

Rapport sur la composition de mathématiques
(classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées, Collèges
et Écoles normales en 1956 ⁽¹⁾

Solution du problème

I

Les données sont un cercle (A) [plan (P), centre O, rayon a , axe $z'z$] et un angle aigu α .

1° A tout point h de (P), non intérieur au cercle (A), correspond un cercle déterminé (h) de (P) orthogonal au cercle (A) ; les tangentes ht et ht' à (A) issues de h déterminent son rayon $ht = ht'$. L'axe radical (Δ) des cercles (h) et (A) est la polaire tt' de h par rapport à (A).

On fait correspondre au point h les deux cônes de révolution ayant (h) comme directrice et tels que leurs génératrices fassent avec le plan (P) l'angle donné α ; ils sont symétriques par rapport à (P). Leur axe commun est la perpendiculaire élevée en h au plan (P) : le sommet H de l'un quelconque d'entre eux est sur cette droite à la distance de h donnée par $Hh = ht \operatorname{tg} \alpha$.

Lorsque h est situé sur (A), le cercle (h) est de rayon nul, la formule précédente exige que Hh soit aussi nul, les deux points H correspondant à h se confondent avec h .

L'énoncé définit le plan (Q) contenant h et (Δ) ; en supposant h non situé sur (A) et extérieur à (A), ce plan est déterminé puisque $Hh \neq 0$, H est en dehors de (P), donc de (Δ).

Soit HH' la perpendiculaire en H au plan (Q), elle est orthogonale à (Δ) et contenue dans le plan OhH perpendiculaire à (Δ) au milieu K de tt' . h et K sont distincts, le premier étant extérieur, le second intérieur à (A) ; HK n'est donc pas perpendiculaire à (P), d'où il s'ensuit que HH' coupe (P) en un point que l'on désigne par H' . H' est sur Oh et le triangle KHH' est rectangle en H : Hh étant sa hauteur

$$\overline{hK} \cdot \overline{hH'} = -hH^2 = -ht^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Dans le triangle Oth rectangle en t

$$ht^2 = \overline{hO} \cdot \overline{hK}, \quad \text{d'où}$$

(1) Le Jury était composé de MM. ROBERT, inspecteur général, président ; COSSART, professeur (Ecole Supérieure d'Electricité) au Lycée Chaptal ; DURRANDE, professeur (Spéciales), et ECALLE, professeur (Navale) à l'annexe Stanislas du Lycée Saint-Louis ; EUVRARD, professeur (Centrale) au Lycée Chaptal, et de Mme OKAL, professeur (Fontenay) au Lycée Fénélon.

Voir l'énoncé du problème, *Bulletin* 178, p. 548.

$$\overline{hK} \cdot \overline{hH'} = -\overline{hK} \cdot \overline{hO} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad \overline{hK} \text{ est } \neq 0,$$

il en résulte $\overline{hH'} = \overline{Oh} \operatorname{tg}^2 \alpha$ ou, les points O, h, H' étant alignés, $\overline{hH'} = \overline{Oh} \operatorname{tg}^2 \alpha$ (1).

En gros, la figure des trois points O, h, H' est invariable. Explicitons le rapport $\frac{\overline{OH'}}{\overline{Oh}}$

$$\overline{OH'} = \overline{Oh} + \overline{hH'} = \overline{Oh} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{\overline{Oh}}{\cos^2 \alpha}. \quad \text{Ainsi } \overline{OH'} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \overline{Oh} \quad (2).$$

K est le pied sur Oh de la polaire (Δ) de h par rapport à (A), il en résulte $\overline{OK} \cdot \overline{Oh} = a^2$.

Le produit $\overline{OK} \cdot \overline{OH'}$ est donc, lui aussi, constant. Précisons :

$$\overline{OK} \cdot \overline{OH'} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \overline{OK} \cdot \overline{Oh} = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}. \quad \text{Si l'on pose } \frac{a}{\cos \alpha} = c \quad \overline{OK} \cdot \overline{OH'} = c^2.$$

On appelle (C) le cercle de plan (P), de centre O, de rayon c. La relation $\overline{OK} \cdot \overline{OH'} = c^2$ montre que (Δ) est la polaire du point H' par rapport au cercle (C).
Noter l'ordre de grandeur

$$OK < Oh < OH', \quad H' \text{ est extérieur à (C).}$$

Remarques : 1° La définition du plan (Q) tombe en défaut si h est sur le cercle (A). L'étude précédente permet d'étendre cette définition à ce cas singulier, par un passage à la limite : Faisons tendre, sur un diamètre $x'x$ de (A), h vers un point h_1 de rencontre de $x'x$ avec (A) : $Oh > a$, $Oh_1 = a$; comme Hh tend vers zéro,

H tend vers h_1 . D'après la relation (2) ; H' tend vers H'₁ défini par $\overline{OH'_1} = \frac{\overline{Oh_1}}{\cos^2 \alpha}$;

$OH'_1 > a$. Le plan (Q) perpendiculaire en H à HH' tend vers le plan (Q₁) perpendiculaire en h_1 à $h_1H'_1$, c'est-à-dire à $x'x$. (Q₁) est ici perpendiculaire à (P) et passe par la tangente à h_1 en A. Donc, aux points h situés sur (A) et confondus avec leurs correspondants H, les plans (Q) ont encore une définition et sont, dans l'ensemble, les plans tangents au cylindre de révolution d'axe $s's$ et de rayon a.

2° Etudions de même ce que devient (Q) quand h s'éloigne à l'infini sur un diamètre $x'Ox$ de (A) : $\overline{OK} = \frac{a^2}{\overline{Oh}}$ tend vers zéro ; la droite (Δ) tend vers le diamètre $y'Oy$ de A perpendiculaire à $x'Ox$.

Posons $\beta = \widehat{hKH}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{Hh}{Kh} = \frac{ht \operatorname{tg} \alpha}{Kh}$ Or $ht = Kh \cos \widehat{Oht}$, $\widehat{Oht}$ tend vers zéro, donc $\frac{ht}{Kh}$ tend vers 1, $\operatorname{tg} \beta$ tend vers $\operatorname{tg} \alpha$, β tend vers α . Le plan (Q) tend vers le plan (Q₂) passant par $y'Oy$ et formant avec le demi-plan de (P) contenant Ox l'angle α (Q₂) fait avec Oz, en O, l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$: il est donc tangent au cône de révolution ($\mathcal{A}$) de sommet O, d'axe $s's$, de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

2° Il s'agira de comparer un plan (Q) et le cercle fixe (C).

En général, excluons les cas limites (Q₁) ou (Q₂), h est à distance finie de O et extérieur à (A). Prenons comme plan de figure le plan de $s's$ et de Oh ; il est perpendiculaire à la droite (Δ) en K et contient H et H'.

La polaire de H' par rapport à (C) est la droite (Δ) ; en vertu de sa définition à l'aide des points conjugués de H', il est manifeste que le plan polaire de H' par

rapport à toute sphère passant par (C) [dont la définition est analogue] contient la droite (Δ).

Prenons le point de rencontre N de HH' avec $z'z$ et appliquons la remarque précédente à la sphère (N), de centre N, passant par (C) ; le plan polaire de H' par rapport à cette sphère passe par (Δ) et doit être perpendiculaire à NH' : on reconnaît là le plan (Q).

