exigeants sur ce point ; mais il est un minimum au-dessous duquel aucune copie ne devrait descendre. Fait plus grave, les candidats éprouvent rarement le besoin de bien mettre au point les résultats obtenus ; pourtant, dans des questions qui ont demandé des calculs parfois longs et une discussion souvent délicate, il est indispensable de coordonner les résultats et d'en donner un énoncé global aussi concis que possible ; ce devrait être un souci permanent chez de futurs professeurs.

Nous examinerons maintenant les diverses parties du problème :

*Première partie :* Elle consiste en quelques dénombrements assez simples, mais il fallait connaître ou savoir retrouver la somme des  $n$  premiers nombres entiers, celle de leurs carrés et celle de leurs cubes. L'ignorance de ces résultats a arrêté de nombreux candidats ; ceux qui ont passé outre en conservant les symboles  $S_2$  et  $S_3$  n'ont pu calculer les limites demandées. Signalons que  $S_2 = \Sigma n^2$  n'est pas un polynôme du second degré en  $n$  et n'est pas équivalent à  $n^2$  quand  $n$  devient infini.

Le dénombrement du 3° est plus délicat, il faut le traiter avec soin et méthode. Tous les candidats auraient dû étudier les cas particuliers  $n = 3$ ,  $n = 4$ . La construction effective de toutes les droites est alors réalisable et peut suggérer un pro-

cédé applicable dans le cas général. Désignons par  $A_x^n$  le nombre de droites passant par le sommet de coordonnées  $(x, y)$  et ne passant par aucun sommet d'abscisse inférieure à  $x$  et désignons par  $N$  le nombre total des droites. Sommons par rapport à  $x$ , puis par rapport à  $y$ , ce qui revient à opérer dans des bandes verticales ; nous obtenons :

$$B_0 = A_0^0 + A_0^1 + \dots + A_0^n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{pour } \begin{cases} n = 2p \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = A_x^0 + A_x^1 + \dots + A_x^n = 2p + (2p-2) + \dots + 4 + 2 + 0 \\ \quad + \dots + 0, \\ N = p^2(2p+3), \end{array} \right.$$

$$\text{pour } \begin{cases} n = 2p+1 \\ n \neq 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = A_x^0 + A_x^1 + \dots + A_x^n = (2p+1) + (2p-1) + \dots + 3 \\ \quad + 1 + 0 + \dots + 0, \\ N = (p+1)(2p^2+4p+1). \end{array} \right.$$

Trois candidats seulement ont obtenu ce résultat.

Les correcteurs ont été choqués de trouver plusieurs copies où,  $N$  étant inexact, la vérification dans les cas particuliers était falsifiée pour la faire coïncider avec le résultat général.

*Deuxième partie :* Beaucoup de candidats, désorientés sans doute par la première partie, l'ont vite délaissée pour la deuxième, consacrée à la trigonométrie. Tous ont su faire la facile construction demandée (intersection d'un arc capable avec la droite, lieu des points, dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante) ; mais beaucoup n'ont pas vu que la discussion fait considérer deux cas,  $\alpha$  aigu et  $\alpha$  obtus. L'équation du second degré demandée ensuite, a presque toujours été établie, bien que certains candidats, opérant maladroitement, aient obtenu une équation bicarrée. On peut opérer, soit par les formules trigonométriques classiques, soit par un calcul algébrique ; il est préférable de ne pas utiliser ouvertement la géométrie analytique.

Le choix des données, pour obtenir  $P$  sur le contour du carré, puis pour obtenir deux solutions distinctes intérieures au carré, donne lieu à des calculs simples ; mais la synthèse des divers résultats obtenus (égalités et inégalités) nécessite beaucoup d'ordre et c'est ici le défaut de la plupart des copies : on énumère une série de conditions, sans se soucier de savoir si elles sont suffisantes, ou si elles sont compatibles, ou si certaines sont conséquences d'autres. Beaucoup de candidats perdent trop de temps en calculs sans but, allongés à plaisir, sans songer à mettre en ordre les résultats pour aboutir à une conclusion nette et concise. Le plus simple est de choisir d'abord la valeur du rapport  $h$ , et d'étudier ensuite les conditions portant sur l'angle  $\alpha$ .

Pour traiter la dernière question, après avoir constaté que l'abscisse de  $P$  est 18, il suffit d'utiliser l'équation du 2°, qui devient  $Y^2 - 16 \cot \alpha Y + 36 = 0$ . Les trois solutions sont obtenues en recherchant les couples de nombres entiers  $Y_1$  et  $Y_2$ , distincts et inférieurs à 32, puis l'angle  $\alpha$ , tels que  $Y_1 Y_2 = 36$ ,  $16 \cot \alpha = Y_1 + Y_2$ . Le résultat est exact dans cinq copies

*Troisième partie :* Les dénombrements se font sans difficulté en opérant avec ordre : il suffit de prendre d'abord pour  $M$  les  $n+1$  sommets situés sur une même ligne du quadrillage, puis de faire varier cette ligne. Il faut, là aussi, reconnaître la somme des carrés des  $n$  premiers nombres entiers. La valeur moyenne  $\mu$  s'obtient immédiatement, en remarquant que dans les dénombrements initiaux chaque triangle était compté deux fois. Quant à l'homothétie effectuée ensuite, plusieurs candidats n'ont pas remarqué qu'il s'agit de carrés d'aires et que, par suite,  $\mu$  doit être divisé par  $n^4$ .

Cette troisième partie se termine par un intéressant problème d'arithmétique :

la fraction  $\mu' = \frac{(n+1)^2(7n+2)}{9 \times 32n^3}$  peut-elle être rendue décimale ?  $n^3$  ne peut avoir

que 2 comme diviseur premier commun avec le numérateur, donc  $n$  doit être de la forme  $2^p 5^q$  ; il reste alors un facteur 9 dont la suppression peut se faire de deux manières : ou bien  $n+1$  doit être divisible par 3, ou bien  $7n+2$  doit être divisible par 9. L'étude, basée sur la périodicité des restes de la division des puissances successives d'un même nombre par un autre nombre, peut être simplifiée, dans son exposition, en utilisant la notation des congruences : rechercher la condition pour que  $n+1$  soit divisible par 3, revient à étudier :  $2^p 5^q \equiv -1$  modulo 3. La conclusion finale est : il faut et il suffit que  $|p-q|$  soit ou impair ou divisible par 6.

*Quatrième partie* : Pris sans doute par le temps, les candidats ont peu étudié cette quatrième partie. Le nombre des contours polygonaux reliant A à M est  $C_{x+y}^x$  (un contour peut être défini par la suite des numéros d'ordre de chacun des  $x$  segments horizontaux, dans la suite des  $x+y$  segments du contour) ; si bien qu'en affectant chaque sommet M d'un coefficient égal à ce nombre, on reconstitue avec une disposition différente le triangle de Pascal. Les formules demandées dans le 2° s'établissent alors facilement : à l'aide de la formule du binôme (calcul a), à l'aide de la somme des puissances successives de 2 (calcul b), à l'aide de la formule  $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$  (calculs c et d).

La somme des aires  $\Sigma$  se trouve sans calcul : il suffit d'associer à tout contour le contour symétrique par rapport à la première bissectrice, la somme des deux aires correspondantes égale celle du carré.

Le 4° n'a malheureusement été abordé par aucun candidat. Le calcul de  $\Pi_x^y$  est sans difficulté, mais l'expression trouvée,  $C_{x+y}^x C_{2n-x-y-1}^{n-x-1}$ , se prête mal au calcul des sommes demandées.

Pour évaluer la première somme,  $P_x = \Pi_x^0 + \dots + \Pi_x^n$  ; il suffit de remarquer que tout contour reliant A à C emprunte une fois et une seule un segment horizontal de la bande  $x, x+1$ . Donc  $P_x$  représente le nombre total des contours, soit  $C_{2n}^n$ .

Pour évaluer la seconde somme,  $Q_y = \Pi_0^y + \dots + \Pi_{n-1}^y$ , on peut, par exemple, établir une correspondance biunivoque entre les contours reliant A à C et les suites d'entiers  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  telles que  $a_0 + a_1 + \dots + a_n = n$  et  $0 \leq a_p \leq n$  ( $a_p$  représentant le nombre des segments horizontaux d'ordonnée  $p$  du contour).  $Q_y$ , qui est égale à  $\Sigma a_y$  étendue à toutes ces suites, est indépendante de  $y$  et par suite  $(n+1) Q_y = n C_{2n}^n, Q_y = C_{2n}^{n+1}$ .

L'aire demandée au 3° est par suite égale à :  $Q_y \sum_{y=0}^{y=n} y = \frac{n^2}{2} C_{2n}^n$ .

## RAPPORT SUR L'ORAL, Section féminine (M. BRILLOUËT)

L'oral comprend deux parties : un exposé d'environ une demi-heure, après préparation de trois heures, et une interrogation sans préparation d'environ une demi-heure également. Pour une même candidate, l'interrogation portait sur une autre partie du programme que celle de l'exposé, par exemple, une interrogation de géométrie pour un exposé d'algèbre ou de trigonométrie. Une note était attribuée à l'exposé, une autre à l'interrogation, la moyenne de ces deux notes constituant la note d'oral, à laquelle était ensuite appliqué le coefficient 5.

## EXPOSÉS

La liste des exposés tirés au sort par les candidates est la suivante :

### *Arithmétique*

1. Reste de la division par un nombre d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'une puissance. Caractère de divisibilité par 11.
2. P.G.C.D. de deux ou plusieurs nombres. (On laissera de côté la méthode reposant sur la décomposition en facteurs premiers).
3. Racines carrées approchées à  $1/10^n$  près par défaut et par excès d'un nombre rationnel. (L'extraction de la racine carrée entière d'un entier est supposée connue).
4. Combinaisons. Probabilités simples.

### *Algèbre*

5. Exposer sur des exemples empruntés à l'algèbre, à la trigonométrie ou à la géométrie le raisonnement par récurrence. En donner des applications.
6. Discussion algébrique et géométrique d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues comportant un paramètre.
7. Résolution graphique d'une inéquation et d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.
8. Exemples de résolution de systèmes d'équations algébriques conduisant à des équations du second degré. Cas des systèmes symétriques.
9. Exemples simples d'équations irrationnelles.
10. Exemples d'inéquations irrationnelles.
11. Fonction :  $y = 1/x$ . Variation et représentation graphique. Examiner aussi le cas où les échelles sont différentes sur les deux axes.
12. Exemples de variation de fonctions sans l'emploi de dérivées. (On utilisera la variation d'une fonction de fonction, telle que fonction homographique de  $\sin x$ , racine carrée ou inverse d'un trinôme, etc...).
13. Limite quand  $x$  tend vers zéro de  $\sin x/x$ . Rôle du choix de l'unité. Tracer la courbe :  $y = \sin x/x$ . Étude à l'infini.
14. Définition et étude d'une fonction  $f(x)$  qui tend vers l'infini lorsque la variable  $x$  tend vers  $x_0$  ou l'infini. Notion d'asymptote. Exemples.
15. Définition de la dérivée d'une fonction pour une valeur de la variable. Relation avec la continuité. Traiter un exemple sur une fonction homographique en expliquant tous les calculs.
16. Étude de la variation d'une fonction périodique dont le graphique présente des symétries ; on insistera sur la réduction d'intervalle.
17. Variation et représentation graphique de fonctions numériques de la forme :  $y = ax + \beta + \sqrt{ax^2 + bx + c}$  ( $a$  étant positif et non nul).
18. Discussion graphique d'une équation du second degré dont les coefficients dépendent linéairement d'un paramètre.
19. Application de la variation des fonctions à la discussion d'une équation algébrique entière de degré supérieur à 2 avec paramètre.
20. Notion de primitive. Interprétation géométrique.
21. Fonction logarithme népérien de  $x$  :  $y = \text{Log } x$ . Formule :  
$$\text{Log}(ab) = \text{Log } a + \text{Log } b.$$
22. La fonction  $\text{Log } x$  ayant été étudiée, en déduire la définition et l'étude de la fonction exponentielle.

### Trigonométrie

23. Généralités sur la résolution des équations trigonométriques (la résolution de  $a \cos x + b \sin x + c = 0$  est exclue). Exemples.
24. Résoudre et discuter une équation trigonométrique linéaire en  $\sin x$  et  $\cos x$ , dont les coefficients dépendent d'un paramètre. Interprétation géométrique.
25. Exemples de résolution et de discussion d'un système de deux équations, toutes deux trigonométriques à deux inconnues.
26. Résolution d'inéquations trigonométriques avec application à la variation des fonctions.
27. Systèmes fondamentaux de relations entre les éléments d'un triangle quelconque (sans démonstration algébrique de l'équivalence de ces systèmes).
28. Résolution d'un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris. On traitera complètement et par logarithmes un exemple numérique.
29. Résolution d'un triangle dans un cas non classique (l'exemple donné comportera une solution géométrique).

### Géométrie

30. Orientation du plan. Angles orientés de deux droites non orientées. Applications.
31. Diverses formes de la condition d'appartenance de quatre points à un cercle.
32. Géométrie dans l'espace : théorème de Thalès. Réciproque. Application.
33. Trièdres supplémentaires.
34. Faisceaux harmoniques.
35. A et B étant deux points donnés d'un plan, étudier l'ensemble des points M du plan tels que :  $MA/MB = k$ ,  $k$  étant une constante donnée.
36. Somme et différence des carrés des distances d'un point à deux points fixes.
- Applications
37. Différences des puissances d'un point par rapport à deux cercles. Applications.
38. Exemples de constructions de cercles assujettis à des conditions simples (passer par un point, être tangent à une droite, à un cercle).
39. Polaire d'un point par rapport à un cercle.
40. Condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles soient cosphériques.
41. Définition d'un faisceau de cercles. Différents genres. Construction des cercles du faisceau tangents à un cercle donné.
42. Le quadrilatère complet.
43. Le cube : étude des symétries et des axes de répétition. Epure lorsque l'une des diagonales est verticale.
44. Produit de deux homothéties. Applications.
45. Problèmes sur les plans tangents à deux ou trois sphères données.
46. La similitude plane. Traiter un ou plusieurs exemples d'application.
47. Géométrie plane : figure transformée d'un cercle par similitude. Similitudes faisant se correspondre deux cercles donnés. Applications.
48. Affinité orthogonale ; application à l'ellipse.
49. Propriétés angulaires de l'inversion. Applications.
50. Propriétés communes à l'inversion et à la symétrie par rapport à une droite (géométrie plane).
51. Inverse d'un cercle et des régions qu'il détermine.
52. Application de l'inversion : 1) à la démonstration d'une propriété d'une

figure ; 2) à un problème de construction ; 3) à la recherche d'un lieu géométrique ou d'une enveloppe.

53. Transformation d'un faisceau de cercles par inversion (conservation et réduction à des formes remarquables).

54. Géométrie plane : étude des cercles passant par un point donné A et coupant un cercle donné C sous un angle donné.

55. Etude des cercles tangents à une droite donnée et orthogonaux à un cercle donné.

56. Surface conique à directrice circulaire. Sections circulaires. Symétries.

57. Régions du plan limitées par une conique (ellipse, hyperbole et parabole). Le mode de définition de la conique est laissé au choix de la candidate.

58. Tangentes menées d'un point à une parabole. Théorème de Poncelet. Applications.

59. Problèmes relatifs à une hyperbole définie par ses asymptotes et un point.

60. Problèmes sur les tangentes à une conique définie par un foyer, la directrice associée et l'excentricité.

61. Sections hyperboliques du cône de révolution.

62. Etude des cônes de révolution passant par une parabole donnée.

### *Géométrie descriptive*

63. Géométrie descriptive : exemples de problèmes d'angles et de distances illustrant les méthodes générales.

### *Mécanique*

64. Composition de deux mouvements vibratoires de même période et de même support.

65. Exemples d'équilibre d'un point matériel pouvant glisser avec et sans frottement sur une courbe plane.

### *Cosmographie*

66. Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes.

Une remarque préalable s'impose sur l'esprit dans lequel ces exposés doivent être traités. Il ne s'agit pas, comme pour l'Agrégation, de faire une leçon devant une classe déterminée, cette leçon devant s'insérer, au moins théoriquement, dans un ensemble de leçons, les unes antérieures (dont les résultats sont en général sommairement rappelés au début de la leçon), les autres postérieures (ce qui permet en fin de leçon d'indiquer ce qui suivrait). Pour l'exposé du C.A.P.E.S., la candidate doit au contraire montrer les connaissances qu'elle possède sur le sujet qui lui est proposé, en restant toutefois dans le cadre du programme des classes terminales du second degré. C'est ainsi qu'à propos du quadrilatère complet, on peut parler de la parabole inscrite, sans chercher à ranger les connaissances ainsi exposées suivant l'ordonnance d'un cours fait devant une classe. Il va de soi que les connaissances nécessaires à l'exposé, mais qui n'en font pas partie, peuvent être rappelées en commençant, aussi brièvement que possible.

Dans toute la mesure du possible, les exposés proposés aux candidates ne se bornent pas à la reproduction d'une tranche de cours ; ils exigent un effort de construction. Lorsque des exemples sont demandés, ceux-ci doivent être judicieusement choisis de manière à dégager ou à illustrer les méthodes générales : ils ne doivent pas être choisis au hasard, comme le Jury en a eu trop souvent l'impression. Il est iné-

vitale que certains exposés paraissent plus difficiles que d'autres ; mais les candidates doivent savoir que si un exposé difficile bénéficie d'une certaine indulgence pour des erreurs ou omissions peu graves, ces mêmes erreurs ou omissions sont fortement pénalisées dans un exposé facile.

Enfin, il est absolument indispensable que les candidates ne sortent pas du sujet qui leur est proposé, soit inconsciemment, soit sciemment, pour occuper le temps. La note attribuée à l'exposé n'est pas fonction du temps passé au tableau par la candidate, mais, avant tout, des connaissances révélées sur le sujet proposé. Qu'il soit permis de souhaiter également que, toutes choses égales par ailleurs, les candidates fassent preuve d'ordre et de soin dans leur exposé.

Voici maintenant les principales critiques sur les exposés faits par les candidates (les numéros renvoient aux numéros des exposés dans la liste de ceux-ci) :

4. dans le cadre du programme des Sciences expérimentales, on peut se dispenser de rattacher les combinaisons aux arrangements et aux permutations et faire une démonstration directe.

6. Le choix d'exemples convenables s'imposait ici. La candidate n'a pas su dégager les résultats généraux et a classé ses exemples suivant que le paramètre figurait seulement au premier membre des équations, ou seulement au second, ou au contraire dans les deux ; un tel classement ne s'impose en aucune manière. Ce qui est plus grave : la candidate ignorait la propriété qui s'attache à des droites dont l'équation dépend linéairement d'un paramètre.

11. Assez bon exposé, mais il importerait d'insister sur les définitions des limites, sur celle des asymptotes. Le cas d'échelles différentes sur les axes n'a pas été examiné avec assez de soin.

12. La candidate n'a manifestement pas compris la question. Dans de tels cas, le sens de variation se justifie le plus souvent par le théorème : « Une fonction monotone de fonction monotone est monotone. » La candidate s'est bornée à prendre des valeurs numériques sans même parler du sens de variation. En outre, sur l'exemple qu'elle avait choisi (fonction homographique de  $\sin x$ ), la réduction de l'intervalle a été très mal traitée.

13. Le rôle du choix de l'unité n'a pas été approfondi. Le tracé de la courbe :  $y = \sin x/x$  a été très mauvais ; la candidate ne calcule pas la dérivée, et annonce que les extrema de  $y$  sont atteints pour  $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ , au lieu de trouver les racines de  $\tan x = x$  ; elle ne se rend pas compte que la courbe est tangente aux deux branches d'hyperboles :  $y = \pm 1/x$  et comprise entre elles.

14. Exposé faible ; les définitions des limites sont mal sues, en particulier les quantités  $\epsilon$  et  $\alpha$  ont été régulièrement interverties. La candidate a fait intervenir la dérivée de  $f(x)$  pour l'étude de cette fonction quand  $x$  tend vers  $x_0$ , mais d'une manière peu compréhensible. Si la théorie générale des asymptotes n'est pas interdite, son emploi est inutile si on l'applique à des fractions rationnelles dont le dénominateur est linéaire ou à des racines carrées de trinôme du second degré.

15. Il est gênant de voir écrire dans cette leçon :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow \alpha$$

La nécessité d'introduire la notion de dérivée infinie en vue des applications géométriques n'a pas été soulignée, non plus que le fait que la relation avec la continuité doit alors être revue.

16. Exposé faible. La candidate ne s'aperçoit pas que sur son exemple :  $y = \frac{1}{4 \cos^2 2x} - 1$ , la période est seulement  $\frac{\pi}{2}$  et non  $\pi$ . La réduction d'intervalle a

été très mal traitée. D'autre part, une fois l'intervalle d'étude adopté, la résolution d'une équation telle que :  $y' = 0$  se fait sans intervention de  $2k\pi$ .

17. Exposé très mauvais. La candidate sort  $x^2$  du radical sans distinguer le signe de  $x$  et ne trouve ainsi qu'une asymptote (d'ailleurs fausse) ; elle élève au carré les équations irrationnelles, sans se préoccuper des conditions de validité d'une telle opération ; enfin, elle ne sait pas calculer la dérivée.

19. La candidate n'a pas compris le sens de certains termes employés dans la rédaction du texte de l'exposé. Pour elle une équation algébrique est de la forme :  $P(x) = 0$ , où  $P$  est un polynôme ; l'équation devient entière si les coefficients du polynôme sont entiers (!) ; enfin le paramètre en question est lui aussi (par analogie) devenu entier. La discussion devenait ainsi très originale, mais sans aucun rapport avec la question posée.

20. Exposé moyen ; outre un peu plus d'ordre dans l'exposé, il aurait fallu préciser dans quelles conditions toutes les primitives diffèrent par une constante, et montrer que, dans le cas général, les conventions de signe pour les aires ne sont pas arbitraires, mais résultent de la formule même à laquelle on veut aboutir.

21. L'exposé a manqué de rigueur ; la propriété fondamentale a été obtenue par division en  $n$  parties égales des segments  $(1, a)$  et  $(b, ab)$ , mais on ne peut affirmer sans démonstration que la somme d'un nombre (devenant infini) de quantités « négligeables » est elle-même négligeable. La démonstration par dérivation de  $\text{Log}(ax)$  est d'ailleurs plus rapide et correcte.

23. Exposé faible : les méthodes générales ne sont pas dégagées et les exemples sont mal choisis. Si l'emploi des substitutions  $x$  en  $-x$ ,  $x$  en  $\pi - x$  et  $x$  en  $\pi + x$  peut faciliter le choix de l'inconnue, il ne faut pas en déduire que  $\text{tg } x/2 = t$  reste le seul recours lorsque ces substitutions échouent ; particulièrement sur l'exemple adopté par la candidate :  $\text{tg } x + \sin x + \cos x + 1 = 0$ , où elle obtient, après passage à  $\text{tg } \frac{x}{2}$ , pour l'une des solutions  $44^\circ 54'$  au lieu de  $135^\circ$  ou de  $-45^\circ$ , la solution  $180^\circ$  passant en outre inaperçue.

25. L'exemple adopté par la candidate

$$\begin{cases} \cos x + \sin y = m, \\ \sin x = p \cos y, \end{cases}$$

quoique excellent, était un peu compliqué, ce qui masquait les méthodes générales.

26. La candidate a l'air d'oublier que les méthodes graphiques, lorsqu'elles sont applicables, fournissent une discussion très aisée ; elle oublie la période et résout :  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > 0$  avec :  $0 < \frac{\pi}{4} - 2x < \pi$  d'où (!) :  $-\frac{3\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$ . En outre, on peut admettre que le choix de  $y = \cos x$  comme exemple de variation de fonction était un peu simpliste.

27. La candidate ignore (ce qui est un défaut général) que la réciproque du système :

$$\begin{cases} A + B + C = \pi, \\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \end{cases}$$

nécessite seulement :  $A, B, C$  positifs et l'une des quantités  $a, b$  ou  $c$  positive.

36. Exposé facile et bien traité. Il aurait été intéressant de signaler que l'emploi des formules trouvées permet, dans la recherche des lieux :  $MA^2 \pm MB^2 = \text{Cte}$ , de ne pas s'occuper des réciproques.

38. Très mauvais exposé ; la candidate s'est bornée à faire une sorte de dictionnaire : un point, puis deux points... une droite, deux droites... Il fallait d'abord préciser le nombre de conditions nécessaires pour la détermination d'un cercle ; ensuite un fil directeur possible de l'exposé pouvait être les diverses méthodes de construction (définition du cercle, puissance, emploi de transformation telles que

homothétie, inversion...). Cette candidate a terminé son exposé par cette affirmation ahurissante : il n'y a que deux cercles tangents à une droite et un cercle, et que quatre cercles tangents à deux cercles !!!

44. La candidate oublie de considérer le cas où le produit des rapports d'homothétie est égal à 1 et affirme que les homothéties forment un groupe.

50. Exposé très convenable. Toutefois, il faudrait souligner que la propriété fondamentale commune aux deux transformations et caractéristique est que deux couples de points homologues sont cocycliques. Il aurait été intéressant (sans que cela puisse être exigé) de donner des applications basées sur la notion de transmuée d'une inversion, par exemple transformer deux cercles donnés par inversion en deux cercles égaux.

61. La candidate a démontré un grand nombre de résultats et ne s'est pas attachée aux propriétés intéressant les sections hyperboliques ; notamment, la construction des asymptotes a été rapidement traitée par le recours aux points à l'infini, ce qui est hors du programme de Mathématiques Élémentaires ; dans cette classe, on ne peut considérer que des points qui s'éloignent à l'infini, ce qui permet, en regardant l'asymptote comme position limite d'une tangente dont le point de contact s'est éloigné indéfiniment, de traiter la question. En outre, il n'est pas nécessaire que les candidates (ceci vaut aussi pour l'exposé 62) s'attachent à placer une conique donnée sur un cône de révolution donné, problème dont l'intérêt théorique ou pratique est contestable.

#### INTERROGATIONS

Ces interrogations comprenaient un ou plusieurs exercices, à propos desquels, si le besoin s'en faisait sentir, diverses questions pouvaient être posées. Il convient de rassurer les candidates ultérieures sur la façon dont étaient conduites les interrogations ; en aucun cas, le membre du Jury qui interrogeait la candidate, ne la laissait « sécher » sur l'exercice posé. Mais la note attribuée était fonction de la *contribution personnelle* apportée par la candidate à la solution, compte tenu évidemment de la difficulté de l'exercice.

Les observations qu'appellent ces interrogations sont très voisines de celles relatives aux exposés.

Les exercices d'arithmétique ont été dans l'ensemble correctement traités. En algèbre, les candidates (pourtant licenciées) auraient le plus grand intérêt à revoir les définitions précises des limites et de la continuité. Si les excès connus sous le nom de « trinômite » sont condamnables, l'excès inverse, rendant les élèves pratiquement incapables de comparer un nombre aux racines d'une équation du second degré, ne l'est pas moins ; ceci est en effet indispensable pour la discussion des équations ou inéquations irrationnelles du second degré ; à diverses reprises, il a été constaté que les candidates ne dominaient pas cette question. En ce qui concerne la variation des fonctions périodiques, le plus grand soin doit être apporté à la recherche de la période et à la réduction de l'intervalle grâce aux diverses symétries ; les candidates (qui ont bien dû construire des courbes en coordonnées polaires) ne devraient pas tâtonner ou aller au hasard dans une telle question.

En trigonométrie, que ce soit pour discuter des équations renfermant un paramètre, ou pour des inéquations, les candidates n'ont pas l'air persuadées de l'intérêt considérable présenté par les méthodes graphiques, lorsqu'elles sont applicables. En ce qui concerne les triangles, aucune candidate ne connaît les conditions précises pour que six quantités  $a, b, c, A, B, C$ , vérifiant les relations :

$$\begin{cases} A + B + C = \pi, \\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \end{cases}$$

soient les éléments d'un triangle.

En géométrie, les candidates sont toujours très surprises quand on leur demande une réciproque dans une question de lieu géométrique. Elles dominent mal l'emploi des transformations (inversion mise à part) : construire un centre de rotation ou de similitude devient un problème très ardu. Des configurations classiques (telles que tangentes issues d'un point de la directrice à une parabole en relation avec le foyer, ou bien asymptotes-foyers-directrices d'une hyperbole) sont mal connues. Des lieux classiques (comme le lieu des centres des cercles tangents à une droite et à un cercle) ont l'air d'être nouveaux pour les candidates ; il ne s'agit d'ailleurs pas, dans ce cas, d'exiger que les résultats soient sus, mais d'obtenir qu'ils soient retrouvés assez rapidement ; il est d'ailleurs impossible que des candidates, ayant tant soit peu préparé l'oral en faisant des exercices, n'aient pas rencontré de telles configurations.

#### RAPPORT SUR L'ORAL, Section masculine

Il ne saurait être question de publier au complet les sujets des 115 exposés, ni une analyse complète de la façon dont les candidats ont pu les traiter ; au surplus, cette étude ferait souvent un simple écho à celle qui vient d'être produite ci-dessus pour les candidates ; affirmons cependant que chaque épreuve suggère au Jury des réflexions particulières et que le même sujet, traité par des candidats différents, ne donnera pas toujours lieu à des réflexions du même ordre.

Les observations suivantes, dues à l'obligeance de nos examinateurs et choisies parmi les plus saillantes, marquent donc des tendances et proposent des conseils sans caractère impératif ; il serait vain d'espérer les opposer les unes aux autres, quand elles s'efforcent de souligner les aspects variés et même divergents que peut revêtir un même problème ; tout enseignement n'offre-t-il pas d'ailleurs une perpétuelle nécessité de concilier des contraires et l'activité d'un maître ne doit-elle pas s'inspirer avant tout de cet « esprit d'inquiétude » intellectuelle et pédagogique qui nous paraît être le trait essentiel du Second Degré ?

#### LISTE DES EXPOSÉS

1. Vecteurs : définition, équipollence, somme et différence, rapport de deux vecteurs parallèles.
2. Orientation du plan. Angles orientés de vecteurs, de droites. Lieu des points M tels que  $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$ ,  $(MA, MB) = \beta$ . Applications.
3. Angles orientés de droites ; antiparallélisme de deux couples de droites.
4. Lieu des points M tels que  $MA/MB = k$ . Applications dans le plan et dans l'espace.
5. Cercles orthogonaux dans le plan.
6. Applications de la similitude plane à la recherche de lieux et d'enveloppes.
7. Existence de la tangente en un point d'une ellipse. Propriétés caractéristiques. Générations tangentielles de l'ellipse. Exemples.
8. Ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle. Applications.
9. Notion de système de numération.
10. Technique opératoire de la division des entiers dans le système décimal.
11. Reste de la division d'une somme par un nombre ; divisibilité par 9 et par 11 dans le système décimal ; applications.
12. Fractions décimales. Définition. Condition pour qu'une fraction soit égale à une fraction décimale. Opérations élémentaires.
13. Premier exposé relatif aux nombres entiers positifs.

14. Etude de

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \quad aa' \neq 0$$

(les exemples proposés seront à coefficients numériques).

15. Fonction  $y = \text{Log } x$  ; variation, courbe représentative ; formule d'addition.

16. Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes et aux diverses époques de l'année.

17. Inégalités entre les faces et les dièdres d'un trièdre (on suppose traitée la question des trièdres supplémentaires).

18. Cercles passant par deux points et tangents à un cercle donné.

19. Branches infinies, directions asymptotiques, asymptotes de l'hyperbole.

20. Tangente en un point de l'hyperbole, existence, diverses propriétés caractéristiques, diverses générations tangentielles.

21. Inéquations trigonométriques simples.

22. Equilibre d'un point matériel sur une courbe, avec ou sans frottement.

23. Représentation plane de la surface terrestre, divers systèmes cartographiques.

24. Orthogonalité d'une droite D et d'un plan P, extension aux droites parallèles à D et aux plans parallèles à P. Applications.

25. Le cube — ses symétries — applications. Représentation d'un cube ayant une diagonale verticale.

26. Polaire d'un point par rapport à un cercle. Pôle d'une droite. Applications.

27. Applications de l'inversion supposée acquise, à des problèmes relatifs aux figures de l'espace : théorèmes, constructions, lieux, enveloppes. Faire un choix (qui se limite à un exposé d'une demi-heure).