Le rapport $\frac{\overline{NH}}{\overline{NH'}}$ est égal au rapport $\frac{\overline{Oh}}{\overline{OH'}}$ des projections des vecteurs colinéaires

$\overrightarrow{NH}$ et $\overrightarrow{NH'}$ sur $x'Ox$. D'après (2) ce rapport est égal à $\cos^2 \alpha$.

$$\text{Donc} \quad \frac{\overline{NH'}}{\overline{NH}} = \cos^2 \alpha \quad (3).$$

H étant le pied sur NH' du plan polaire de H' par rapport à (N), en désignant par R le rayon de (N) on a $\overline{NH} \cdot \overline{NH'} = R^2$ (4).

Des relations (3) et (4) on tire $\overline{NH}^2 = R^2 \cos^2 \alpha$ d'où $\overline{NH} = R \cos \alpha$ (5).

L'interprétation de (5) est simple : considérons un point l du cercle selon lequel (Q) coupe (N), cercle qui existe puisque $\overline{NH} < R$; le triangle NHL est rectangle en H. $Nl = R$, l'angle aigu $\widehat{HNL}$ n'est donc autre que α .

Or le plan tangent en l à la sphère (N), et le plan (Q) sont respectivement perpendiculaires aux côtés Nl et NH de cet angle ; l'angle aigu de ces plans est donc α . On exprime ceci en disant qu'en tout point commun au plan (Q) et à la sphère (N), le plan (Q) coupe la sphère (N) sous l'angle α .

La droite (Δ), sécante à (C), coupe ce cercle en deux points désignés par λ et λ' dans l'énoncé ; ce sont aussi les points de contact avec (C) des tangentes à (C) menées par le point extérieur H'. Chacun de ces points est commun au plan (Q) et à la sphère (N).

Quel est l'angle de la tangente à (C) en λ , (soit H' λ), avec le plan (Q) ? H'H étant perpendiculaire à (Q), le plan projetant cette tangente sur (Q) est le plan

HH' λ et la projection de H' λ sur (Q) est H λ . L'angle aigu cherché est donc $\widehat{H\lambda H'}$.

H λ , situé dans (Q) est perpendiculaire à HH'. Dans le plan $\lambda NH'$, le triangle N $\lambda H'$ est rectangle en λ , car $\lambda H'$ tangente à (C) est une tangente à (N) ; λH est la hauteur issue du sommet λ de l'angle droit : les angles $\widehat{H\lambda H'}$ et $\widehat{\lambda HN}$ sont égaux.

λ étant un point l particulier tel que $\widehat{INH} = \alpha$, $\widehat{\lambda HN}$ et $\widehat{H\lambda H'}$ ont pour valeur α . Ainsi le plan (Q) coupe le cercle (C) en chacun des points λ et λ' sous l'angle α .

Remarque : Un plan (Q) du type (Q₁) [cas de H situé sur (A)] coupe visiblement encore (C) sous l'angle α d'ailleurs le raisonnement précédent n'est pas en défaut dans ce cas, où N coïncide avec O.

Un plan (Q) du type (Q₂) [cas de h rejeté à l'infini dans (P)] a encore cette propriété, puisqu'aux points λ et λ' d'intersection de ce plan avec (C), situés sur le diamètre $y'Oy$, les tangentes à (C) sont parallèles à Ox et l'étude de (Q₂) a montré que son angle aigu avec $x'Ox$ est α .

3° Dans le plan $Hs'z$, les droites HH' et HK sont conjuguées harmoniques par rapport aux rayons HF et HF' [en désignant par F et F' les points de rencontre de (C) avec $x'x$, conjugués harmoniques par rapport à H' et K]. HH' et HK étant de plus rectangulaires, ces droites sont les bissectrices de HF et HF'. La considération du triangle HFF' donne

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{F'H}{F'H'}$$

Soit k la valeur commune de ces rapports. Le lieu des points M tels que $\frac{MH}{MH'} = k$ passe donc par les points F et F' : or c'est une sphère coupant orthogonalement et harmoniquement la droite HH' ; son centre est nécessairement N , qui est commun à HH' et au plan médiateur de FF' ; c'est donc la sphère (N) .

Tous les points de (C) , situés eux-mêmes sur (N) appartiennent à ce lieu : en particulier le point λ précédemment considéré, ainsi $k = \frac{\lambda H}{\lambda H'}$.

Le triangle $H\lambda H'$ rectangle en M montre que $\frac{\lambda H}{\lambda H'} = \cos \alpha$, puisque $\widehat{H\lambda H'} = \alpha$.

En résumé on a démontré que

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{F'H}{F'H'} = \cos \alpha \quad (6).$$

H étant extérieur à (C) , soit à FF' , la différence $|F'H - FH| = FF' = 2c$. D'après (6) il en résulte que $|F'H - FH| = 2c \cos \alpha = 2a$ (7).

Dans le plan $FF'z'z$ le point H appartient donc à l'hyperbole de foyers F, F' dont le demi-axe transverse vaut a . L'excentricité de cette hyperbole est $\frac{c}{a} = \frac{1}{\cos \alpha}$.

A observer que l'angle α est l'angle aigu des asymptotes avec l'axe focal FF' ; soit encore que les asymptotes sont des génératrices du cône $(\mathcal{A})$.

La normale en H à cette hyperbole est la bissectrice extérieure en H du triangle FHF' , c'est donc HH' : le plan (Q) est perpendiculaire au plan $z'zH$ selon la tangente en H à l'hyperbole.

Réciproquement, soit $\overline{H}$ un point de cette hyperbole : si c'est un des sommets c'est un point H , puisque ceux-ci appartiennent à (A) . Si, plus généralement, $\overline{H}$ est extérieur à la droite FF' , $\overline{H}$ se projette sur (P) en un point de la droite FF' extérieur au segment des sommets, donc extérieur à (A) ; appelons $\overline{h}$ ce point, ils lui correspondent deux points H (construction générale pour h choisi en $\overline{H}$) ; ils appartiennent, d'après les considérations de 1°, 2°, 3°, à l'hyperbole précédente ; cette hyperbole n'étant coupée qu'en deux points par $\overline{hH}$, l'un des points H coïncide avec $\overline{H}$, et $\overline{H}$ peut être considéré comme un point H .

Conclusion : Quand h varie sur un diamètre $x'Ox$ du cercle (A) , extérieurement à (A) , le lieu des points H qui lui correspondent est, dans le plan de $x'x$ et de $z'z$, l'hyperbole définie plus haut dont les foyers F, F' sont communs à ce plan et au cercle (C) .

Dans l'espace, le lieu des points H correspondant à tous les points h de (P) , non intérieurs au cercle (A) est la surface de révolution (Σ) engendrée par cette hyperbole en tournant autour de son axe non transverse $z'z$.

Cette surface entoure complètement l'axe $z'z$. Elle partage l'espace en deux régions : celle qui contient l'axe $z'z$ sera appelée, dans ce problème, la région intérieure à (Σ) [bien qu'elle contienne les régions extérieures des hyperboles méridiennes]. Le cône $(\mathcal{A})$ a ses deux nappes dans cette région intérieure ; le cercle (C) au contraire est, dans l'autre région, dite extérieure à (Σ) . On peut concevoir (Σ) comme engendrée par un parallèle mobile, cercle d'axe $z'z$, assujéti à rencontrer une hyperbole méridienne : l'ensemble des points du plan de ce cercle intérieurs au parallèle engendre la région intérieure à (Σ) .

II

Si les cercles (h) orthogonaux, dans (P) , au cercle fixe (A) , satisfont à une autre condition, les points (H) correspondants décrivent deux lignes, symétriques par rapport à (P) et situées sur la surface (Σ) .

1° Si l'un des points t, t' de rencontre de (h) avec (A) , t pour fixer les idées est maintenu fixe, le cercle (h) varie en engendrant un faisceau de cercles tangents en t , point fixe, à la droite Ot . Les points H restent situés dans le plan tangent au cylindre de révolution d'axe $z'z$ et de section droite (A) au point t de ce cylindre, h décrivant la tangente à (A) en t . Ce plan est le plan (Q_t) relatif au cercle point t .

Pour chaque point H , la droite Ht est l'une des génératrices du cône de révolution de sommet H , qui est intervenu initialement pour définir ce point à l'aide de (h) . Ht fait donc en t avec (P) l'angle constant α . La droite tH est l'une ou l'autre de deux droites fixes, d'où obtention aisée du lieu cherché. Il est formé de deux droites issues de t , projetées orthogonalement sur (P) selon la tangente au cercle (A) en t et faisant avec le plan (P) l'angle donné α . Tout point d'une telle droite est point de (Σ) . Par tout point, tel que t , du cercle (A) , passent deux droites que nous appellerons (D) , et qui dérivent, par révolution autour de $z'z$, de celles passant par un point t particulier.

Revenons sur un point déterminé H de (Σ) , non situé sur (A) , il lui correspond $h, (h), t, t', (\Delta)$ selon les notations fixées au début. Les deux droites Ht et Ht' sont des droites (D) [symétriques par rapport au plan $zz'H$]. Le plan de ces droites est celui de H et de (Δ) , c'est le plan (Q_H) relatif au point H . Ce sont les seules droites (D) passant par H , car une telle droite doit, d'une part, être génératrice du cône de révolution de sommet H et de directrice (h) , et d'autre part son point de rencontre avec (P) doit être sur (A) .

En réunissant ces observations avec celles déjà faites, relatives au cas où H serait situé sur (A) [remplacer la lettre t alors par H], on voit que par un point quelconque H de (Σ) passent deux droites (D) distinctes et deux seulement.

2° Si l'on considère deux points quelconques H et H_1 de (Σ) , non situés sur (A) , la droite HH_1 coupe (P) en un point σ [qu'on dira être à l'infini si HH_1 est parallèle à (P)]. Dans tous les cas, l'homothétie de centre σ transformant H en H_1 est bien déterminée [elle devient une translation de vecteur $\overrightarrow{HH_1}$ si σ est à l'infini]. Cette transformation fait correspondre à l'axe du cône $[H, (h)]$ l'axe du cône $[H_1, (h_1)]$ et change le premier cône dans le second puisqu'ils ont même angle au sommet : comme elle conserve le plan (P) , le cercle (h) relatif à H , est transformé en le cercle (h_1) relatif à H_1 ; autrement dit σ est un des centres d'homothétie des deux cercles (h) et (h_1) .

Considérons deux points distincts α et β de (h) alignés avec σ et leurs homothétiques α_1 et β_1 de (h_1) ; les tangentes à (h) en α et β se coupent en ρ , les tangentes à (h_1) en α_1 et β_1 , respectivement parallèles aux précédentes, se coupent en ρ_1 . ρ appartient à la polaire de σ par rapport à (h) et ρ_1 à la polaire de σ par rapport à (h_1) , polaires toutes deux perpendiculaires à hh_1 .

Ces quatre tangentes délimitent un parallélogramme $\rho\tau\rho_1\theta$ dont $\rho\rho_1$ est une diagonale et $\tau\theta$ l'autre : τ est supposé commun à $\alpha\sigma$ et $\beta_1\rho_1$, θ commun à $\beta\rho$ et $\alpha_1\rho_1$, $\rho\alpha = \rho\beta$ donc le triangle $\alpha\rho\beta$ est isocèle et il en est de même des triangles dont les côtés possèdent les directions de ceux de $\alpha\rho\beta$; ainsi $\tau\beta_1 = \tau\alpha$ et $\theta_1\beta = \theta_1\alpha_1$. Chacun des points τ et θ a des puissances égales par rapport aux cercles (h) et (h_1) : la diagonale $\tau\theta$ du parallélogramme est l'axe radical de ces cercles ; $\rho\rho_1$ a son milieu, centre du parallélogramme, sur $\tau\theta$ et les polaires de σ par rapport à (h) et (h_1) , parallèles à l'axe radical, en sont situées à égale distance. Ainsi l'axe radical de (h) et (h_1) est équidistant des deux polaires de σ par rapport à (h) et (h_1) , les trois droites étant parallèles.

3° Regardons comme fixe un point H de (Σ) [essentiellement non situé sur (A)] et comme variable un point H₁ qui décrit une courbe quelconque (Γ) tracée sur (Σ) et passant par H. Supposons que la courbe (Γ) ait une tangente en H, cette tangente coupe (P) en un point T (à distance finie ou à l'infini).

Quand H₁ tend vers H sur (Γ), la droite HH₁ tend, par définition, vers HT, et la trace σ de HH₁ sur (P), mobile, tend vers T (ou s'éloigne à l'infini dans la direction de la tangente HT si T est à l'infini). La polaire de σ par rapport à (h) et la polaire de σ par rapport à (h₁) [cercle mobile dont la position limite est (h)] ont toutes deux comme position limite la polaire de T par rapport à (h) : l'axe radical de (h) et (h₁), parallèle à ces polaires et intérieur à leur bande, d'après la propriété précédente, a nécessairement comme position limite cette même polaire.

(h) et (h₁) sont deux cercles orthogonaux à (A), donc le centre O de ce cercle a même puissance par rapport à (h) et (h₁) : leur axe radical passe par le point fixe O et sa position limite doit passer par O.

Donc la polaire de T par rapport à (h) passe par O ; il en résulte que T est situé sur la polaire de O par rapport à (h), soit sur la droite (Δ). La tangente HT à (Γ) en H est nécessairement contenue dans le plan H Δ , c'est-à-dire dans le plan (Q) relatif au point H.

Quelle que soit la courbe (Γ) appartenant à (Σ) passant par H, sa tangente en H appartient à ce plan, indépendamment de (Γ). Par définition, la surface (Σ) admet au point H un plan tangent qui n'est autre que (Q).

On s'explique maintenant pourquoi (Q) contient les deux droites (D) passant par H et la tangente à l'hyperbole méridienne située dans le plan $\mathcal{S}'\mathcal{Z}\mathcal{H}$.