28. Application de l'inversion à la démonstration de théorèmes.

29. Les polynômes. Définition. Identité. Addition. Soustraction. Multiplication.

30. Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Exemples numériques avec un paramètre.

31. Progressions géométriques. Applications.

32. Dérivées de la racine carrée d'une fonction. Applications à la variation d'une fonction.

33. Notion de différentielle d'une fonction, d'une variable, interprétation graphique, usages.

34. Probabilités simples. Applications.

35. Résolution d'un triangle connaissant les trois côtés.

36. Etude de systèmes de deux équations à deux inconnues, l'une des équations donne la somme ou la différence des inconnues, l'autre donne, soit la somme, soit le produit, soit le quotient de deux mêmes rapports trigonométriques des inconnues.

37. Multiples communs à deux ou plusieurs nombres. P.P.C.M. Applications (la décomposition en facteurs premiers n'est pas encore acquise).

38. Perpendiculaire commune à deux droites. Représentation en géométrie cotée.

39. Plan tangent en un point d'une sphère. Cône et cylindre circonscrit. Applications.

40. Projection orthogonale ou oblique sur un plan ou sur une droite. Projection des vecteurs.

41. Faisceaux harmoniques. Applications.

42. Lieu des points M du plan tels que  $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = C$ .

A et B étant deux points donnés  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux nombres donnés n'ayant pas la même valeur absolue.

43. Définition de deux figures égales dans le plan. Deux figures directement

égales peuvent se déduire l'une de l'autre, soit par une rotation, soit par une translation.

44. Produit de deux homothéties. Applications.

45. Similitude directe plane définie comme transformation ponctuelle. Centre de similitude.

46. Rotation dans l'espace définie comme transformation ponctuelle. Applications.

47. L'inversion dans le plan. Définition. Figure formée par deux points et leurs inverses. Conservation des angles.

48. Les définitions suivantes relatives aux coniques à centre sont-elles équivalentes : 1) lieu des centres des cercles passant par un point donné et tangentes à un cercle donné ; 2) lieu des points dont le rapport des distances à un point donné et à une droite donnée est constant.

49. Nombres premiers. Définition. Propriétés élémentaires. Applications (la décomposition d'un nombre en facteurs premiers n'est pas à exposer).

50. Décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers. Applications.

51. Premier exposé relatif aux fractions.

52. Définition et propriétés de la racine carrée à une unité près par défaut d'un nombre entier. Technique opératoire.

53. Quotient exact ou approché à  $1/10^n$  près de deux nombres entiers.

54. Montrer que pour un petit angle  $x$  exprimé en radians,  $x$  est une valeur approchée de  $\sin x$  et de  $\operatorname{tg} x$ ,  $1 - \frac{x^2}{2}$  est une valeur approchée de  $\cos x$ . Applications à des exercices de calcul numériques approchés. Emploi des tables dites tables S et T de logarithmes à l'usage des petits angles ; justification.

1. La notion de vecteur libre n'est pas dégagée ; il n'est pas dit que les opérations envisagées dans cet exposé sont définies pour les vecteurs libres (l'addition des vecteurs est d'ailleurs définie en trois étapes successives, et dans le plan seulement).

La commutativité de l'addition est signalée avant l'associativité, laquelle n'est même pas établie ; cela ne constitue pas une erreur logique, mais ce n'est guère recommandable.

L'absence de la notion d'élément neutre, d'opposé d'un vecteur, a été remarquée.

Pour la différence de deux vecteurs, l'existence est démontrée accidentellement, sans que le problème ait été posé ; l'unicité n'est pas établie.

Quant au rapport de deux vecteurs parallèles, le candidat s'est borné à en donner la définition, pour laquelle il se croit obligé d'orienter les supports des vecteurs. Il est vrai que, dès le début de l'exposé, le candidat avait cru à des vecteurs « positifs » ou « négatifs ».

2. « Soit P un plan. Si on oriente une perpendiculaire  $\Delta$  à P, le sens positif de rotation dans P sera celui qui va de la droite vers la gauche de l'observateur d'Am-père de  $\Delta$ . » Cette convention n'a pas de sens si l'on n'ajoute pas que le mobile considéré passe *devant* l'observateur.

Le candidat a défini la « détermination principale » d'un angle de vecteurs comme un angle compris entre 0 et  $2\pi$  ; sa définition est imprécise aux bornes : veut-il dire que  $0 \leq \alpha < 2\pi$  ?

En outre, cette notion est inutile, et même nuisible. Elle a conduit le candidat à des erreurs.

Il convenait de mettre en évidence les propriétés du groupe des angles de droites et du groupe des angles de vecteurs.

Les problèmes élémentaires de lieux géométriques sont maltraités (introduction de demi-angles de droites, orientations fantaisistes, réciproques, etc...).

6. S'il existe une similitude S de centre o, telle que  $M' = S(M)$  et  $N' = S(N)$ ,

il existe aussi une similitude  $S'$  de centre  $o$  telle que  $N' = S'(M)$ ,  $N'' = S'(M')$ . Ce point si souvent utile n'est pas mis en évidence.

7. Le candidat cherche d'abord l'intersection de l'ellipse avec une droite issue de  $M$  (point fixé sur l'ellipse), ce n'est pas dans le sujet, cela peut aussi donner une idée fausse, car on sait déterminer des tangentes pour des courbes où cette construction ne réussirait pas.

Il ne prouve pas l'existence de la tangente, il ne dit pas pourquoi il obtient la bissectrice extérieure de  $\widehat{FMF'}$ .

9. Dans cet exposé, toute la théorie des nombres entiers peut être supposée acquise. Le premier résultat à établir est le suivant : si  $b$  est un nombre  $> 1$ , et  $k$  un nombre  $> 1$ , tout entier compris (au sens large) entre  $0$  et  $b^k - 1$  se met d'une manière et d'une seule, sous la forme  $\sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$  où  $0 \leq r_i \leq b - 1$  pour  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ .

13. Le candidat a d'abord posé, comme axiomes, les principales propriétés de l'addition, de la multiplication, et de la relation d'ordre. Ensuite, il les a justifiées par référence avec la notion de collection d'objets. Au niveau où se trouvait placé l'exposé, ces justifications étaient insuffisantes. Par exemple, il fallait montrer que le résultat des opérations était indépendant des collections représentatives choisies. L'addition doit être définie, non par la réunion des collections, mais par leur « somme », car la réunion ne convient pas si les collections considérées sont non disjointes ; ou alors, il fallait se limiter aux collections disjointes. Le produit devait être défini par référence aux collections produits ; ou du moins devait-on faire appel à la notion de couple. On n'a pas bien su si la notion de « suivant » et de « précédent » était une notion première ou une notion déduite des notions premières. Etc...

16. Un candidat suppose les arcs de cercles proportionnels à leurs flèches ; il néglige les questions d'orientation ou l'examen des divers cas de figure ; il oublie que la durée du jour et la durée de la nuit ont pour somme 24 heures ; il esquisse à peine la définition de la zone boréale et des tropiques.

Un autre candidat calcule cette « inégalité », mais il n'explique pas bien son calcul ; quelques raisonnements géométriques faisant intervenir la sphère locale s'imposeraient. Il donne sans explications les dates des équinoxes, le fait qu'elles coïncident avec de fortes marées (mieux vaudrait ne pas soulever cette question) ; il n'explique pas non plus cette phrase : « au solstice, le soleil est stationnaire », ni celle-ci : « pour l'hémisphère austral, il suffit de changer les dates ».

24. Exposé très faible et très obscur. Le candidat adopte la définition suivante : une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan. Il établit, ou presque, qu'il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan, mais à aucun moment il ne se préoccupe de l'existence. D'autre part, l'idée générale qui permettrait de résumer les propriétés en une phrase, à savoir : l'orthogonalité d'une droite et d'un plan ne dépend que de la direction de ces éléments, n'est pas mise en évidence.

28. Le Jury aimerait que les candidats recherchent dans leur préparation des applications autres que les classiques théorèmes de Ptolémée et de Feuerbach. L'exposé entendu, d'un rythme rapide, satisfaisant dans son ensemble, reste très inégal ; l'étude de la disposition des points dans le théorème de Ptolémée est encore escamotée ; l'application à la recherche des formes réduites d'un faisceau de cercles a valu au candidat un bon point.

30. Signalons, une fois de plus, que les relations  $ab' - a'b = 0$  et  $bc' - b'c = 0$  n'entraînent pas nécessairement  $ac' - a'c = 0$ , lorsque  $b = b' = 0$ .

34. Nous invitons les candidats à réfléchir sur la notion de probabilité. La définition classique, rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, exige quelques explications.

Un problème, dans lequel on n'a pas précisé avec soin ce qu'on entend par événements également probables, n'a aucun sens ; il faut insister sur le fait que les divers cas possibles sont également probables, car il y a là l'apparence d'un cercle vicieux ; à ce niveau, on le justifie en se référant à l'expérience.

Il serait bon aussi, à l'aide d'exemples bien choisis, de faire allusion au théorème des probabilités totales et au théorème des probabilités composées.

36. Exposé très lent, maladroit et sans précision. Signalons, entre autres, quelques fautes qui ne seraient pas pardonnées à des élèves :

1)  $X$  étant l'inconnue, soit à résoudre  $\cos X = a$ , il faut  $-1 < a < 1$  (au lieu de  $-1 \leq a \leq 1$ ), soit  $\varphi$  tel que  $\cos X = \cos \varphi$  (au lieu de  $\varphi$  défini par  $\cos \varphi = a$   $0 \leq \varphi \leq \pi$ ).

2)  $\log ab = \log a + \log b$  sans s'occuper des signes respectifs de  $a$  et de  $b$ .

37. Un candidat fait un bon exposé, correctement traité, mais il ne semble pas le dominer. On peut souhaiter renouveler l'intérêt de ce sujet : les propriétés du P.P.C.M. pourraient être un peu systématisées en introduisant, ou tout au moins en dégageant *a posteriori*, l'idée d'opération dans un ensemble, avec ses qualités associative, commutative, distributive.

50. Comme beaucoup d'autres, ce candidat croit qu'un multiple d'un nombre contient les facteurs premiers de ce nombre avec un exposant au moins égal et c'est tout ; il devrait pourtant savoir qu'il peut contenir bien d'autres facteurs encore.

## CONCLUSIONS

Le niveau moyen de ce concours ne paraît pas sensiblement différent du niveau des années précédentes, et nous serions heureux de le voir s'élever peu à peu. Il conviendrait avant tout qu'un plus grand nombre de candidats songe à l'aborder ; une réforme de la licence nous paraît en être une condition préalable ; les certificats qui constituent la licence d'enseignement de Mathématiques — et en particulier ceux de calcul différentiel et intégral et de physique générale — ont pris, dans la plupart des Facultés, une orientation et un volume qui exigent pratiquement deux années d'études et qui les détournent de leur rôle utile dans la formation des maîtres du Secondaire.

Mais une préparation plus organisée et plus poussée devrait aussi permettre aux candidats de reprendre contact avec les programmes des classes du 2<sup>e</sup> cycle des lycées et collèges et de réfléchir en temps utile à l'enseignement qu'ils seront bientôt appelés à donner.

Il nous faut cependant reconnaître sans excès d'optimisme, que la plupart des candidats admis aux épreuves théoriques de la session normale de mai-juillet 1956 sont capables de faire rapidement de substantiels progrès et d'acquérir de réelles qualités pédagogiques.

Sur ce dernier point, cette promotion sera beaucoup moins favorisée que les promotions précédentes, puisqu'au lieu de bénéficier d'un stage effectif d'une année dans un Centre pédagogique régional, ces jeunes gens ont dû, par les nécessités du moment, être « externes », c'est-à-dire chargés d'un service d'enseignement de douze heures par semaine dans un lycée et plus souvent dans un collège, parfois très éloigné du chef-lieu académique. Leur bonne volonté et le dévouement de leurs conseillers pédagogiques leur permettront, nous n'en doutons pas, de tirer le meilleur parti de cette situation délicate.

P. DEDRON et L. THIBERGE.

## VII. LA VIE DE L'ASSOCIATION

### Réunion du Comité (24 janvier 1957)

Le 24 janvier 1957, à 15 h. 30, au Lycée Saint-Louis. Etaient présents : MM. BAY, CHAZAL, FOUCHÉ, GIRARD, ITARD ; Mlle MASSON ; MM. BIGUENET, EDDE ; Mlle FÉLIX ; MM. HUISMAN, LEGRAND, MINOIS, SIROS ; Mlle VERVAECKE ; MM. ROSTOLLAND, THÉRON, WALUSINSKI.

Excusés : MM. FAVRELLE, MONJALLON, THOVERT.

M. WALUSINSKI rend compte de ses différentes démarches relatives à la modification des programmes : lettres au Ministre (sans réponse), à M. l'Inspecteur général ROBERT (réponse ci-après), conversations avec M. VIATTE, député, et M. LONGCHAMBON. Tout cela a certainement été fort utile, et le sera encore : M. LONGCHAMBON en particulier est tout disposé à donner tout son appui à l'A.P.M. pour le développement des études scientifiques.

M. LEGRAND fait ensuite le point de la situation financière : les chiffres montrent qu'il faut prévoir une augmentation de la cotisation ou une réduction du volume des *Bulletins* : la question sera posée à l'Assemblée générale.

Le Comité fixe l'ordre du jour de l'Assemblée générale (Cf. la feuille de convocation).

M. WALUSINSKI fait part ensuite de différents projets. Constatant que l'Assemblée générale est relativement peu suivie, il pense qu'il serait possible d'organiser d'autres rencontres, à Lille, par exemple, les 8 et 9 mai, avec visite d'usine. Ce projet intéressant semble cependant devoir être abandonné.

Un autre projet est plus réalisable : il y aura, du 14 au 17 avril, sous le patronage de M. DANJON, Directeur de l'Observatoire de Paris, une session d'études sur l'Astronomie et son enseignement.

Enfin, la question du matériel d'enseignement est de nouveau évoquée : on pourrait faire des propositions à la Section Mathématique du Palais de la Découverte, nos collègues FOUCHÉ et BIGUENET auraient des appareils à présenter. D'autre part, M. BRUNOLD doit s'intéresser à la question : il avait chargé WALUSINSKI et BIGUENET de réunir une documentation sur le matériel mathématique.

La séance est levée à 17 h. 15.

### POUR L'ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

#### Rapport général sur l'activité de l'A.P.M.

L'abondance des questions à traiter dans ce rapport m'évite toute précaution oratoire : par son activité très variée, notre Association a montré et continuera à montrer que rien de ce qui concerne l'enseignement des Mathématiques ne lui est étranger.

1. EFFECTIFS ET COTISATIONS. — Les effectifs de l'A.P.M. ont continué à croître : lors de l'Assemblée générale 1956, l'effectif était de 2 207 cotisants ; il s'élève maintenant à 2 358. C'est bien, mais ce n'est pas suffisant. Nous nous étions en effet fixé l'objectif des 2 500 adhérents en 1957. Objectif raisonnable, car les effectifs du personnel enseignant sont croissants (même s'ils ne le sont pas assez) et il y a de larges secteurs non prospectés. Tout l'effort possible a-t-il été fait, à ce propos, par chacun de nous ? Un encart « publicitaire » avait été inséré dans le *Bulletin* 179 d'octobre ; a-t-il été affiché dans tous les établissements ? Très rares sont les éta-

blissements où nous avons connaissance d'un correspondant désigné, et pourtant ce correspondant serait bien utile pour la propagande aussi bien que pour le fonctionnement normal de l'Association.

Je proposerai d'insérer dans le *Bulletin* d'octobre 1957 une fiche à remplir par tous les adhérents et à nous renvoyer avec la cotisation. Nous pourrions ainsi mieux connaître tous les adhérents, les ordres d'enseignement dans lesquels ils enseignent et aussi quels sont leurs vœux.

En nous adressant directement aux correspondants, nous pourrions sans doute éviter quelques incidents qui se sont produits à propos du renouvellement des cotisations. Celles-ci sont en effet payables dès la rentrée d'octobre et *avant* le 1<sup>er</sup> décembre. Des retardataires se sont plaints d'irrégularités ou de manques dans la livraison des *Bulletins* qui leur étaient dus. Mais, en toute équité, nous aurions pu nous plaindre aussi des complications que ces retardataires ajoutent à un travail administratif au fond assez ingrat. Disons plutôt que, tous, nous regrettons ces incidents.