Remarque : Le résultat n'a été établi qu'en supposant H, non sur (A). Dans le cas où l'on prend pour H un point t de (A), il subsiste, mais s'établit de manière différente. Le lecteur vérifiera qu'en supposant la tangente à (Γ) en t non perpendiculaire à (P) et formant donc avec (P) un angle aigu θ , en appelant h₁t₁ et h₁t'₁ les tangentes à (A) issues de h₁, projection sur (P) du point H₁, qui tend vers t sur (Γ), on a :

$$\lim \frac{t_1 h_1}{t h_1} = \frac{t_g \theta}{t_g \alpha} \text{ (finie).}$$

Dans le triangle t₁th₁, on peut remplacer le rapport de deux côtés par celui des sinus des angles opposés : l'angle $\widehat{t_1 t h_1}$ tend vers zéro (où π), son sinus tend vers zéro. Il en résulte que $\sin \widehat{t_1 t h_1}$ tend aussi vers zéro, t₁t tend vers la tangente à (A) en t, et th₁ tend aussi, obligatoirement vers cette tangente. Ceci établit que la tangente en t à (Γ) est dans le plan Q_t relatif au point t.

Demandons-nous si tout plan (R), passant par une droite (D) de (Σ), soit (D₀), est un plan tangent à (Σ) : la trace de (D₀) sur (P) est un point t₀ de (A), la trace de (R) sur (P) est une droite passant par t₀. En général elle recoupe (A) en un point t₁ distinct de t₀ : le cercle (h) orthogonal à (A) en t₀ et t₁ fournit un point H correspondant situé sur (D₀) et le plan (R) considéré est plan tangent à (Σ) en H.

Mais ce raisonnement suppose que t₁ et t₀ ne soient pas diamétralement opposés sur (A), auquel cas il ne correspond plus à ce couple de points de véritable cercle (h). Le plan (R) considéré passe en somme par (D) et par O : il n'est plus tangent à (Σ) en un point à distance finie.

Si t₀ et t₁ coïncident, le plan (R) donné coïncide avec le plan (Q_{t₀}) que nous avons encore établi être le plan tangent à (Σ) en t₀ [Voir remarque ci-dessus]. En résumé : tout plan passant par une droite (D) est un plan tangent à la surface (Σ), hors le plan déterminé par cette droite et le point O. O est évidemment centre de symétrie de (Σ). Ce plan exceptionnel a en commun avec (Σ) la symétrie de (D)

par rapport à O et la droite (D) elle-même : ces deux droites sont parallèles et n'ont pas, à strictement parler, de point commun.

Considérons maintenant l'intersection avec un plan (Q) tangent à (Σ) en H d'un parallèle quelconque de (Σ) ; *a priori* elle comporte deux points, communs aux deux droites (D) situées dans le plan (Q) et au plan de ce parallèle, car ces points appartenant à ces droites, appartiennent à (Σ) et sont donc sur le parallèle. Elle ne comporte pas d'autres points, car un cercle ne peut couper un plan en plus de deux points s'il n'y est contenu.

Si j et j' sont ces deux points respectivement situés sur chacune des droites (D) , le segment jj' est une *corde* du parallèle et les points de ce segment sont intérieurs au parallèle, donc dans la région intérieure de (Σ) .

En projection sur (P) , les deux génératrices de H sont projetées suivant ht et ht' et les projections des segments considérés, parallèles à (Δ) , remplissent les angles, opposés par le sommet, des projections ht et ht' , qui contiennent la droite indéfinie Oh . Les points de (Q) intérieurs à (Σ) sont projetés dans l'intérieur de l'angle sail-

lant tht' ou de son opposé par le sommet.

Cette règle n'est plus valable quand H est sur (A) ; la projection sur (P) ne pouvant être utilisée dans ce cas puisque (Q) est perpendiculaire à (P) .

III

Les données sont ici, outre la surface (Σ) , un point S de l'espace, non situé sur (Σ) , ni sur (P) , ni sur $z'z$.

1° Soit une droite (D) quelconque [définition donnée dans (II, 1°)] ; le plan contenant S et (D) est bien déterminé, S n'étant pas sur (Σ) . On a vu dans (II, 3°) que ce plan est, *en général*, tangent à (Σ) en un certain point H de (D) . L'objet de notre étude est la courbe (Λ) , lieu des points situés sur la surface (Σ) et tels, de plus, que le plan tangent à (Σ) en un tel point passe par S . Ce qui précède prouve qu'elle existe pour toute position de S .

On étudie *a priori* les points à l'infini de (Λ) en cherchant les directions des droites (D) telles que le plan SD soit exceptionnel, ou, comme on l'a vu, passe par O : on sait qu'un tel plan est tangent au cône $(\mathcal{A})$ et on est ramené à mener par S un plan tangent à ce cône : s'il en existe, il coupe (Σ) selon deux droites (D) parallèles dont la direction donne un point H à l'infini de (Λ) . D'où la discussion suivante :

Si S est intérieur au cône $(\mathcal{A})$, (Λ) n'a pas de points à l'infini.

Si S est extérieur au cône $(\mathcal{A})$, on peut mener par la droite OS deux plans distincts tangents à $(\mathcal{A})$. (Λ) a deux points à l'infini. Lorsque S est situé sur le cône $(\mathcal{A})$, les plans tangents précédents [et les directions des points à l'infini de (Λ)] sont confondus.

On appelle s la projection orthogonale de S sur (P) : sS n'est pas nul, s n'est pas confondu avec O : s a donc une polaire effective (L) par rapport au cercle (A) : on appelle g le pied de (L) sur la droite Os .

Existe-t-il des points H de (Λ) sur le cercle (A) de (Σ) ?

Ils s'obtiennent en menant par S des plans tangents à (Σ) du type (Q_1) [voir (I, 1°)], c'est-à-dire des plans tangents au cylindre de révolution de section droite (A) . Cela revient, dans le plan (P) , à mener par s les tangentes à (A) : s'il en existe le point de contact avec (A) est un point cherché.

Ecartons maintenant de notre étude de tels points H de (Λ) . On considère donc un point H tel que le plan tangent (Q) à (Σ) en H , déterminé par H et la polaire (Δ) de h , par rapport au cercle (A) , contient le point S . Il faut et il suffit à cet effet que la droite HS coupe la droite (Δ) de (P) ou lui soit parallèle.

Si HS coupe (Δ) , c'est au point de rencontre de sa projection hs avec (Δ) , soit q ,

et l'homothétie de centre φ transformant H en S transforme aussi h en s , son rapport $\frac{\overline{\varphi s}}{\overline{\varphi h}}$ est aussi égal à $\frac{\overline{sS}}{\overline{hH}}$ [ici on suppose $s's$ orienté]. Nous remplacerons $\frac{\overline{\varphi s}}{\overline{\varphi h}}$ par le rapport algébrique des distances des points s et h à la droite (Δ) , invariante dans l'homothétie.

Soit sv la perpendiculaire menée par s sur la droite Oh , sv est parallèle à (Δ) , la distance de s à (Δ) est mesurée par la longueur Kv , celle de h à (Δ) est mesurée par Kh .

D'où la relation

$$\frac{\overline{Kv}}{\overline{Kh}} = \frac{\overline{sS}}{\overline{hH}} \quad (8)$$

Le cas où la droite HS est parallèle à (P) et où nous voulons alors que HS soit parallèle à (Δ) , donne encore cette même condition, remplie parce que les deux membres sont égaux à l'unité dans (8).