Quoi qu'il en soit, il est indispensable ici de dégager la complète responsabilité de notre Trésorier, M. LEGRAND, qui assure sa tâche avec un dévouement et une ponctualité exemplaires. (Vote sur le rapport financier : question n° 2). Je tiens à le remercier au nom de tous. Nous pouvons faire mieux : en pensant à sa tâche future, j'adresse l'appel le plus pressant à tous les Collègues pour qu'ils règlent leurs cotisations avant le 1<sup>er</sup> décembre. Ils éviteront ainsi l'envoi d'une lettre de rappel où certains ont vu une mesure vexatoire, alors qu'il s'agissait seulement de régulariser leur situation à leur avantage. Ils faciliteront aussi le travail de M. TOURNADE qui, au Musée Pédagogique, assure avec une constante bonne humeur la mise à jour du fichier et les expéditions.

Nos Collègues liront attentivement le rapport financier de M. LEGRAND. Il en ressort avec évidence qu'une augmentation de cotisation est nécessaire pour maintenir nos publications telles qu'elles sont. Les moyens financiers adéquats sont la condition d'un travail réel de l'A.P.M. ; je reviendrai sur cette question en traitant de l'orientation générale qu'il faudrait donner à notre activité.

2. LA QUESTION D'ACTUALITÉ. — Il s'agit du développement de l'enseignement scientifique. Les milieux les plus imperméables aux questions d'enseignement ont fini par entendre quelques-uns des cris d'alarme jetés par des personnalités éclairées et persévérantes. Tant mieux. Cela ne signifie pas que l'opinion publique ait une conscience claire des besoins et des buts de l'enseignement scientifique, mais notre rôle est justement de donner un contenu valable aux bonnes intentions affirmées de toutes parts.

Il y a eu, il y aura des obstacles à surmonter. L'arrêté du 23 novembre portant modification en cours d'année des programmes des classes préparant au baccalauréat en est un exemple. Si notre intervention immédiate, dès l'annonce du premier projet n'a pas évité tous les inconvénients d'une telle mesure, nous avons tout de même contribué à en limiter les dommages. Cela aura aussi contribué à mettre en éveil notre vigilance, les déclarations ministérielles en faveur de l'enseignement scientifique risquant de nous faire prendre des promesses pour des réalisations.

En attendant la complète refonte des programmes et des horaires qui permettra de revenir sur les effets de l'Arrêté du 23 novembre, nous avons donc accueilli la promesse des quatre heures dans *toutes* les classes du premier cycle à la rentrée d'octobre 1957... et nous avons attendu les textes précisant les modalités d'application. A vrai dire, nous attendons toujours et n'avons jusqu'ici recueilli que des informations alarmantes : les quatre heures dans toutes les classes du premier cycle se réduiraient à quatre heures dans les seules Sixièmes en octobre 1957. Nous demandons audience à M. le Directeur Général du Second Degré, à la date du 5 mars ; au moins serons-nous en mesure d'informer nos Collègues avec précision sur les projets de l'Administration.

Nous connaissons depuis longtemps l'accueil qui est fait à nos demandes. On

commence par reconnaître leur bien-fondé, tant il est évident qu'on ne peut faire un travail sérieux avec 40 élèves de Cinquième ou de Quatrième en 2 h. 1/2 par semaine. Le travail complémentaire à la maison est d'un rendement très faible ; il faut apprendre aux enfants à travailler, laissés à eux-mêmes, ils perdent leur temps et... ennuiet leurs parents. Il faut donc compléter les heures de classe par des séances de travaux pratiques où, avec un faible effectif, le maître pourra efficacement diriger le travail individuel. Bon, là-dessus tout le monde, ou presque, est d'accord. Viennent ensuite trois objections d'inégale valeur.

« On va surcharger l'horaire des élèves. » Non, puisque l'allègement du travail à la maison compensera largement en temps l'augmentation de l'horaire des classes, et le rendement du travail sera décuplé.

« On manque déjà de professeurs ; si les horaires augmentent, que sera-ce ? » C'est une difficulté, évidemment. Mais croit-on qu'on pourra améliorer le recrutement des maîtres dans l'avenir si on ne change rien à l'enseignement scientifique de base dès aujourd'hui ? *Provisoirement*, les professeurs consentent déjà et consentiront volontiers un effort accru, s'ils ont l'assurance : qu'on ne profitera pas de leur bonne volonté pour méconnaître leur statut actuel (qui doit être maintenu), qu'on tiendra compte, au contraire, de l'effort exceptionnel consenti par eux à titre provisoire et justement pour que ce provisoire ne dure pas. Aussi, en fin de compte, pensons-nous que la difficulté réelle du manque de professeurs peut être considérablement diminuée en intéressant les professeurs eux-mêmes au succès de cette renaissance scientifique.

Mais alors on a déjà deviné la troisième objection : « Toute réforme coûte cher ». Cette objection, elle, ne vaut rien. Nous savons bien que l'Etat ne peut investir des capitaux dans toutes les directions à la fois. Mais nous voulons espérer qu'un minimum de réflexion fera comprendre aux responsables de la répartition des crédits qu'il est plus sage d'investir des fonds pour former les scientifiques de l'avenir, plutôt que de maintenir, par exemple, des subventions à la betterave ou à l'alcool, pour ne rien dire de dépenses encore plus importantes et encore plus malfaisantes. Malheureusement, nous ne disposons pas de moyens puissants pour influencer l'opinion publique. Utilisons au moins ceux qui sont à notre portée. Le Bureau de l'A.P.M. est intervenu dans ce sens auprès de la Commission de l'Education Nationale de l'Assemblée Nationale, auprès du Sénateur LONGCHAMON, Président du Conseil Supérieur de la Recherche Scientifique, auprès de l'Académie des Sciences. A l'échelon local, nous devons exposer la question aux Associations de Parents d'Elèves, aux journaux, aux Assemblées locales, etc...

Dénouons certaine façon de diluer les responsabilités. Nous venons d'en avoir un exemple typique avec le non-lieu qui clôt l'enquête sur la mort tragique du Professeur ESCLANGON : le juge d'instruction, reconnaissant qu'aucune faute n'avait été commise, a conclu que la seule cause de l'accident était la vétusté du matériel. Officiellement, il n'y a donc pas de responsable. En fait, nous le sommes tous, dans la mesure où, citoyens à part entière (théoriquement), nous n'avons pas su imposer à temps une politique de hauts crédits à l'enseignement, et tout particulièrement à celui des sciences.

Si, demain, la pénurie du personnel scientifique accule l'activité économique et industrielle de ce pays à la déchéance complète, n'y aura-t-il, officiellement, pas de responsable ?

Sauf modification demandée par l'Assemblée générale du 14 avril, la ligne d'action de l'A.P.M. reste donc, sur ce problème, la suivante :

a) nous demandons la parité de l'enseignement des Mathématiques et du français dans les classes du premier cycle ; cela signifie en principe l'heure quotidienne de Mathématiques ;

b) cet horaire doit faire une place aux séances de travaux pratiques avec doublement des effectifs ;

c) l'urgence de l'amélioration de l'horaire est égale dans toutes les classes ; par conséquent, si des paliers de réalisation devaient être ménagés (la pression hostile à l'enseignement scientifique ayant été trop forte), nous demanderons que l'amélioration de l'horaire soit répartie entre toutes les classes du premier cycle, en particulier par l'organisation des travaux pratiques avec dédoublement. (Voir, feuille de vote, question n° 5).

3. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES. — Indépendamment des urgences que l'actualité fait apparaître, l'A.P.M. a manifesté de bien des manières son activité pédagogique.

Les journées d'études de Sèvres (2-4 novembre 1956) ont été suivies avec intérêt. Nous en publions un compte rendu sommaire dans ce numéro. On peut d'ailleurs penser qu'en dehors des conférences ces réunions ont l'avantage essentiel de permettre des échanges mutuels, de fonder de façon concrète et vivante l'esprit de coopération qui est et qui doit être celui de l'Association.

Cet esprit s'est manifesté dans le travail de nos Commissions. Je renvoie aux rapports de SIROS sur les programmes, de CHAZAL sur la formation des maîtres. Mentionnons, pour mémoire, la participation de bon nombre d'entre nous, au titre de l'A.P.M. à des Commissions variées de l'Institut Pédagogique (films, matériel d'enseignement, etc...) ; nous sommes à la disposition de tous les Collègues pour leur donner des renseignements sur ces Commissions et pour transmettre leurs vœux.

Les relations de l'A.P.M. avec l'Union des Physiciens et l'Union des Naturalistes se sont manifestées en particulier par la publication d'un vœu commun (Cf. *Bulletin* 179).

Les relations avec nos Collègues d'autres pays se sont développées, encore que ces liaisons restent, à mon avis, trop limitées et trop épisodiques. Il est permis de souhaiter qu'avant le Congrès international des Mathématiques à Edimbourg en 1958, une étude de ce problème permettra d'aboutir à une réalisation. Faisons une mention spéciale de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques ; les participants aux journées de Sèvres ont apprécié les contributions de leurs représentants ; nous sommes plusieurs à apprécier et l'amitié de ceux-ci et l'intérêt de leur réunion annuelle.

Les relations de l'A.P.M. et de la Société Mathématique de France se sont manifestées par l'organisation des conférences pour les professeurs qui ont été très suivies. En 1955-56, huit conférences ont traité de l'algèbre moderne ; en 1956-57, se déroule un cycle de dix conférences sur la topologie. Au nom de l'A.P.M., j'ai remercié la S.M.F. lors de son Assemblée du 25 février. J'ajoute ici nos remerciements à tous les conférenciers et en particulier à M. G. CHOQUET, qui a pris la part essentielle dans cette organisation. Je ne cite ici que les faits ; je reviendrai plus loin sur la signification que doit avoir, à mon sens, cette collaboration avec la S.M.F.

Enfin le Comité a pris l'initiative d'organiser, du 14 au 17 avril, trois journées d'études sur l'enseignement de l'Astronomie. Je remercie M. DANJON, Directeur de l'Observatoire de Paris, d'avoir bien voulu accepter le patronage de ces réunions.

4. « BULLETIN ». — Le développement donné au *Bulletin* répond à une double préoccupation : permettre à tous les Collègues de profiter du travail pédagogique et culturel de chacun, affirmer de façon publique la place de la culture mathématique dans un enseignement général. Reste à savoir si nous avons, au moins partiellement, réussi : souhaitons que l'Assemblée générale permette à tous de formuler avis, critique et suggestions.

Je donnerai ici très simplement mon avis personnel sur les trois points suivants : périodicité, nombre de pages, contenu.

a) Je plaiderai coupable pour les retards des *Bulletins* depuis le 1<sup>er</sup> octobre 1956. Seule circonstance atténuante, l'abondance des tâches diverses à mener de front. Ce n'est pas une excuse, mais il faut en tirer la leçon : le prochain Bureau devra examiner en détail l'organisation de son travail pour un meilleur rendement.

b) L'abondance des articles, signe évident de vitalité, a conduit à un volume total

à l'extrême limite de nos possibilités financières. Nous n'avons pu affronter ces dépenses que grâce aux réserves antérieures. Voilà qui suffit à justifier, à mon avis, une adaptation du montant de la cotisation au prix de revient de nos publications.

c) Car, même si le contenu des *Bulletins* n'a pas été aussi équilibré qu'il était souhaitable, des restrictions en quantité de pages ne seront pas le moyen de satisfaire la grande variété des goûts et des préoccupations des Collègues, ni de répondre aux exigences du moment quant au renouvellement de notre pédagogie.

On a critiqué la place donnée à la publication des conférences sur l'Algèbre et la Topologie. Précisons encore une fois, à ce propos, que personne ne veut introduire de force dans nos classes telle conception des Mathématiques plutôt qu'une autre. Certains sujets traités peuvent même n'avoir aucun rapport (en apparence) avec nos programmes. Mais pouvons-nous enseigner les éléments en ignorant systématiquement les Mathématiques de notre temps, celles *qui se font* ? N'est-il pas indispensable pour les conseils d'orientation que nous sommes amenés à donner à nos élèves, pour la conscience que nous devons avoir du rôle des Mathématiques dans la science de notre temps, que nous soyons au fait de l'évolution de ces Mathématiques ? Est-il tellement certain que notre enseignement le plus élémentaire ne puisse en tirer profit ? Quant à moi, je suis persuadé que ces études peuvent stimuler une réflexion originale dont le renouvellement de notre pédagogie a le plus grand besoin.

Cela n'empêche pas que certaines rubriques ont été insuffisamment représentées dans nos sommaires. Des expériences réelles faites dans les classes du premier cycle, une documentation plus complète sur les ouvrages et articles qui paraissent devoir être publiés. Avons-nous trop peu insisté pour obtenir ce genre d'articles ? Le fait est que de telles études sont rares. Mais que les Collègues qui le déplorent n'en tirent pas argument contre les auteurs des articles insérés à qui nous devons au contraire exprimer notre gratitude.

Les rapports officiels, les énoncés de concours et d'examens doivent être publiés. Mais ces textes sont parfois volumineux et il faudra que l'Administration participe aux frais que cela entraîne.

Une économie pourrait être réalisée pour le sujet national de baccalauréat : le fascicule des *Annales* pourrait être remplacé par la publication des principaux sujets officiels dans les *Bulletins* de septembre et de décembre. L'Assemblée générale devrait dire son avis sur cette proposition (*Voir feuille de vote, question 4*).

A quelques remarques près, concernant l'avenir, l'ensemble de ce qui précède dresse le bilan aussi exact que possible de la vie de l'A.P.M. depuis la précédente Assemblée générale. Un premier vote global dira si nos Collègues approuvent le travail accompli (*Question 1*).

5. ORIENTATION GÉNÉRALE. — En guise de conclusion, je voudrais formuler brièvement une orientation générale de l'activité de l'A.P.M. telle que je la conçois ; c'est ouvrir le débat de l'Assemblée générale.

Je ne reviens pas sur la question urgente de l'horaire déjà traitée. Mais à ces considérations de stricte actualité s'ajoutent celles qui sont relatives à la réforme générale de l'enseignement. Dans la mesure où cette réforme en sera véritablement une, ne devra-t-elle pas signifier révision complète des buts et des méthodes de l'enseignement des Mathématiques ? Quant à moi, je crois que nous devons aborder ces problèmes avec courage et lucidité.

Le courage concerne la révision de nos conceptions. L'enseignement du second degré pour tous (et ici j'entends l'enseignement du second degré au sens large, technique, enseignement professionnel et court compris) exige une adaptation et une grande diversification de notre pédagogie. Aucune recherche pédagogique sérieuse ne doit être récusée *a priori*. On a souvent vu se manifester une opposition conjointe à certain recours au réel dans les périodes d'initiation et à l'introduction pourtant prudente des notations et de l'esprit des Mathématiques modernes dans les classes

du second cycle. Je crains que ces oppositions ne manifestent souvent une certaine appréhension devant des changements où l'on imagine que va se perdre le goût de la rigueur et son éducation en même temps que l'aptitude à utiliser les connaissances mathématiques. Personnellement, je crois ces appréhensions non fondées, s'il reste entendu que les recherches pédagogiques les plus libres ne doivent pas aboutir à l'élaboration d'une doctrine officielle qui serait imposée de force. Il reste essentiel que chaque professeur puisse se forger sa pédagogie, c'est-à-dire la meilleure.

Dans le même esprit nous devons étudier avec soin le contenu et surtout les méthodes du futur enseignement moyen, puis en tirer les conséquences quant au personnel le mieux qualifié pour dispenser cet enseignement.

La lucidité signifie que nous devons prendre mieux conscience du rôle et de la nature des Mathématiques dans la science moderne, et, par conséquent, dans la culture. Il faut donc que tout en continuant d'assurer les lourds services d'enseignement, nous gardions le contact avec les Mathématiques vivantes : celles qui bourgeonnent dans toutes les directions à la fois, celles qui s'appliquent à des secteurs de plus en plus nombreux de l'activité humaine. Et il faut tout cela pour notre propre culture et pour notre enseignement.

Notre programme de « revendications » quant à la place des Mathématiques dans la réforme générale doit donc être ambitieux, à la fois pour les horaires et pour les programmes (en allégeant du vieilli on peut pousser très loin). Cela ne veut pas dire qu'il faut manifester une sorte d'impérialisme des Mathématiques ; mais à côté, et en coopération étroite avec l'apprentissage de la langue maternelle, les Mathématiques sont un pilier essentiel de la culture au  $xx^e$  siècle.

Oui, et cela même si les Mathématiques servent à quelque chose... Plongés dans l'expérience du monde sensible, nous formons les notions abstraites dont le développement est le domaine propre des Mathématiques. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que les Mathématiques s'appliquent à la description et à l'explication du réel. Pourquoi cette interaction de la réalité physique sur les Mathématiques ne serait-elle pas sensible dans notre enseignement ? Autrement dit, n'est-ce pas en faisant « vivre » les Mathématiques que nous les ferons aimer et étudier ?

En même temps ne traduirons-nous pas en actes la véritable unité des Mathématiques ? Bien placés entre la première initiation du Premier Degré et la spécialisation du Supérieur, nous devons faire comprendre que « de la Maternelle à la Sorbonne » ce sont les mêmes Mathématiques, langage de la nature plus ou moins élaboré.

Pratiquement, je pense donc qu'il faut être ambitieux pour l'A.P.M. : augmenter son caractère représentatif (y compris vers l'Enseignement Supérieur et vers les professeurs de Cours Complémentaires), développer son travail pédagogique et, par conséquent son *Bulletin*. Que celui-ci soit l'outil le plus pratique des professeurs pour se guider dans le travail pédagogique et dans le travail culturel. Ce faisant, réaliser enfin un enseignement scientifique important, en rapport avec les besoins de l'homme cultivé et ceux de la société moderne.

Ce travail important mérite un petit sacrifice, celui d'une cotisation permettant au Bureau, non de s'endormir dans l'opulence, mais de travailler avec efficacité. Il me paraît impensable que les Collègues puissent préférer, dans les circonstances présentes, une restriction de nos activités, qui serait en réalité une démission devant le devoir impérieux de développer l'enseignement scientifique.

Au contraire, je crois que nous pouvons, tous ensemble et dans toute la diversité désirable de nos tempéraments et de nos goûts, faire écho aux découvertes immenses sur l'atome et les galaxies en faisant mieux s'épanouir les multiples possibilités créatrices de l'esprit mathématique de nos élèves, de ceux qui, demain, à tous les stades de l'activité humaine, poursuivront l'œuvre grandiose de la science.

G. WALUSINSKI.

## Compte-rendu financier du 27 février 1956 au 30 février 1957

### RECETTES

|                                        |           |
|----------------------------------------|-----------|
| En caisse le 26 février 1956 .....     | 1 587 366 |
| Cotisations. Compléments et dons ..... | 1 512 791 |
| <i>Bulletins</i> .....                 | 34 162    |
| Recettes brutes de publicité .....     | 315 200   |
| Total des recettes .....               | 3 449 519 |

### DÉPENSES

|                                                                                         |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Frais d'impression des <i>Bulletins</i> n <sup>os</sup> 173, 175, 176, 177 et 178 ..... | 1 241 865 |
| Frais d'impression des <i>Bulletins</i> n <sup>os</sup> 179, 180, 181 .....             | 800 926   |
| Frais de secrétariat et de gestion .....                                                | 84 846    |
| Abonnement à l' <i>Education Nationale</i> et à la Société Mathématique .....           | 4 800     |
| Total des dépenses .....                                                                | 2 132 437 |

Actif au 23 février 1957 : 1 317 082 francs.

L'actif comprend un fonds de réserve de 5 930 francs concernant 33 rachats de cotisations.

La lecture du bilan montre l'importance des frais nécessités par l'impression du *Bulletin* ; aussi le Trésorier devant disposer pour l'an prochain d'un budget présentant deux millions de dépenses, s'inquiète pour le prochain exercice.

A ce jour, les membres de l'A.P.M. sont 2 358 ; leur cotisation annuelle de 600 francs assure des recettes se montant à : 1 414 800 francs.

Il y a donc un déficit à prévoir pour l'année 1957-1958, aussi le Trésorier demande à l'Assemblée générale de se prononcer sur deux points :

1<sup>o</sup> ou l'intérêt et l'importance des *Bulletins* de l'A.P.M. sont conservés et l'Assemblée doit voter l'augmentation de la cotisation à 800 francs, le complément des recettes étant trouvé par la publicité (Cf. question 3 a) ;

2<sup>o</sup> ou la cotisation est maintenue à 600 francs et l'Assemblée doit dire quels sont les allègements qui doivent être apportés dans les publications de l'A.P.M. (Cf. question 3 b).

Le Trésorier, porte-parole du Bureau, demande que le plus grand nombre de collègues manifestent leur opinion sur ces deux points. Le Bureau veut connaître par leurs réponses, qu'il espère nombreuses, si le développement qu'il a donné au *Bulletin* répond ou non à leurs aspirations.

Le Trésorier remercie les collègues qui ont facilité sa tâche en versant leur cotisation pour le 1<sup>er</sup> décembre, et en particulier ceux qui, mutés, ont songé à indiquer leur ancienne adresse. Pour éviter les difficultés financières, pour obtenir les meilleures conditions dans l'envoi des *Bulletins*, il exprime le vœu que tous les collègues se mettent en règle pour le 1<sup>er</sup> décembre, ainsi toutes les complications, pour les uns et les autres, s'aplaniront.

P. LEGRAND.

## Commission de formation des maîtres

Dans sa réunion du 18 octobre 1956, le Comité décidait la création, au sein de l'A.P.M., d'une Commission de formation des maîtres.

Cette Commission s'est réunie les 22 novembre 1956 ; 20 décembre 1956 ; 24 janvier 1957 ; 21 février 1957.

Ont participé aux travaux : BAY, BIGUENET, CHAZEL, CHAZAL, Mlle FÉLIX, FOUCHÉ, GIRARD, ITARD, MAGNIER, Mlle MASSON, ROSTOLLAND, THÉRON, WALUSINSKI.

La Commission est parvenue aux conclusions suivantes :

I. *Licence d'enseignement*. — La Commission a eu connaissance d'un projet de licence d'enseignement, établi par certains membres de l'Enseignement Supérieur, qui prévoit :

- a) un certificat de calcul différentiel ( $A_1$ ) ;
- b) un certificat de calcul intégral ( $A_2$ ) ;
- c) un certificat de physique ;
- d) un certificat de mécanique.

Un troisième certificat d'analyse (B) serait exigé pour l'agrégation.

Dans l'ensemble, ce projet donne satisfaction, eu égard à l'éclatement du certificat de calcul différentiel et intégral. Mais la Commission souhaite :

- a) un aménagement des programmes des certificats  $A_1$  et  $A_2$  ;
- b) la création d'un certificat de physique pour mathématiciens ;
- c) des options dans le certificat de mécanique (par exemple mécanique appliquée pour les professeurs de l'Enseignement Technique.

II. *Concours de recrutement*. — Les professeurs de l'Enseignement du Second Degré se recrutent par voie de concours :

- a) C.A.P.E.S. (ou C.A.P.E.T.).
- b) Agrégation.

Ces concours sont indépendants.

III. *Agrégation*. — Maintien du *statu quo*.

IV. *C.A.P.E.S.* — Le décret de création des I.P.E.S. donne satisfaction aux différents vœux émis par la Commission et soutenus par les représentants de l'A.P.M. au Conseil d'Enseignement du Second Degré et au Conseil Supérieur.

La Commission estime que, parallèlement à la préparation de la licence, les étudiants reçus aux I.P.E.S. doivent subir une formation pédagogique, les préparant à enseigner dans les classes de l'Enseignement du Second Degré.

Les rapports des derniers concours de C.A.P.E.S. montrent en effet que de nombreux candidats vivent uniquement sur les souvenirs de leurs études secondaires. Il importe donc d'organiser la préparation en permettant aux candidats de reprendre contact avec les programmes du second cycle des lycées et collèges et d'augmenter leurs connaissances pour leur permettre de dominer leur enseignement.

Cette préparation particulière pourrait se faire :

- a) sous forme d'exposés avec discussion sur les programmes du second cycle de l'Enseignement du Second Degré ;
- b) sous forme de conférences sur des sujets à préciser (arithmétique supérieure, géométrie sphérique, polyèdres, etc...).

Il semble qu'après une telle préparation, les candidats pourraient aborder, d'une part les épreuves théoriques, d'autre part le stage d'épreuves pratiques, avec fruit.

Le 6 mars 1957.

CHAZAL.

## ANNEXE

### Texte du projet de licence d'enseignement ès-sciences mathématiques

Le projet est conçu pour faciliter l'accès de la licence d'enseignement. Cette licence pourrait désormais se préparer en *deux années* (non comprise l'année de propédeutique).

Pour que cet allègement ne nuise pas à la qualité, les programmes ont été entièrement remaniés et assouplis ; on a tenté aussi de mieux les adapter aux besoins des futurs professeurs.

Dans la partie mathématique, notablement allégée, on s'est efforcé de faire prendre conscience à l'étudiant, des grandes structures des Mathématiques. Il faudra que cet enseignement soit extrêmement nourri d'exemples et applications.

On a mis l'accent sur les parties les plus propres à éclairer l'enseignement futur des candidats-professeurs ; en particulier on a remplacé une partie de la géométrie différentielle des surfaces par une étude des *notions de base de la géométrie élémentaire* (fondements, orientation, angles, mesure des grandeurs géométriques).

#### PLAN D'ENSEMBLE.

— Une année de Mathématiques générales : le programme n'est pas sensiblement changé ; toutefois, on y apporte quelques modifications (par exemple algèbre linéaire) pour l'adapter aux nouveaux programmes de C.D.I.

— Quatre unités sanctionnées par un examen (3 heures d'enseignement par unité) à savoir :

- deux unités de Mathématiques :  $A_1$ , calcul différentiel ; —  $A_2$ , calcul intégral.

Ces deux unités formelles ne sont nullement indépendantes et leur ensemble forme un tout homogène.

- une unité de Physique (des options choisies à l'intérieur du certificat de physique générale ; ou, ce qui serait préférable, un enseignement spécialement destiné à des mathématiciens.

- une unité de Mécanique (2 heures de mécanique rationnelle, allégée, avec un peu de relativité restreinte + 1 heure avec option, mécanique des fluides, ou astronomie, ou probabilité, ou mécanique céleste, ou équations différentielles et aux dérivées partielles simples de la physique).

— L'étudiant peut suivre l'ordre qu'il préfère, mais on lui conseille : 1<sup>re</sup> année : physique et calcul  $A_1$  ; — 2<sup>e</sup> année : mécanique et calcul  $A_2$ .

Il va de soi que  $A_1$  doit toujours précéder  $A_2$ .

#### CALCUL DIFFÉRENTIEL SUPÉRIEUR POUR FUTURS AGRÉGÉS, CHERCHEURS, NORMALIENS.

Les parties mathématiques  $A_1$  et  $A_2$  de ce programme seront complétées par une troisième partie (*calcul B*), exigible des futurs chercheurs, des normaliens et des candidats à l'agrégation de Mathématiques (mais non pour le C.A.P.E.S.).

Cet enseignement (3 heures) sera un enseignement de base, et non spécialisé.

Les meilleurs étudiants pourront, s'ils le désirent, acquérir la licence et ce calcul B en deux années. Par exemple : 1<sup>re</sup> année : physique, calcul  $A_1$ , mécanique ; — 2<sup>e</sup> année : calcul  $A_2$ , calcul B.

#### PROGRAMMES ABRÉGÉS.

*Calcul  $A_1$ .* — Théorie des ensembles, algèbre. Topologie de  $R$ ,  $R^n$  et des espaces métriques. Différentes sortes de convergences. Familles sommables et séries. Différentielles. Fonctions implicites. Equations différentielles.

*Calcul  $A_2$ .* — Intégrale de Riemann. Intégrales doubles et triples. Espaces hilbertiens. Fonctions analytiques. Séries de Fourier. Géométrie différentielle. Fondements de la géométrie élémentaire.

*Calcul B.* — Intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

Variétés et formes différentielles. Formule de Stokes. Champs de vecteurs. Calcul des variations du premier ordre ; mécanique analytique.

Transformations de Fourier et Laplace.

Equations aux dérivées partielles du deuxième ordre.

*Mécanique* (partie fixe). — Dynamique du point matériel. Cinématique du solide. Système de masses en mouvement. Equations différentielles du mouvement d'un solide. Petits mouvements et chocs. Equations de Lagrange. Relativité restreinte.

PROGRAMMES DÉTAILLÉS DE MATHÉMATIQUES POUR LA LICENCE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUES.

*1<sup>re</sup> année (A<sub>1</sub>) : Calcul différentiel*

a) *Algèbre des ensembles et algèbre*. — Opérations élémentaires sur les ensembles ; fonctions ; relations d'équivalence et d'ordre ; notion de puissance (n'étudier en détail que le dénombrable).

— Lois de composition interne sur un ensemble ; associativité, commutativité, distributivité, élément neutre, éléments symétriques.

— Groupes, sous-groupes, isomorphismes (exemples) ; homomorphisme ; groupes quotients ; produit de deux groupes ; étude de  $T$ ,  $R$ ,  $R^n$  et leurs produits ; groupes de transformations (exemples nombreux, en particulier endomorphisme de  $R^3$  et  $R^2$ ). Schéma de la mesure des grandeurs.

— Anneaux ; sous-anneaux ; idéaux dans un anneau commutatif ; anneau-quotient ; congruences. Exemples arithmétiques.

— Corps ; sous-corps ; représentations d'un corps ; règles de calcul dans les corps commutatifs. Corps commutatifs totalement ordonnés.

— Entiers  $\geq 0$  ; nombres rationnels  $\geq 0$  ; nombres rationnels quelconques. Nombres réels. Nombres complexes définis comme anneau-quotient (ou, mieux, par notion de congruence). Théorème de d'Alembert.

— Espaces vectoriels ; indépendance linéaire ; applications linéaires et multilinéaires ; formes quadratiques ; éléments d'algèbre extérieure ; équations linéaires. Matrices et déterminants. Variétés affines. Barycentres ; ensembles convexes.

b) *Topologie. Fonctions numériques*. — Topologie de  $R$  et  $R^n$  ; ouverts, fermés, voisinages ; topologie associée à une distance.

Fonctions continues ; produit de deux espaces métriques. Espaces métriques compacts, localement compacts. Connexité : domaines de  $R^n$ . Continuité uniforme ; espaces complets ; schéma de la méthode des approximations successives.

Longueur d'une courbe ; variation totale d'une fonction ; signaler la semi-continuité inférieure de la longueur.

Notions usuelles sur les fonctions numériques ; théorème des accroissements finis ; fonctions convexes.

c) *Différentes sortes de convergence. Familles sommables et séries*. — Convergence simple ; convergence uniforme (conservation de la continuité) ; convergence en moyenne quadratique.

Espaces normés usuels ( $C$ ,  $C_1$ ...). Théorème de Weierstrass sur polynômes. Somme d'une famille de nombres réels ou d'éléments d'un espace normé. Critère de Cauchy. Séries. Un mot sur les produits infinis (quelques exemples).

Etude élémentaire d'un espace préhilbertien.

d) *Différentielles*. — Applications différentiables d'un ouvert, d'un espace normé dans un autre espace normé ; transitivité des différentielles ; cas d'espaces de dimension finie ; jacobiens d'ordre 2 ou 3. Théorèmes de majoration. Différentiation d'une série terme à terme. Formule de Taylor. Fonctions implicites dans le cas d'un système scalaire à deux inconnues.

Equation différentielle scalaire  $x' = f(x, t)$  ; existence et unicité par la méthode des approximations successives. Etude qualitative des solutions. Extension au cas d'une équation vectorielle. Equation scalaire d'ordre  $n$ . Equations linéaires vectorielles. Méthode de variation des constantes.

Equations aux différentielles totales dans le cas d'une seule inconnue scalaire.

Equations aux dérivées partielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre. Intégrales premières.

2<sup>e</sup> année (A<sub>2</sub>) : Calcul intégral

a) *Intégration*. — Intégrale d'une fonction numérique continue ; intégrale de Riemann ; formules de la moyenne ; inégalité de Schwartz.

Polynômes orthogonaux, séries de Fourier.

Intégrales doubles et triples. Formule du changement de variables. Divergence rotationnelle. Calculs d'aires, volumes, masses, moments d'inertie.

Différenciation sous le signe somme. Formule de Poisson.