Ainsi la relation (8) est nécessaire pour que (Q) passe par S ; elle est aussi suffisante, car elle exprime qu'une même homothétie (ou translation) conservant la droite (Δ) change h en s et H en S , donc que SH rencontre (Δ) ou que le plan $H(\Delta)$ contienne le point S .

2° L'énoncé désigne par $h\mu$ la perpendiculaire menée de h sur la droite Ogs . Les points μ et v appartiennent au cercle du plan (P) décrit sur hs comme diamètre : donc $\overline{Oh} \cdot \overline{Ov} = \overline{Os} \cdot \overline{O\mu}$ (9) (on oriente ici des droites Os et Oh).

Les droites (L) et (Δ) sont les polaires respectives de s et de h par rapport à (A) , ce qui s'exprime par

$$\overline{Og} \cdot \overline{Os} = a^2 \quad \overline{OK} \cdot \overline{Oh} = a^2 \quad \text{d'où}$$

$$\overline{Oh} \cdot \overline{OK} = \overline{Os} \cdot \overline{Og} \quad (10).$$

Les relations (9) et (10) entraînent les proportions

$$\frac{\overline{Os}}{\overline{Oh}} = \frac{\overline{Ov}}{\overline{O\mu}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{Og}} = \frac{\overline{Ov} - \overline{OK}}{\overline{O\mu} - \overline{Og}} = \frac{\overline{Kv}}{\overline{g\mu}}$$

On peut aussi déduire la relation

$$\frac{\overline{Oh}}{\overline{Os}} = \frac{\overline{Kv}}{\overline{g\mu}} \quad (11)$$

qui va nous intéresser, et qui est indépendante de l'hypothèse faite sur (H) , du parallélisme des directions de droites $v\mu$ et gK , toutes deux antiparallèles de la direction hs par rapport aux droites Oh et Os .

Éliminons Kv entre les relations (8) et (11), par multiplication membre à membre, ce qui donne

$$\frac{\overline{Os}}{\overline{Oh} \cdot \overline{Kh}} = \frac{\overline{sS}}{\overline{hH} \cdot \overline{g\mu}}$$

D'après la définition de H , le rayon du cercle (h) est d'une part $\frac{hH}{tg \alpha}$, d'autre

part, c'est $ht = ht' = \sqrt{\overline{hO} \cdot \overline{hK}}$, d'où la relation

$$\overline{hO} \cdot \overline{hK} = \frac{hH^2}{tg^2 \alpha} \quad (12).$$

Le résultat de l'élimination devient

$$\frac{\overline{Ostg^2\alpha}}{hH} = \frac{\overline{sS}}{g\mu} \quad (hH \text{ est } \neq 0),$$

soit encore $\frac{\overline{g\mu}}{hH} = \frac{\overline{sS}}{\overline{Ostg^2\alpha}}$ (13), équivalente à (8) moyennant (11).

Ainsi, quand H varie sur la courbe (Λ) , le rapport $\frac{\overline{g\mu}}{hH}$ reste constant, ou bien

la cote $\overline{hH}$ de H par rapport à (P) varie proportionnellement à la distance de h à (L) , $g\mu$, en effet, mesure la distance de h à (L) .

Désignons par M la projection orthogonale de H sur le plan fixe $s'sS$; $\overrightarrow{\mu M} = \overrightarrow{hH}$, la droite μM est perpendiculaire à Os dans ce plan.

La relation $\frac{\overline{g\mu}}{\mu M} = C^{\text{te}}$ signifie que le rapport (algébrique) des coordonnées de M par rapport à deux axes rectangulaires fixes du plan $s'sS$ reste constant : leurs orientations sont celles de $s's$ et de Os et ces axes se coupent en g . M reste donc sur une droite fixe passant par g . H reste situé dans un plan fixe (ϖ) passant par la droite (L) perpendiculaire à $s'sS$ en g .

(ϖ) ne dépend que de la surface (Σ) et du point S . L'angle γ qu'il fait avec (P) (angle aigu) est donné par la relation

$$\text{tg} \gamma = \frac{hH}{g\mu} = \frac{\overline{Ostg^2\alpha}}{sS} \quad (14).$$

3° Dans ce paragraphe et les suivants, on suppose que le point S appartienne à la région intérieure à (Σ) .

S étant, par hypothèse, dans le plan tangent en H à (Σ) , d'après le 3° de (II), sa projection s sur (P) est telle que la droite hs soit intérieure à l'angle saillant des tangentes ht , ht' et à son opposé par le sommet. Autrement dit, le point ϕ de rencontre de hs avec (Δ) est intérieur au segment ht' , ou encore hs est sécante au cercle (A) .

Soit I le pôle de la droite hs par rapport à (A) : il est donc extérieur à (A) : ce point I (à distance finie ou à l'infini) est le point d'intersection des polaires (L) et (Δ) des points s et h . Raisonnons en le supposant (cas général) à distance finie.

I est d'égale puissance positive par rapport au cercle (h) et par rapport au cercle (A) ; d'autre part, comme I est sur (L) , cette puissance est encore celle de I par rapport à tous les cercles d'un faisceau $(\mathcal{F})$ ayant (L) comme axe radical et contenant le cercle (A) , faisceau bien déterminé et indépendant de H sur (Λ) . L'axe radical d'un cercle quelconque de $(\mathcal{F})$ avec le cercle (h) passe par I .

Pour que ce cercle de $(\mathcal{F})$ devienne tangent à (h) , il faut et il suffit que cet axe radical devienne tangent à (h) ; de I , on peut mener deux tangentes à (h) , de points de contact j et j' : les cercles du faisceau $(\mathcal{F})$ passant par j ou j' sont tangents à (h) en ces points. Il peut se produire que l'un des points j ou j' soit sur (L) , auquel cas l'un des deux cercles considérés (U) et (U') dégénère en la droite (L) : cela ne peut arriver que pour un seul des cercles (U) et (U') , car une seule des tangentes menées de I à (h) peut être confondue avec (L) .

Ces considérations ne seraient pas en défaut si I était rejeté à l'infini (lorsque h est sur Os), il pourrait, semble-t-il, arriver dans ce cas, lorsque $(\mathcal{F})$ est un faisceau à points limites [la discussion de la nature de $(\mathcal{F})$ importe peu ici], que l'un des cercles (U) soit de rayon nul : ceci nécessiterait que (h) passe par un des points limites de $(\mathcal{F})$, et par conséquent par l'autre, puisque (h) est orthogonal à (A) , mais

alors h serait sur (L). C'est impossible, car on aurait alors $Hh = 0$, cas exclus [H n'est pas sur (A) et en même temps sur Os].

Cette définition des « cercles » (au sens large) (U) et (U') semble les faire dépendre du cercle (h), c'est-à-dire du point H que l'on considère sur (A). Ce point va être discuté au paragraphe suivant.

4° H et H_1 désignent ici deux points quelconques de la courbe (A) ; (h) et (h_1) sont les cercles du plan (P) correspondants. Ces cercles sont non-tangents, sinon ils se toucheraient en un point de (A), cercle orthogonal commun à (h) et (h_1) et les points H et H_1 appartiendraient à une même droite (D), ce qui est impossible [un seul point H au plus sur chaque droite (D)]. La droite HH_1 appartient au plan (π) et rencontre la trace (L) de π sur (P) en un point σ , en général à distance finie. On sait que σ est centre d'homothétie des cercles (h) et (h_1). σ est aussi le pôle d'une inversion échangeant ces deux cercles (*non tangents*). Cette inversion (J) laisse invariante la droite (L) passant par σ et échange (h) et (h_1). Si σ était à l'infini, rien ne serait changé à cette conclusion en substituant à (J) une symétrie par rapport à une droite perpendiculaire à (L).