Intégration d'une série terme à terme.

b) *Fonctions analytiques*. — Fonctions analytiques élémentaires d'une variable complexe. Séries entières d'une variable complexe ; opérations sur ces séries.

Intégrale de Cauchy ; séries de Taylor et Laurent. Etude au voisinage d'un point ordinaire ou singulier. Résidus et applications.

Fonction  $\Gamma$ . Exemples simples de représentation conforme (aucune théorie générale). Géométrie de Poincaré.

Notions sur les fonctions harmoniques.

Notions sur les fonctions analytiques de plusieurs variables ; méthode des majorantes pour une équation différentielle.

Notions simples sur transformation de Laplace et Fourier ; application aux équations différentielles.

c) *Géométrie différentielle des courbes et surfaces*. — Courbes et surfaces paramétrées régulières de  $\mathbb{R}^3$ . Etude d'une courbe fondée sur la rotation instantanée de son trièdre principal.

Formes quadratiques fondamentales d'une surface, et propriétés s'y rattachant. Calcul des courbes principales.

Géométrie d'un  $ds^2$ . Courbure géodésique et courbure totale, relation intégrale entre elles ; géodésiques.

d) *Fondements de la géométrie élémentaire*. — Etude et discussion d'une ou plusieurs bases axiomatiques de la géométrie euclidienne. Axiomes, définitions, théorèmes. Définition algébrique de  $\mathbb{R}^n$ .

Isométrie, égalité des ensembles. Notions d'orientation.

Notion d'angle. Mesure des polygones, polyèdres, angles.

Éléments de géométrie non-euclidienne ; modèles euclidiens.

Éléments de géométrie projective.

PROJET DE PROGRAMME POUR « CALCUL DIFFÉRENTIEL B ».

1. *Intégrale de Lebesgue-Stieltjes*. — Les espaces  $L^1$  et  $L^2$  ; ils sont complets. Applications.

2. *Bloc différentiable*. — Éléments d'algèbre tensorielle et d'algèbre extérieure. Notions sur les variétés différentiables ; surfaces de Riemann ; formes différentielles ; différentiation extérieure.

Intégration des formes différentielles (de degré quelconque) ; formule de Stokes (dans les « bons cas »).

Champs de vecteurs tangents, transformations infinitésimales, groupes à un paramètre correspondants.

Notions élémentaires sur le calcul des variations du *premier ordre*. Applications à la mécanique analytique.

3. *Bloc Fourier*. (On se borne au cas de la droite numérique et à celui du cercle). Produit de convolution. Notions sur les fonctions de type positif et la transformation de Fourier. Transformation de Laplace.

Éléments très réduits de la théorie des distributions (le minimum nécessaire pour pouvoir parler de la dérivée d'une fonction ayant une discontinuité de première espèce).

4. *Equations aux dérivées partielles du second ordre.* — On traitera surtout des exemples : problème de Dirichlet pour la sphère ; équations des cordes vibrantes ; équation de la chaleur.

PROGRAMME DE MÉCANIQUE POUR LA LICENCE DE MATHÉMATIQUES.

*Dynamique du point matériel.* — Cinématique, vitesse et accélération tangentielles et normales.  $F = m\gamma$ . Potentiel, équation des forces vives.

Mouvement d'un point sur une droite sous l'action d'un champ de forces, discussion d'une équation différentielle du type  $x''^2 = h(x)$ .

Mouvement rectiligne d'un projectile dans un milieu résistant. Mouvement parabolique d'un projectile pesant dans le vide. Mouvements sous l'action d'une force centrale ; mouvement des planètes.

Point matériel gêné sans frottement ; pendule.

Lois du frottement, exemples simples.

Mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique.

*Cinématique du solide.* — Torseurs, résultante et moment. Réduction à un vecteur et un couple.

Mouvements de translation, rotation, vissage. Mouvement tangent à un mouvement donné (vissage instantané). Champ des vitesses. Composition des vitesses et des accélérations.

*Systèmes de masses en mouvement.* — Barycentre, moments d'inertie, ellipsoïde d'inertie.

Moment cinétique, calcul par rapport à un point fixe et par rapport au centre de gravité, par rapport à un axe.

Force vive d'un solide en mouvement, calcul.

*Equations de Lagrange*, principe des vitesses virtuelles. Traiter à nouveau quelques exemples de mouvements de corps solides, de petits mouvements, de chocs, en obtenant les équations par la méthode de Lagrange.

Toutes les liaisons seront supposées holonomes et explicites. Pas d'étude théorique sur les équations d'Hamilton-Jacobi.

*Relativité restreinte.* — Principes généraux, transformation de Lorentz, loi de la dynamique, énergie cinétique  $mc^2$ . Champ électromagnétique.

*Etablissement des équations de l'hydrodynamique.* — Statique des liquides et des gaz, principe d'Archimède.

## Rapport de la Commission des programmes

Depuis un an, la Commission s'est réunie une douzaine de fois. Une première partie de son travail a été publiée dans le *Bulletin* n° 180 de décembre 1956.

Il pouvait sembler prématuré que l'A.P.M. ait pris l'initiative de créer cette Commission, mais l'article de M. l'Inspecteur général ROBERT, paru dans le dernier *Bulletin*, sous le titre : « Les modifications de programmes dans les classes préparant au baccalauréat », contient une phrase qui nous donne justification : « M. le Directeur général m'informe d'une refonte des programmes qui devra être appliquée dès la rentrée d'octobre 1957. Nous nous proposons de l'effectuer en collaboration avec les Sociétés de Spécialistes, et espérons que nous ne serons pas placés, cette fois, devant des décisions brusquées. »

Dans un prochain *Bulletin*, nous ferons paraître les projets de programmes pour le premier cycle et pour la classe de Sciences expérimentales. Il restera à examiner les programmes des sections non scientifiques, la descriptive et l'astronomie en classe de Mathématiques élémentaires.

Nous demandons à tous nos collègues, que ces questions intéressent, de nous envoyer leurs suggestions, ou de venir à nos réunions.

J. SIROS.

## Le baccalauréat de Mathématiques

Le rapport sur le baccalauréat doit comporter un jugement sur les épreuves et la proposition d'une résolution à faire voter par les membres de l'A.P.M.

1. *Jugement sur les épreuves.* — Nous devrions d'abord examiner en détail les diverses questions de cours, noter les formes traditionnelles ou originales selon lesquelles elles ont été présentées, et voir comment leur choix et leur rédaction parviennent à déceler si les candidats ont acquis, c'est-à-dire reçu et assimilé, une certaine somme de connaissances jugées utiles.

Nous devrions avoir le même but, exactement le même, en détaillant quelques-uns des problèmes proposés. On pourrait penser, en effet, que, pour un examen d'une tradition si ancienne, et dont l'expérience se renouvelle deux fois par an, la qualité des jugements que nous pouvons prononcer, nous autres examinateurs, soit devenue très haute, et que notre seule préoccupation soit la recherche d'une équité et d'une efficacité toujours plus grandes.

Nous allons voir que notre préoccupation est tout autre, et que nous perdrons notre temps en nous attachant à des questions de nuances.

Tous les collègues que j'ai consultés, qui m'ont parlé ou m'ont écrit, sont unanimes pour trouver que les problèmes donnés au baccalauréat, en juin et en septembre, sont beaucoup trop difficiles.

Voici, par exemple :

Les professeurs de Mathématiques du Lycée de garçons de Chambéry :

« Vivement émus par les sujets de Mathématiques proposés au baccalauréat de  
« Mathématiques élémentaires en juin et en septembre, sujets qui, trop difficiles dès  
« le début, n'ont pas permis de classer les candidats et ont favorisé des élèves faibles,  
« reçus grâce à leur note de Philosophie,

« Signalent que, dès cette année, les effectifs des classes de Mathématiques élé-  
« mentaires sont en nette régression malgré l'afflux d'un grand nombre de redou-  
« blants, les élèves rentrants redoutant pour l'an prochain des épreuves aussi diffi-  
« ciles ;

« Et demandent instamment que les premières parties du problème soient des  
« applications directes des théories enseignées dans cette classe, l'expérience des  
« jurys du baccalauréat montrant que les sujets sans originalité, mais bien gradués,  
« permettent toujours de classer les candidats. »

Voici, encore, de Rennes :

« Le problème de 2<sup>e</sup> partie, en juin, posait une foule de questions géométriques  
« ou algébriques, et conduisait ainsi à une obtention extrêmement lourde de l'hyper-  
« bole-enveloppe...

« En septembre, la question s'aggrave énormément, et le mélange de trigono-  
« métrie orientée-géométrie met finalement la propriété hors de portée des candidats ;  
« l'énoncé, d'ailleurs, faisait prévoir cet échec... On oriente le chercheur dans un  
« dilemme calcul-figure, où les idées fondamentales sont dégagées à grand-peine en  
« fin d'analyse ou parfois même sont présentées de manière presque impraticable. »

Ainsi, nous devons faire de graves reproches aux épreuves de cet examen : problèmes trop compliqués, rebutants, et même, a-t-on dit, « impraticables » ! On pourrait penser que cette dernière opinion est excessive, mais avouons franchement que la simple lecture de l'énoncé, en septembre, n'est pas rassurante pour le candidat moyen : le passage d'une égalité entre longueurs à une égalité entre nombres algébriques est toujours fertile en embûches, et il faut trouver, selon le cas, l'une ou l'autre de deux relations, et pour la réciproque l'énoncé consent à nous guider, « il

conviendra. d'abord, d'établir que... » (suivent deux lignes d'égalités et d'inégalités n'ayant rien de naturel) ; mais ces accès de générosité d'un énoncé ne sont jamais vus d'un bon œil par le candidat.

Qu'on entende bien le sens de notre critique — critique toujours facile — ce ne sont pas des reproches au problème lui-même, ce sont des reproches à l'épreuve de baccalauréat 2<sup>e</sup> session.

L'examen du baccalauréat a un double but : il sanctionne la fin des études secondaires, il permet l'accès à l'Enseignement Supérieur. Alors, voyez la difficulté : s'il satisfait au premier, c'est-à-dire s'il est accessible à une large majorité d'élèves, il ne satisfait pas au second, surtout lorsque, en particulier, il sert à permettre l'entrée dans une classe de Mathématiques supérieures : là on voudrait qu'il devint une espèce de concours.

Il faudrait arriver à concilier ces deux points de vue.

Résumons les inconvénients de ces épreuves trop difficiles :

- 1<sup>o</sup> elles faussent l'admissibilité : dans un centre, on a dû doubler les notes, sinon 8 sur 156, seulement, des candidats passaient ;
- 2<sup>o</sup> elles avantagent les candidats médiocres, c'est un fait bien connu ;
- 3<sup>o</sup> l'écrasement général des notes de Mathématiques entraîne une grande prépondérance des notes des autres disciplines (on a signalé que des candidats étaient reçus, grâce à la philosophie) ;
- 4<sup>o</sup> le baccalauréat Mathématiques élémentaires devient un épouvantail, ce qui est contradictoire avec la nécessité actuelle de former un plus grand nombre de scientifiques ;
- 5<sup>o</sup> l'esprit de ces épreuves s'oppose à celui de l'enseignement qu'il nous est recommandé de donner à nos élèves : un problème « chinois » (le mot n'est pas de nous) semble peu fait pour stimuler la recherche personnelle et la redécouverte ;
- 6<sup>o</sup> si, dans un problème, la recherche est longue et pénible, le temps consacré à la rédaction, à la mise en forme, est nécessairement réduit.

S'étonne-t-on, alors, que nos élèves aient l'habitude de bâcler une rédaction obscure et en mauvais français ? Nous les y encourageons.

Avant de conclure, disons quelques mots des questions de cours, car l'observation que nous allons faire concorde avec les précédentes. Il y a des questions de cours qui comportent, en « application », de véritables problèmes. Exemples :

Résoudre :  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ .

Etudier la fonction :  $y = 3x^3 + 3x^2 - 8x + 5$ .

Dérivée de  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ .

Résoudre :  $3 \cos^2 x + 2 \sqrt{3} \sin x \cos x + 5 \sin^2 x = 2$ .

Etudier la fonction  $y = \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$ ,

et nous pourrions en citer beaucoup d'autres.

Chacune de ces questions pourrait constituer une partie d'un honnête problème ; ce ne sont pas des questions de cours. D'autres questions de cours sont des sujets de leçons d'agrégation ; exemple : définition des fractions. Régulièrement, chaque année, le commentaire relatif à cette leçon occupe plus d'une demi-page dans le rapport d'agrégation. Cette observation nous dispense d'en dire davantage.

On peut remarquer aussi que beaucoup de questions imposent une certaine méthode, ce qui est contraire à la règle du jeu.

II. Conclusion. — Que désire-t-on ? car il est moins important de dire ce qu'ont été les épreuves que de préciser ce qu'on voudrait qu'elles fussent.

Plusieurs propositions nous ont été faites :

1° Plutôt que la « tranche de cours », épreuve de mémoire, donner plusieurs questions, simples et précises, du genre : « Quel est le sens de dérivée de  $x^2$  pour  $x = 2$  » ; ou « Qu'entend-on par primitive de  $\frac{1}{x^2}$  dans l'intervalle  $(0, \infty)$  » ?

2° Que les premières parties du problème soient des applications directes du cours. L'expérience des jurys de baccalauréat montre que les sujets « sans originalité », mais bien gradués, permettent toujours le classement des candidats.

3° On nous propose aussi, selon l'exemple de la Hollande et de la Finlande, de donner 10 ou 12 exercices très variés, indépendants, et qu'il soit suffisant d'en faire quelques-uns pour être reçu, ce qui sera fait en plus comptant alors pour des mentions. Cette idée est bonne, mais on peut objecter qu'il est plus intéressant de donner un problème, car il est le développement d'une idée directrice (mais alors demandons qu'il ne faille pas un travail d'Hercule pour découvrir cette idée).

4° Signalons encore un projet modifiant la procédure d'admissibilité : le jury aurait à tenir compte du travail de l'année, beaucoup plus que par l'habituel livret scolaire. Il aurait connaissance des classements scolaires envoyés en même temps que les livrets. Ceci pour éviter les échecs purement accidentels, comme il s'en produit tous les ans, et qui sont très fâcheux. Cette question mériterait d'être examinée spécialement, nous le ferons si vous le désirez.

Voici, pour terminer, le texte d'une proposition que nous pouvons, bien entendu, modifier et mettre au point.

Les professeurs de Mathématiques, réunis en Assemblée générale, le 14 avril 1957 :

protestent :

contre la trop grande difficulté des problèmes proposés au baccalauréat Mathématiques élémentaires en juin et en septembre ; de tels problèmes avantagent les candidats médiocres, amenuisent l'importance de l'épreuve de Mathématiques, et ne sont pas propres à favoriser le recrutement pour les carrières scientifiques ;

demandent :

1° que les premières questions soient des applications directes des théories enseignées en classe ;

2° que les questions soient de difficulté graduée ;

3° que le problème soit faisable en entier dans le temps accordé, afin qu'il puisse être tenu compte, dans les notes attribuées, aux copies, de leurs qualités de rédaction, d'ordre et de clarté (voir feuille de vote, question n° 8).

J. SIROS.

### **Rapport sur les épreuves de Mathématiques proposées au baccalauréat (Première partie) en 1956**

Aucune critique des sujets de Mathématiques proposés à la première partie du baccalauréat en 1956 n'a été adressée au rapporteur. Les remarques qui suivent concernent surtout des points de détail.

Les questions de cours ne sortent pas des programmes ; la plupart comportent une application simple qui permet de s'assurer que le candidat en a compris la portée. Une seule, posée à Athènes, section C, en juin, est inattendue : *Relations entre les éléments du triangle rectangle*. S'agit-il seulement des relations trigonométriques ou faut-il établir le théorème de Pythagore ? De toute manière, c'est une question de Seconde.

Les problèmes font une grande part à la géométrie ; quelques-uns sont remarquablement équilibrés, quelques autres assez difficiles : Athènes C, juin ; Réunion C, juin. Antilles et Liban C, juin, auraient gagné à réserver les difficultés pour la fin. Alger C, juin, est long. Alger C, octobre, est un problème de géométrie analytique sur les tangentes de direction donnée à la parabole ; tout en restant simple, il prend son objet dans un domaine fort restreint à la limite du programme d'algèbre.