Rappelons ici pourquoi une inversion qui échange deux cercles (C) et (C') laisse invariants tous les cercles (Γ) orthogonaux à (C) et (C') : soit m un point commun à (C) et (Γ), non situé sur (C') ; m' son inverse sur (C'), le cercle (Γ_1) passant par m et m' et orthogonal en m à (C) est déterminé, invariant dans l'inversion et orthogonal à (C') en m' . Les cercles (Γ) et (Γ_1) ont en commun le point m et la tangente en m et sont tous deux orthogonaux au cercle (C') : ils sont nécessairement confondus comme répondant à un problème qui n'a qu'une solution. Donc (Γ) est invariant dans l'inversion.

Ici l'inversion (J) qui échange (h) et (h_1) laisse donc invariant le cercle (A) orthogonal à la fois à (h) et (h_1). Cette inversion transforme en eux-mêmes, dans le faisceau ($\mathcal{F}$), d'une part la droite (L), d'autre part le cercle (A). Elle laisse invariants, plus généralement, chaque cercle du faisceau (Φ) : car le point σ a même puissance par rapport à tous les cercles de (Φ), égale à sa puissance par rapport à (A), qui est la puissance d'inversion de (J).

En particulier (J) conserve les cercles (U) et (U'). Ces cercles, par construction, sont tangents à (h) que l'inversion (J) transforme en (h_1). Donc, ces cercles (U) et (U') sont également tangents à (h_1).

Il en résulte que les cercles (U) et (U') sont fixes, quel que soit H sur (A).

5° Il a été signalé en (III, 4°) que l'un des cercles (U) ou (U') peut être une droite, qui est alors (L). Il en est ainsi quand le cercle (h) est tangent à (L), c'est-à-dire quand (L) est tangent au cône de sommet H et de directrice (h), ou que le plan (π) est tangent à ce cône. Il faut et il suffit à cet effet que l'angle aigu γ du plan (P) et du plan (π) soit égal à α . On a calculé cet angle par

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{Os \operatorname{tg}^2 \alpha}{Ss} \quad (14).$$

La condition $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha$ équivaut à $\frac{Ss}{Os} = \operatorname{tg} \alpha$; ou encore au fait que la droite

OS forme avec $s's$ un angle aigu égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Ainsi, pour que l'un des cercles (U),

(U') soit une droite, il faut et il suffit que le point S appartienne au cône (A).

Revenons au cas général. L'un des cercles (U), (U'), n'est pas une droite, soit (U) celui-là, u son centre, η le point de contact de (U) et de (h). L'homothétie de centre η , qui transforme h en u , transforme H en un point U situé sur la perpendiculaire à (P) en u .

$$\frac{uU}{u\eta} = \frac{hH}{h\eta} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ donc } uU = u\eta \operatorname{tg} \alpha = C''.$$

Ceci ne démontre pas sans ambiguïté que U soit fixe.

Mais considérons à nouveau un autre point quelconque H_1 de (Δ) et le cercle correspondant (h_1) , que (U) touche en η_1 ; on a vu que les points η et η_1 sont inverses dans une inversion (J) de pôle σ (mêmes notations que plus haut). Le théorème de Ménélaüs donne, η , η_1 , σ étant alignés sur les trois côtés du triangle uhh_1 :

$$\frac{\overline{\eta u}}{\overline{\eta h}} \times \frac{\overline{\sigma h}}{\overline{\sigma h_1}} \times \frac{\overline{\eta_1 h_1}}{\overline{\eta_1 u}} = +1$$

$$\text{Or } \frac{\overline{\eta u}}{\overline{\eta h}} = \frac{\overline{uU}}{\overline{hH}}, \quad \frac{\overline{\sigma h}}{\overline{\sigma h_1}} = \frac{\overline{hH}}{\overline{h_1 H_1}} \quad \text{d'où } \frac{\overline{\eta_1 u}}{\overline{\eta_1 h_1}} = \frac{\overline{uU}}{\overline{h_1 H_1}}$$

Le point transformé de H_1 par l'homothétie de centre η_1 et qui transforme h_1 en u est donc le point U . La définition de U ne change pas quand on substitue le cercle (h_1) au cercle (h) . Le point U est donc *fixe* quand H varie sur (Δ) .

Le point H est sur la droite variable $U\eta$, qui est génératrice du cône de sommet U et de directrice (U) , cône de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$. H appartient à la section par le plan (π) de ce cône fixe de révolution.

La courbe (Δ) est donc portée par une conique du plan (π) .

Il est aisé de discuter sa nature, connaissant l'angle γ du plan (π) avec le plan (P) d'un parallèle du cône de révolution, ou $\frac{\pi}{2} - \gamma$ de (π) avec l'axe.

Cette conique est une ellipse si $\frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} - \gamma$ ou $\text{tg } \gamma < \text{tg } \alpha$,

une hyperbole si $\frac{\pi}{2} - \alpha > \frac{\pi}{2} - \gamma$ ou $\text{tg } \gamma > \text{tg } \alpha$.

une parabole si $\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$ ou $\text{tg } \gamma = \text{tg } \alpha$.

La dernière condition, étudiée au début de (III, 5°), exprime que S est sur le cône $(\mathcal{A})$ [c'est possible, car $(\mathcal{A})$ est entièrement situé dans la région intérieure de (Σ)].

De même $\text{tg } \gamma < \text{tg } \alpha$ s'écrit $\frac{Os \text{ tg}^2 \alpha}{Ss} < \text{tg } \alpha$, soit $\frac{Ss}{Os} > \text{tg } \alpha$: ceci exprime que l'angle de OS avec (P) est supérieur à α , c'est-à-dire que S est intérieur au cône $(\mathcal{A})$.

En résumé, la conique qui porte (Δ) est une ellipse, une hyperbole, une parabole selon que le point S est intérieur au cône $(\mathcal{A})$, situé dans la région extérieure de $(\mathcal{A})$ [c'est-à-dire entre ce cône et (Σ)], ou enfin sur le cône $(\mathcal{A})$.

On contrôle ces résultats par l'étude des points à l'infini de (Δ) [voir III, 1°] faite *a priori*.

On peut objecter que (Δ) n'est une conique qu'autant que (π) ne passe pas par le sommet U du cône de révolution. Si ceci arrivait, ou bien (Δ) n'aurait pas de points réels autres que U , ou serait décomposée en droites. Ces circonstances sont inadmissibles : la seconde donnerait pour la famille des cercles (h) un faisceau de cercles et deux de ces cercles devraient avoir un centre d'homothétie sur (L) , fixe. Le faisceau des cercles (h) ne pourrait être qu'un faisceau de cercles tangents en un point, situé à la fois sur (Δ) et sur (L) , l'un de ces cercles aurait son centre en s ; mais alors le point S serait sur (Σ) , cas qui a été écarté dans l'énoncé.