La rédaction des textes appelle aussi quelques observations :

Il n'est pas prudent de parler de « forme canonique », car cette expression peut être ignorée de certains (Alger T.).

A.E.F., octobre, commet la maladresse de désigner successivement par la même lettre un angle et une longueur.

New-York C, octobre, après avoir demandé d'établir une relation entre  $m_1$  et  $m_2$  dans deux cas  $a)$ ,  $b)$ , continue : soit  $E$  la relation trouvée... ce qui rend le candidat perplexe : n'a-t-il pas été invité à établir deux relations ? La question est ambiguë. On aurait pu la rédiger autrement.

Mais, en somme, aucun reproche grave ne peut être fait aux sujets de Première et les défauts signalés n'ont pas pu compromettre le succès des candidats sérieux.

A. FAVRELLE (Lille).

## Unification des termes et symboles

(Enquête permanente)

### Facteurs d'un produit ou fonctions de fonctions ?

#### QUESTIONNAIRE.

1) Dans l'écriture de la multiplication (école primaire), faut-il distinguer par leur place le multiplicande et le multiplicateur ? Lequel placer à gauche ? Lecture correcte.

2) La lettre indiquant l'unité doit-elle être placée à droite ou à gauche ? Lecture.

3) Une transformation ponctuelle doit-elle être écrite sous forme d'une fonction ou sous forme d'un produit ? La composition de plusieurs transformations ponctuelles doit-elle être indiquée comme fonction de fonction ? comme produit ? dans ce cas, dans quel ordre écrire les facteurs du produit ? Dans quel ordre les lire ?

4) Règle de multiplication des matrices.

#### RAPPORT SUR CE QUESTIONNAIRE.

Nous rassemblons les remarques et arguments bien connus dans l'espoir d'abréger la discussion. Il semble urgent qu'un vote décide des conventions que l'Association recommande dans l'Enseignement du Second Degré.

**1) La multiplication.** —  $a)$  Malgré la commutativité de l'opération, la distinction d'un multiplicande et d'un multiplicateur semble nécessaire pour l'enfant. Actuellement la règle est d'écrire le multiplicande à gauche. Le multiplicande et le produit sont de « même espèce », c'est-à-dire appartiennent au même ensemble ; le multiplicateur est un « nombre abstrait », c'est-à-dire un scalaire. L'ensemble des nombres est un domaine d'opérateurs : il s'agit d'une opération externe.

$b)$  Au moment de l'introduction des lettres, on décrète que si l'un des facteurs est un nombre et l'autre est représenté par une lettre, le nombre doit être placé à gauche.

Une pomme vaut  $n$  francs ; le prix de 30 pommes est  $30 n$  francs.

Une pomme vaut 30 francs ; le prix de  $n$  pommes est  $30 n$  francs.

A ce stade, on convient de supprimer le signe de multiplication.

$c)$  La première opération externe avouée comme telle est le produit d'un vecteur

(ou d'un segment) par un nombre : « Prendre » les  $\frac{2}{3}$  de AB. Multiplier un vecteur par un nombre (dès la Quatrième, si l'on introduit par ce moyen les nombres relatifs).

On écrit  $\vec{V}' = k\vec{V}$ . Le scalaire  $k$  est un multiplicateur, un opérateur. On l'écrit à gauche du multiplicande  $\vec{V}$ , de sorte que  $(4\vec{V}) \times 3$  s'écrit  $(4 \times 3)\vec{V}$ .

d) Ceci est comparable à l'écriture où l'unité est spécifiée. Dire qu'une pomme vaut 30 francs, c'est aussi considérer 30 comme un multiplicateur. On écrit 30 F, mais les comptables écrivent aussi F 30. Alors 4 pommes valent  $30 \times 4$  F, ou bien  $F 30 \times 4$ .

Deux attitudes du maître :

a) Les unités doivent être indiquées au début et dans les réponses, jamais au cours des calculs. (Trop abstrait pour les jeunes enfants).

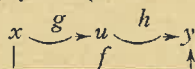
β) Commencer toujours l'indication des calculs par l'unité 1 F  $\times$  30  $\times$  4.

c) Un produit de plusieurs facteurs s'écrit et se lit de gauche à droite. Ainsi  $abcd$  signifie  $\{[(ab)c]d\}$  e.

**2) Fonctions et fonctions de fonctions.** — Une fonction s'indique par

$y = f(x)$  au sens de  $x \xrightarrow{f} y$ .

Une fonction de fonction  $\begin{cases} u = g(x) \\ y = h(u) \end{cases}$  s'écrit  $y = f(x) = h[g(x)]$ .



On remarque que l'absence de signe devant les parenthèses n'indique plus un produit. Ceci est parfaitement accepté par les élèves.

*Comparaison avec la notation de produit*

Dans le cas  $u = g(x) = mx$ ,  $y = h(u) = pu$ ,  $h[g(x)] = p(mx)$  et la suppression de la parenthèse change l'ordre des opérations.

Si l'on a écrit  $u = g(x) = xm$ ,  $y = h(u) = up$ ,  $h[g(x)] = (xm)p$ , et la suppression de la parenthèse ne change pas l'ordre des opérations.

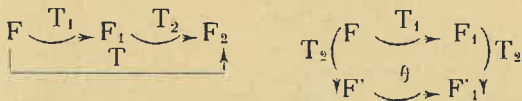
Remarque :  $u = \sin x$ ,  $y = u^2$  ;  $y = (\sin x)^2$  s'écrit  $y = \sin^2 x$ . Ceci correspond à écrire  $f(x) = h[g(x)]$  sous la forme  $ghx$ .

Ceci conduirait, dans le cas de  $u = \sin x$ ,  $y = u^2 - 3u + 1$ , à écrire

$$y = (\sin^2 x - 3 \sin + 1)x$$

acceptable pour des initiés, mais hors de question dans nos classes !

**3) Composition des transformations ponctuelles.** — Il s'agit de traduire le schéma de *composition* de  $T_1$ , suivie de  $T_2$ , qui donne  $T$ , ou le schéma de *transmutation* de  $T_1$  par  $T_2$ , qui donne  $\theta$ .



a) Si l'on considère une transformation comme une fonction, il n'y a aucune difficulté de transcription. On écrira :  $F_1 = T_1(F)$  ;  $F_2 = T_2(F_1) = T_2[T_1(F)]$ , et, en notant par exemple  $T^*$  la transformation inverse de  $T$ .

$$F'_1 = \theta(F') = T_2 \circ T_1 [T_2^*(F'_1)]$$

Mais qu'écririons-nous si nous désirons omettre la spécification de l'ensemble qui subit les transformations ? En Mathématiques élémentaires, on n'a jamais omis d'écrire le nom de la variable. On n'a pas l'habitude d'écrire  $\sin^2 - 3 \sin + 1$ .

b) Le plus souvent ont parle de « produit » de transformations. Chacune étant considérée comme un opérateur, donc un multiplicateur, la loi de composition externe

pourrait s'écrire  $F_1 = F \times T_1$  et la composition de deux ou plusieurs transformations s'écrira :

$$F_2 = F \cdot T_1 \cdot T_2, \text{ au sens de } (F \cdot T_1) \cdot T_2,$$

$$F_3 = F \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \text{ au sens de } [(F \cdot T_1) \cdot T_2] \cdot T_3,$$

le signe de multiplication pouvant être omis. Le produit des opérateurs s'indique donc tout naturellement (comme, par exemple, pour le produit de deux fractions) :

$$T = T_1 T_2, \quad T T_3 = T_1 T_2 T_3 = (T_1 T_2) T_3.$$

Alors  $T^*$  s'écrit  $T^{-1}$  et  $\theta = T_2^{-1} T_1 T_2$ .

Ceci est l'écriture habituelle des produits, de gauche à droite. C'est ce que les élèves trouvent naturel de faire et que l'on trouve dans les livres qui ont un réel souci pédagogique, comme l'Algèbre moderne de BIRKHOFF et MAC LANE, ou celle de CHÂTELET.

c) Signalons (Note du livre de CHÂTELET, p. 83) que l'on a utilisé aussi une notation par exposants  $F_2 = (F T_1) T_2 = F T_1 T_2$  qui, bien que très défendable, semble peu usitée.

d) Malheureusement, de nombreux livres et cours d'enseignement supérieur utilisent une conception de fonctions de fonctions avec une notation de produit.

On pourrait convenir, pour simplifier l'écriture de  $T_2 [T_1(F)]$ , d'écrire en suivant le travail, comme toujours, de gauche à droite,  $F T_1 T_2$ . Mais on a choisi d'écrire  $T_2 T_1 F$  au sens de  $T_2 (T_1 F)$  et  $T_3 T_2 T_1$  au sens de  $T_3 (T_2 T_1)$ . On lit presque toujours de droite à gauche, en suivant la pensée. Les inconvénients sont évidents pour l'étudiant qui prend des notes. Du reste, au niveau de l'enseignement supérieur, qu'importe ? Les étudiants, non seulement acceptent les conventions qu'on leur propose, mais encore passent fort bien d'une notation à l'autre en changeant de livre ou de cours. Mais il n'en est pas de même dans le second degré. Il est, je crois, encore temps, pour l'Association des Professeurs de Mathématiques, de choisir en toute liberté les conventions à recommander dans l'enseignement secondaire, où elles deviendront uniformes et, en quelque sorte, officielles.

**4) Représentation des transformations linéaires par les matrices.** — Il est de plus en plus usuel de faire une première introduction des matrices pour la traduction de quelques questions de Mathématiques élémentaires, afin d'éviter à l'étudiant qui aura besoin de cet outil dans son apprentissage technique ou scientifique de se sentir dépaycé par une rupture trop brusque de ses habitudes.

(On trouvera les indications utiles dans le récent article de M. BOSTEELES, *Bulletin* de janvier 1956, n° 175).

Au point de vue matriciel, la composition de deux transformations linéaires est considérée comme un produit. Si le vecteur donné subit  $T_1$ , puis le vecteur obtenu,  $T_2$ , en écrivant les deux équations

$$\begin{cases} x_1 = a_1 x + b_1 y, \\ y_1 = c_1 x + d_1 y, \end{cases}$$

l'une sous l'autre suivant l'usage, on est conduit nécessairement aux conventions : un vecteur se représente par une matrice formée d'une colonne. Une transformation linéaire par une matrice carrée

$$T_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \text{ que l'on écrit parfois}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

et la matrice qui représente la transformation composée de  $T_1$ , suivie de  $T_2$ , est telle que chaque élément de  $T_1$  conserve son numéro de colonne et chaque élément de  $T_2$  conserve son numéro de ligne, puisque l'on trouve

$$T = \begin{vmatrix} a_1 a_2 + c_1 b_2 & b_1 a_2 + d_1 b_2 \\ a_1 c_2 + c_1 d_2 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{vmatrix}$$

Seulement, naturellement, suivant qu'on écrit  $T = T_1 T_2$ , ou  $T = T_2 T_1$ , la règle explicite du produit (puisque'il n'est pas commutatif), sera différente.

*Conclusion.* — N'est-il pas souhaitable, n'est-il pas possible de mettre un peu de cohérence dans les notations de l'algèbre que nous enseignons dans nos classes du Premier et du Second Degré ?

L. FÉLIX.

P.-S. : LE VOCABULAIRE DES DÉPLACEMENTS.

Pourrions-nous nous mettre d'accord sur les mots *déplacements plans*, *antidéplacements plans*, *déplacements dans l'espace*, *antidéplacements dans l'espace*, *figures égales*, *figures antiégales* ?

Acceptons-nous ces termes et abandonnons-nous les expressions telles que : « figures égales », « déplacements indirects », « déplacements avec retournement », « déplacement avec changement de sens », etc...

De même, naturellement, pour les figures semblables et antisenblables.

Il semble que l'entente pourrait être obtenue et l'on demanderait que la décision soit rendue officielle dans les programmes ou les instructions.

### *Le questionnaire de l'A.P.M.*

Sous cette rubrique nouvelle, nous réunirons à l'avenir toute question qui nous sera transmise et qui pourra intéresser l'ensemble ou certains de nos Collègues ; les questions non signées sont présentées par la rédaction du *Bulletin*. Celle-ci se charge de transmettre les réponses qui lui parviendront et se réserve la possibilité de publier celles qui seront d'un intérêt général.

184-1. — Dans le numéro des *Cahiers Pédagogiques*, consacré à la classe de Seconde, une Collègue du Lycée de Toulouse, qui n'est pas professeur de Mathématiques, écrit : « Certains professeurs de Mathématiques, notamment en Seconde, déclarent qu'ils sont contre la mixité, parce qu'on n'enseigne pas les Mathématiques de la même façon aux filles et aux garçons. » Qu'en pensent les Collègues qui enseignent dans des lycées mixtes ?

184-2. — Quels titres de livres proposeriez-vous pour la bibliothèque des élèves, dans le but bien déterminé de leur faire prendre goût aux lectures scientifiques ? Ne pouvons-nous, tous ensemble, dresser ainsi une liste de suggestions pour les divers âges ? Prière de joindre aux titres quelques notes sur le contenu des livres sur le niveau des connaissances requises, sur la qualité du texte, etc...

### *Le bloc-notes de l'A.P.M.*

● **POUR L'ASSEMBLEE GENERALE :** Les Collègues désirant bénéficier d'une réduction des frais de voyage sont priés de s'adresser directement à G. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11<sup>e</sup>, qui leur fera parvenir un fichet de « billet de congrès » : 20 % de réduction sur le plein tarif S.N.C.F., obligation d'utiliser le retour cinq jours au plus après la fin du Congrès (ici, compter le 17 avril comme dernier jour, en raison des journées sur l'enseignement de l'Astronomie).

● **Journées d'études sur l'enseignement de l'Astronomie** (14-17 avril 1957), sous le Patronage de M. André DANJON, Directeur de l'Observatoire de Paris, membre de l'Institut, Président de l'Union Astronomique Internationale.

Voici le programme complet des conférences et visites de ces journées :

*Dimanche 14 avril*, 15 heures : Ouverture des journées sous la présidence de M. A. DANJON.

M. DANJON : Evolution de l'enseignement de l'Astronomie dans l'Enseignement Supérieur.

M. P. COUDERC : Pédagogie de l'initiation à l'Astronomie ; présentation de clichés et de films

Discussion.

*Lundi 15 avril*, 9 heures : M. DANJON : Regain d'intérêt de l'astrométrie et importance des constantes fondamentales en astrométrie.

M. P. COUDERC : Mouvements propres stellaires et galaxies lointaines.

M. DELHAYE : Problèmes galactiques.

M. ARBEY : Problèmes du temps.

M. MICHARD : Le satellite artificiel.

14 h. 30 : Visite de l'Observatoire de Paris.

*Mardi 16 avril*, 10 heures : M. COUDERC : Energie stellaire. Cosmologie.

Mlle DIVAN : Spectres.

M. LALLEMAND : Télescope électronique et cellules.

M. DENISSE : La Radio-Astronomie.

14 h. 30 : Visite de l'Observatoire de Meudon.

M. MICHARD : Le Soleil.

*Mercredi 17 avril* : Visite de l'Observatoire de Nançay (Cher).

Les conférences auront lieu à l'amphithéâtre de l'Institut d'Astrophysique, 98 bis, boulevard Arago, Paris, 14<sup>e</sup> (métro Denfert).

Chaque exposé, de 20 minutes environ, est conçu pour fournir aux professeurs la documentation d'actualité utile à leur enseignement.

A la date du 14 mars, 65 inscriptions ont été enregistrées. Les Collègues ont reçu ou recevront une documentation détaillée sur l'organisation de ces journées. Pour tout renseignement, s'adresser au secrétariat d'organisation des journées d'études : G. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris. 11<sup>e</sup>. OBE. 56-95.

---

La Rédaction s'excuse d'avoir été contrainte, en raison de l'importance des textes à publier, de réserver quelques textes qui paraîtront dans le prochain Bulletin et en particulier...

M. Weber : A propos du produit vectoriel

Edde : Rapport sur les sujets d'examens 1956. Concours d'E.N. et B.E.P.C.

---

Le Gérant : G. WALUSINSKI.

---

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 90.712. — Dépôt légal : I-1957

# GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VI<sup>e</sup> — DANton 05-10

DIXMIER (J.)

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

## LES ALGEBRES D'OPERATEURS DANS L'ESPACE HILBERTIEN

(Algèbre de Von Neumann). Fascicule XXV des Cahiers Scientifiques.