La tangente à (Δ) en H doit être située, d'une part, sur le plan (Q) tangent à (Σ) en H , d'autre part sur le plan (π) . Sa trace sur (P) est donc le point I d'intersection des traces (Δ) et (L) de ces deux plans. La tangente cherchée est donc HI .

Dans le plan (Q), qui contient aussi HS et les droites Ht et Ht', remarquons que HS coupe (Δ) au point φ d'intersection de (Δ) avec hs, qui est conjugué de I par rapport au cercle (A), puisque hs est la polaire de I ; φ et I sont donc conjugués harmoniques par rapport à t et t' ; donc HI et HS sont conjuguées harmoniques, dans le plan (Q) par rapport aux deux droites (D) de la surface (Σ) qui passent par H et qui ne sont autres que Ht et Ht'.

Remarque : On ne demandait pas d'établir l'identité du lieu (Δ) avec la conique à laquelle tous ses points appartiennent. Voici un moyen de procéder à cet effet.

Soit H₀ un point de la conique : prenons un point arbitraire H du lieu (Δ) il est sur la conique, donc dans le plan (π) ; la droite H₀H de ce plan coupe (L) en un point σ₀. Appelons (h₀) et (h) les cercles d'intersection avec (P) des cônes de révolution d'axes parallèles à s's et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$; (h₀) et (h) sont homothétiques par rapport à σ₀.

H₀ et H appartenant au cône de sommet U, (h) et (h₀) sont tangents à (U) en des points η et η₀.

Les droites UH et UH₀ coupent (P) en η et η₀. Le point σ₀ appartient au plan (P) et au plan HH₀U, il est donc sur leur intersection qui est la droite ηη₀. Ainsi η et η₀ sont alignés avec σ₀.

Une inversion (J₀) de pôle σ₀ échange les cercles (h) et (h₀) ; elle laisse invariant le cercle (U), parce qu'il est tangent à (h) et (h₀) aux points η, η₀, non homothétiques évidemment et alignés avec σ₀.

La puissance de cette inversion est la puissance de σ₀ par rapport à U, qui est la même que la puissance de σ₀ par rapport à (A'), puisque (L) est axe radical de (A) et du cercle (U) du faisceau (F).

Donc, l'inversion (J₀) conserve (A).

H appartenant à (Δ), donc à (Σ), le cercle (h) est orthogonal au cercle (A).

(h₀) transformé de (h) par J₀ est donc aussi orthogonal au cercle (A). Le point H₀ est donc sur (Σ). Dire qu'il est aussi dans (π), c'est dire que le plan (Q) tangent à (Σ) en H₀ passe par S, car la relation (13) est une condition suffisante, comme (8), qu'elle entraîne, pour que (Q) passe par S. Donc le point H₀ appartient au lieu (L).

La méthode suivie ici pour qualifier la courbe (Δ), courbe de contact du cône circonscrit de sommet S à la surface (Σ), ne serait plus valable si le point S, au lieu d'être (début de 3^e) situé dans la région intérieure de (Σ), était situé dans la région extérieure.

RESULTATS DE L'ÉPREUVE

L'impression d'ensemble éprouvée par le jury de correction est satisfaisante. Il semble que les élèves possèdent leur cours et savent l'utiliser. Une certaine aisance dans les calculs est à remarquer.

Dans une copie bien présentée et bien rédigée le problème est traité en entier. Dans une dizaine, l'ensemble est compris, quelques points délicats sont admis.

Il y a, certes, des copies faibles en grand nombre, ce qui s'explique par la longueur du sujet, d'où une cohérence insuffisante dans la vision des paragraphes de chaque partie.

Pas mal de concurrents, sans se laisser décourager par un échec relatif dans la partie I, ont constaté qu'il leur était possible d'aborder la suite.

Passons en revue et par ordre ces différentes parties.

On a été surpris de constater, lors de la surveillance des épreuves, que la plupart des candidats passaient beaucoup de temps à démontrer la première question de I.

Celle-ci contient des précisions sur des cas particuliers, demandées parce que, dans la suite, on devait avoir à s'y référer fréquemment, ou exclure ces cas particuliers faute de temps. Ainsi on aura à supposer constamment que h n'est pas situé sur le cercle (A) parce que la méthode constamment employée est un procédé de projection orthogonale sur le plan (P) et que le plan (Q) devient perpendiculaire à (P) lorsque h est sur (A).

La phrase : « Etendre la définition du plan (Q) au cas particulier où h est sur (A) » n'apparaît pas avoir été bien comprise. Il y a cependant des extensions de définitions dans le programme : points conjugués par rapport à un cercle, cas particuliers de coniques englobant deux droites, et aussi en trigonométrie, des extensions

de définition des fonctions avec l'exemple de la vraie valeur de $\frac{\sin x}{x}$ pour $x = 0$, qui n'est autre qu'une limite. Sans doute les élèves ne classent pas nettement, dans leur esprit, s'ils n'y sont aidés, l'apparement de ces idées touchant des extensions possibles des définitions primitives.

En substance, ils avaient à chercher la position limite de H' quand h , extérieur au cercle (A), s'en rapproche indéfiniment. Toujours est-il que les correcteurs ont relevé des phrases ahurissantes sur ce que peut devenir un cône de révolution varia-

ble, mais de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$ constant : le cône devient « filiforme », il « dégénère en cylindre », « l'angle α devient droit » !

Le cas où h est rejeté à l'infini sur un diamètre du cercle (A) est nettement mieux traité, mais trop probablement parce que l'énoncé indiquait le résultat à obtenir !

La mentalité des élèves de cette classe, qui se révèle ainsi, est que le fin du fin, pour eux, est de deviner les choses plus vite que le voisin ; mais si on pouvait toujours deviner sans recherche les résultats, les Mathématiques ne seraient qu'une tautologie, alors qu'elles servent à *élucider* des points délicats.

Des élèves ignorent encore la définition de l'angle d'une droite et d'un plan ; la question relative à l'angle du plan (Q) et de la sphère (N) fut une des plus mal traitées. Seule la meilleure copie a correctement établi les résultats angulaires visés par le 2° de I. Heureusement, comme nous l'avons dit déjà, ces résultats n'intervenaient pas dans la suite.

Si l'égalité des rapports $\frac{F'H}{F'H'}$ et $\frac{FH}{FH'}$ a été généralement démontrée, on a plus rarement établi que leur valeur commune est $\cos \alpha$. La considération d'une sphère comme lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés est constant et de valeur k , n'est pas familière à beaucoup de candidats. Ceux qui se rappelaient que le rapport des distances du centre de la sphère à ces mêmes points est de valeur k^2 ont été plus heureux, car cette remarque conduisait à la solution très simplement.

On serait heureux de constater que des résultats de ce genre et d'autres encore attestent l'érudition des concurrents, mais on a regretté par contre d'en voir faire un étalage intempestif. On a parlé de droites focales d'un cercle, de génératrices d'une quadrique, alors que les exposés systématiques de ces théories ne se trouvent nulle part en somme dans les livres destinés à cette classe. Au rebours, le problème pouvait constituer une initiation à ces questions pouvant rivaliser avec ces exposés, en admettant qu'ils fussent classiques.