In-8° (16-25), VI-367 pages, 1957 ..... 5.500 F

FAVARD (J.)

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

## COURS DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE LOCALE

Fascicule XXIV des Cahiers Scientifiques. In-8° (16-25), X-554 pages,

1957 ..... 6.000 F

LAGRANGE (R.)

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon

## PRODUITS D'INVERSION ET METRIQUE CONFORME

Fascicule XXIII des Cahiers Scientifiques. In-8° (16-25), X-332 pages,

5 figures, 1957 ..... 4.000 F

MILLOUX (H.) et PISOT (Ch.)

Professeurs à la Faculté des Sciences de Bordeaux

## PRINCIPES, METHODES GENERALES

Tome I, Fascicule 1. In-8° (16-25), VIII-300 pages, 1954 ..... 4.500 F

Tome I, Fascicule 2. In-8° (16-25), 304 pages, 1956 ..... 4.500 F

**MASSON & C<sup>e</sup>, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6<sup>e</sup>**

COURS DE  
**MATHÉMATIQUES**

rédigé sous la direction de

**G. CAGNAC**  
Inspecteur Général  
de l'E.N.

**L. THIBERGE**  
Inspecteur Général  
de l'E.N.

**NOUVEAUTÉ :**

**Arithmétique**

Classe de Mathématiques

par

**Y. CROZES**

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

Un volume de 412 p. avec figures, exercices et problèmes ; broché ... **2 400 F**

**Arithmétique**, cl. de 6<sup>e</sup>. Un volume avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **510 F**

**Géométrie et Arithmétique**, cl. de 5<sup>e</sup>. Un vol., avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **550 F**

**Arithmétique, Algèbre et Géométrie**, classe de 4<sup>e</sup>. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **570 F**

**Arithmétique, Algèbre et Géométrie**, classe de 3<sup>e</sup>. Un volume avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **1 330 F**

**Géométrie plane**, cl. de 2<sup>e</sup> C et M. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **615 F**

**Algèbre**, cl. de 2<sup>e</sup> C et M. Un volume avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **495 F**

**Algèbre et Géométrie**, cl. de 2<sup>e</sup> A et B. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, broché ..... **600 F**

**Géométrie dans l'espace**, cl. de 1<sup>re</sup> C et M. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, cart. ... **685 F**

**Algèbre et Trigonométrie**, cl. de 1<sup>re</sup> C et M. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, cart. ... **980 F**

**Algèbre et Géométrie**, cl. de 1<sup>re</sup> A et B. Un volume avec figures, exercices et problèmes, broché ..... **680 F**

**CLASSE DE MATHÉMATIQUES**

**Algèbre et Trigonométrie**, par J. COMMEAU, Professeur agrégé au Lycée Kléber. Un volume de 504 pages, avec figures, exercices et problèmes ; broché ..... **1 970 F**

**Géométrie**, par J. COMMEAU ..... **Octobre 1957**

**NOUVEAUTÉ :**

**VIENT DE PARAÎTRE :**

# **PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES**

**PROGRAMMES A<sup>1</sup> et A<sup>2</sup>**

**PAR**

**R. GOUYON**

Ancien élève de l'Ecole normale supérieure  
Agrégré des sciences mathématiques  
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse



OUVRAGE CONFORME AUX NOUVEAUX PROGRAMMES  
APPLICABLES AU 1<sup>er</sup> OCTOBRE 1956



Vol. 16 × 24 cm., de 658 pages, relié  
pleine toile verte..... **6.300 F**

On vend encore, séparément :

**Deuxième fascicule**, vol. 16 × 24 cm., de 288 pages, broché  
(paru en décembre 1956) ..... **2.700 F**

Le **Premier fascicule**, paru en octobre 1956, est épuisé. L'ouvrage ne sera plus mis en vente dorénavant que sous la forme reliée.



**LIBRAIRIE VUIBERT**

**63, boulevard Saint-Germain, PARIS, V°**

# LIBRAIRIE ANDRÉ DESVIGNE — 17, rue Mulet, LYON

## MATHÉMATIQUES

### COURS COMPLET

#### Classes de PREMIERE :

##### Nouveautés :

|                                                               |                              |
|---------------------------------------------------------------|------------------------------|
| LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE, classe de Première C.M.       | Br. : 545 F., cart. : 655 F. |
| LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Première C.M.     | Br. : 600 F., cart. : 730 F. |
| LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Première A.B. | Br. : 585 F., cart. : 705 F. |

SPECIMENS gratuits sur demande

|                                                                                                               |        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 1 <sup>re</sup> partie, séries C. et M. | 285 F. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|

#### Classes de SECONDE :

|                                                              |                              |
|--------------------------------------------------------------|------------------------------|
| LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE, classe de Seconde C.M.       | Br. : 400 F., cart. : 500 F. |
| LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Seconde C.M.     | Br. : 575 F., cart. : 695 F. |
| LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Seconde A.B. | Br. : 535 F., cart. : 655 F. |
| Algèbre et géométrie : 1 volume                              |                              |

### 1<sup>er</sup> CYCLE

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième, *Libre de Corrigés*.

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième, *Libre de Corrigés*.

*Note Importante.* — Les livres de corrigés ne sont pas en vente dans le commerce ils sont réservés aux Professeurs de Mathématiques, à qui ils sont remis en spécimen.

|                                                            |                              |
|------------------------------------------------------------|------------------------------|
| LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Troisième. |                              |
| Edition Lycées et Collèges                                 | Br. : 455 F., cart. : 560 F. |
| Edition Cours Complémentaires                              | cart. : 680 F.               |
| LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Quatrième. |                              |
| Edition Lycées et Collèges                                 | Br. : 425 F., cart. : 530 F. |
| Edition Cours Complémentaires                              | cart. : 635 F.               |
| LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième. |                              |
| Edition Lycées et Collèges                                 | Br. : 335 F., cart. : 435 F. |
| Edition Cours Complémentaires                              | cart. : 495 F.               |
| LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième.   |                              |
| Edition Lycées et Collèges                                 | Br. : 270 F., cart. : 370 F. |
| Edition Cours Complémentaires                              | cart. : 355 F.               |

#### Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

|                                                                                                                   |                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHÉMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique et Cosmographie) | Br. : 830 F., cart. : 930 F. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|

#### Classe de PHILOSOPHIE :

|                                                           |                              |
|-----------------------------------------------------------|------------------------------|
| LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE .. | Br. : 420 F., cart. : 550 F. |
|-----------------------------------------------------------|------------------------------|

#### Classe de MATHÉMATIQUES :

|                                                                                                   |                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE                                                                  | Br. : 700 F., cart. : 805 F. |
| " — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE                                                                | Br. : 280 F.                 |
| " — ARITHMETIQUE                                                                                  | Br. : 290 F.                 |
| " — MECANIQUE                                                                                     | Br. : 250 F., cart. : 340 F. |
| LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE,                                                      | Br. : 390 F., cart. : 490 F. |
| LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE                                                                    | Br. : 605 F., cart. : 705 F. |
| " — TRIGONOMETRIE                                                                                 | Br. : 380 F., cart. : 475 F. |
| " — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 2 <sup>e</sup> partie, classe de Mathématiques | 400 F.                       |

Prix taxe locale incluse

# **ASSEMBLÉE GÉNÉRALE**

## **du dimanche 14 Avril 1957 à 8h.30**

**au Musée pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris, 5<sup>e</sup>**

---

### **Ordre du jour**

- 1° Rapport d'activité du Président.
- 2° Compte rendu financier.
- 3° Horaires et réforme de l'enseignement.
- 4° Problèmes de formation des maîtres et de recrutement.
- 5° Les épreuves de Mathématiques aux divers examens et concours.
- 6° Réforme des programmes.
- 7° Sur les définitions de mots et notations.

Le présent avis tient lieu de convocation. Les membres de l'Association sont priés de remettre en séance ou de faire parvenir, pour le 10 avril 1957 au plus tard, au Président, le résumé de leurs interventions, s'ils veulent être sûrs que celles-ci soient mentionnées au compte rendu de l'Assemblée générale.

### **Votes par correspondance**

(Voir les Bulletins de vote aux deux pages suivantes)

**Tous les membres de l'Association qui ne pourront assister à l'Assemblée générale du 14 avril 1957, sont instamment priés de bien vouloir voter par correspondance.**

Pour la régularité des opérations de scrutin, prière de se conformer aux indications suivantes :

- 1° Détacher la partie inférieure de la page suivante (Bulletin de vote) et l'introduire, après inscription du vote, dans une petite enveloppe cachetée ;
- 2° Détacher le feuillet suivant, répondre aux questions, et l'insérer, avec la petite enveloppe contenant le Bulletin de vote, dans une seconde enveloppe portant extérieurement, avec le nom et l'adresse de l'expéditeur, la mention : « Association des Professeurs de Mathématiques, Bulletin de vote ». Adresser ce pli à M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11<sup>e</sup>.

Il paraît indispensable que les votes par correspondance parviennent, au plus tard, le jeudi 11 avril 1957.

Le dépouillement du scrutin pour les élections au Comité se fera à la fin de l'Assemblée générale.

### Renouvellement partiel du Comité

Pour éviter une trop grande dispersion des suffrages, la liste suivante a été établie avec l'agrément des membres de l'Association dont les noms y figurent.

Mlle VERVAECKE (*Fénelon*, Lille), ancien membre du Comité.

Mlle BIARD (*E.N.S.* de Fontenay-aux-Roses).

Mlle GOUKOWSKY (*Montaigne*, Paris).

Mlle MARCHAND (*Sèvres*).

M. BAY (*Condorcet*, Paris), ancien membre du Comité.

M. CASSE (*Savigny-sur-Orge*).

M. CROZES (*Henri-IV*, Paris), ancien membre du Comité.

M. DEVIOSSE (*Lillebonne*).

M. GUILLORE (*Cours complémentaire*, Paris).

M. LE MÉNAGER (*Angers*).

M. MOUGENOT (*Henri-Poincaré*, Nancy).

Mais ces indications ne limitent en aucune façon la liberté de vote des membres de l'Association. Toutefois, il n'y a pas lieu de voter pour les membres faisant actuellement partie du Comité (voir couverture, page 2), y compris les membres sortants non immédiatement rééligibles (art. 3 des Statuts) : MM. FAVREILLE, ITARD, POCHARD, ROSTOLLAND, THOVERT.



### Élection au Comité 1957 — Bulletin de vote

Prière, pour faciliter le dépouillement du scrutin, d'inscrire les huit noms par ordre alphabétique.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

## Feuillet de réponses aux questions posées

Détacher cette page et la déposer en séance après avoir répondu lisiblement aux différentes questions.

Les membres de l'Association qui ne pourraient assister à l'Assemblée sont invités à envoyer ce feuillet, **avant le 10 avril 1957**, au Président : G. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11<sup>e</sup>, ou à le remettre à un délégué de leur choix, membre de l'Association. [Si le nom du délégué est laissé en blanc, il sera choisi par le Président]. Rayer l'alinéa a) pour donner au délégué le mandat impératif constitué par l'alinéa b).

Nom et prénom : .....

Etablissement et fonction en 1956-57 : .....

prie M. ....

de le (ou de la) représenter à l'Assemblée générale du 14 avril 1957, et

a) l'invite à voter à sa place, en s'inspirant des indications ci-après :

b) lui donne le mandat impératif de voter comme suit :

Dater et  
signer  
ci-contre : }

### Questions posées aux membres de l'Association

Indiquer son vote, sur chaque question, par une + dans la colonne correspondante.

|                                                                                                                         | Pour | Contre | Abstention |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|--------|------------|
| 1. <i>Vote sur le rapport général d'activité</i><br>(Cf. p. 301 à 306).                                                 |      |        |            |
| 2. <i>Vote sur le compte rendu financier</i> (Cf. p. 307).                                                              |      |        |            |
| 3. a) <i>Pour l'augmentation de la cotisation</i><br>(Cf. p. 307).                                                      |      |        |            |
| b) <i>En cas de vote contre à 3a, quelles économies proposez-vous ?</i>                                                 |      |        |            |
| 4. <i>Publication des principaux sujets de baccalauréat dans les Bulletins et suppression des Annales</i> (Cf. p. 305). |      |        |            |
| 5. <i>Principes d'action de l'A.P.M. pour l'amélioration des horaires</i> (Cf. p. 304).                                 |      |        |            |
| 6. <i>Vote sur le rapport de la Commission des programmes</i> (Cf. p. 312).                                             |      |        |            |
| 7. <i>Vote sur le rapport de la Commission de formation des maîtres</i> (Cf. p. 307).                                   |      |        |            |
| 8. <i>Motion sur le Baccalauréat Mathématiques</i> (Cf. p. 315).                                                        |      |        |            |

T.S.V.P.

## OBSERVATIONS.

A) *Sur l'orientation générale de l'activité de l'A.P.M. (Cf. p. 305).*

B) *Sur les rapports concernant les notations, les examens, etc...*

C) *Observations particulières :*

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD  
GRENOBLE (Isère)

# COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

*Professeurs au Lycée de Grenoble*

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

|                                                                                                  |       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ARITHMÉTIQUE 6° ( <i>Jusqu'à épuisement</i> ) .....                                              | 220 F |
| ARITHMÉTIQUE 6° — Nouvelle édition mise à jour .....                                             | 330 » |
| Corrigé des exercices de 6° .....                                                                | 300 » |
| DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5° .....                                                                | 185 » |
| GÉOMÉTRIE 5° et 4° .....                                                                         | 400 » |
| ARITHMÉTIQUE 5° — Nouvelle édition mise à jour .....                                             | 450 » |
| Corrigé des exercices de 5° .....                                                                | 300 » |
| ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4° .....                                                                 | 300 » |
| ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3° .....                                                                 | 390 » |
| GÉOMÉTRIE 3° .....                                                                               | 325 » |
| GÉOMÉTRIE 5°, 4°, 3° .....                                                                       | 800 » |
| (pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages <b>cartonné</b> ). |       |
| COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3° MODERNE COURT.                                          | 100 » |
| ALGÈBRE 2° A.B.C.M. ....                                                                         | 500 » |
| GÉOMÉTRIE 2° A.B.C.M. ....                                                                       | 465 » |
| ALGÈBRE 1 <sup>re</sup> A.B. ....                                                                | 180 » |
| ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1 <sup>re</sup> C.M. ....                                               | 550 » |
| GÉOMÉTRIE 1 <sup>re</sup> A.B.C.M. ....                                                          | 500 » |

## POUR LES EXAMENS :

|                                                                                               |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT,<br>1 <sup>re</sup> partie, A.B.C.M. .... | 390 » |
| LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS                                    | 410 » |

# nouveauté

## Le DICTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES

de A. JOLY est un « Guide », c'est-à-dire un ouvrage simple qui permet de retrouver un renseignement vu dans un manuel.

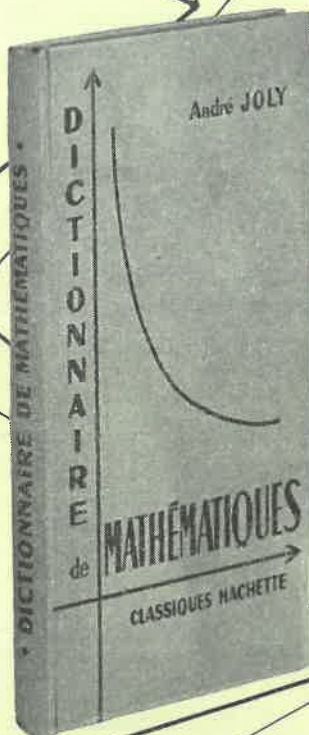
- Il est précédé de CONSEILS pour la rédaction des devoirs et de TABLES NUMÉRIQUES NOUVELLES.

- Il contient le REPERTOIRE ALPHABÉTIQUE de toutes les définitions, règles, propriétés, qu'un élève doit apprendre.

- UN CHIFFRE DISTINCTIF indique à quelle classe s'adresse chaque article.

- Des tableaux, des dessins, des exemples ajoutent à la clarté de l'exposé.

Cet ouvrage permettra la recherche des problèmes et la préparation aux examens.



Un volume 11,5 × 21,5 cm de 256 p., illustré de 460 figures, broché. 380 » cartonné. . . . 490 » (+ T. L.)

**HACHETTE**