Peut-être cette information, portant sur des mots plus que sur des choses, ne procède-t-elle que d'une tendance assez enfantine. Une autre a consisté à forger des mots, par analogie, pour les notions rencontrées dans le problème : un élève appelle la surface (Σ) « cône à génératrice hyperbolique ». Cette fois, l'*extension*, car c'en est une, tombait à faux. (Σ) est aussi baptisé « hyperboloïde à deux nappes » par un autre.

Dans le 1^{er} de la II^e partie, certains candidats, dans un zèle louable, se sont demandé s'il n'existait pas, en plus des droites trouvées, d'autres droites situées tout entières sur (Σ) . L'énoncé, si telle eût été notre pensée, l'aurait dit plus nettement. Reconnaissons qu'il eût été préférable de définir les droites appelées (D) d'après leur construction, demandée, deux lignes plus haut ; mais c'eût été donner à la fois dans l'énoncé une question et sa réponse.

L'un des candidats a parfaitement conduit son raisonnement jusqu'au bout, trouvant en somme toutes les droites de (Σ) et il lui en a été tenu compte, bien entendu.

Le (II) présentait moins de difficulté que le (I), mais abordait un domaine nouveau pour l'intuition : l'idée du plan tangent, chez ces élèves, ne s'est pas évadée volontiers des images offertes par le plan tangent à la sphère ou au cône ; on cesse d'y voir clair quand on trouve que la surface (Σ) a *plus d'une droite* commune avec son plan tangent. L'un des concurrents renonce à faire le régionnement demandé à la fin de (I, 3^e) en affirmant qu'une surface ne peut couper son plan tangent. Et le fait qu'un plan tangent tourne autour de (D) quand son point de contact varie sur (D) devait aussi faire scandale.

La démonstration de l'existence du plan tangent à la surface (Σ) en un de ses points H, par le passage à la limite que suggérait l'énoncé, n'est pas généralement mise au point de façon correcte ; les candidats ne prennent aucune précaution et n'analysent pas assez la figure initiale *avant* d'en trouver les propriétés se conservant à la limite. Que dire d'affirmations comme les suivantes : quand (h_1) se confond avec (h) , leur axe radical est rejeté à l'infini, ou encore passe par le centre (h) ? on s'explique ces illusions parce qu'on peut dire, qu'au passé, les cercles (h) et (h_1) sont devenus concentriques, ou sont devenus de même rayon. Il semble que les passages à la limite devraient être envisagés, en quelque sorte, sous le point de vue de prévisions relatives au futur.

Tout cela est très instructif : mais comme nous le recommandait M. le Haut-Commissaire PERRIN, n'incriminons pas chez nos élèves le défaut de rigueur, car la rigueur est relative. On aura remarqué, en lisant notre solution, qu'elle fait intervenir des positions limites de droites : passe encore quand la droite mobile passe par un point fixe, ou garde une direction fixe ; mais généralement il n'en est pas ainsi. Nous nous sommes toujours étonné qu'on ne se préoccupe pas davantage, même en Spéciales, d'élucider cette notion de position limite (droite, cercle, etc...) : sans doute cela va-t-il trop loin, et nous nous refusons à admettre comme réponse qu'on considère ce que devient à la limite l'équation de la ligne variable considérée ! Il semble bien pourtant que seule l'analyse soit susceptible de suppléer le microscope qu'il faudrait employer pour lire une figure comportant des éléments infiniment voisins.

Avec la dernière partie III, on aborde le lot des copies retenues pour un examen ultérieur après la première lecture. Faut-il que toutes les phrases de l'énoncé commencent par le refrain : « démontrer que... » ? On le croirait, car, sauf dans la meilleure copie, le texte : « Sur une droite (D) de (Σ) il existe (en général) un point H tel que le plan tangent en H à (Σ) passe par S », n'a été considéré que comme l'affirmation d'une vérité première.

Les calculs tendant à prouver la fixité du plan de H et de (L) sont certes un peu lourds, et avaient été mis en balance, lors de l'élaboration du problème, avec des méthodes bien différentes : ils ont l'avantage de se rattacher à une figure plane assez familière : un candidat a très bien vu, et l'a signalé, que l'on démontre, en somme, sans le citer, un théorème de Salmon relatif à deux points et leur polaires par rapport à un cercle.

Quant à la valeur (constante) du rapport $\frac{g}{hH}$, elle ne se trouve que dans deux

ou trois copies, et cela, probablement, parce que cette valeur n'était pas donnée dans le texte.

L'existence du plan fixe (π) contenant (Δ) n'est pas nettement définie par la majorité des candidats, leur raisonnement laissant le choix entre l'un ou l'autre de deux plans fixes symétriques par rapport à (P).

Plus loin les candidats ont admis que le faisceau ($\mathcal{F}$) a des points fixes réels, alors qu'il peut très bien, dans les conditions fixées par l'énoncé, être aussi bien à points limites réels.

La fixité des cercles (U) et (U') n'a été démontrée vraiment que dans la meilleure composition. Celle-ci domine par la conscience et la sûreté de méthode de son auteur ; en particulier, il a traité la question de la tangente à (Δ) en un point courant H , d'une manière excellente, à l'aide d'une petite épure.

Tout le problème d'ailleurs se rattachait à une conception annexe de notre « géométrie cotée », qui associerait, pour la représentation des points de l'espace, un cercle orienté à un tel point, dans le plan P de projection, son rayon étant proportionnel à la cote du point et son centre situé en sa projection.

Critiques de détail.

On dénonce avec vigueur les candidats qui tentent d'abuser les correcteurs, ou paraissent le faire, en ne transcrivant pas sur leur copie des calculs intermédiaires et affirment qu'on arrive au résultat. On regrette aussi le manque de figures partielles dans de nombreuses copies, où l'accumulation des constructions sur une même figure générale la rend à peu près illisible. Les figures devraient d'ailleurs être tracées sur une feuille à part et numérotées.

On regrette aussi l'emploi abusif de la notation vectorielle quand il ne s'agit en fait que de mesures algébriques de vecteurs ; ainsi on découvre des formules telles

$$\text{que } \vec{u} \times \vec{v} = k \text{ d'où on déduit } \vec{u} = \frac{k}{v} !$$

Il y a lieu de signaler qu'un candidat s'est vu priver du huitième accessit, auquel il aurait pu prétendre, à cause de la répétition exagérée d'affirmations fausses, mêlées avec des résultats exacts ; on a estimé que ce fait dénote un fâcheux manque de sûreté dans le jugement. Un autre, qui n'avait traité, par contre, que les parties I et II, mais presque parfaitement, a eu un septième accessit.

Palmarès de l'épreuve.

180 concurrents ont pris part à l'épreuve (30 de plus qu'en 1955). Les seize meilleures copies ont été retenues pour une seconde lecture, par tous les correcteurs.

Le jury a décerné deux prix (moyennes sur 20 : 19 et 15) et sept accessits, peu différenciés, avec des notes variant de 13 à 12 ; il y a trois seconds accessits (*ex-æquo*) et, de même, deux cinquièmes accessits.

Le premier prix du concours de 1956 avait eu un troisième prix au concours de 1955, dans la classe de Première ; le second prix avait remporté le premier prix en Première ; le premier accessit de 1956 avait eu le second prix en Première.

Le jury a regretté qu'il y ait une tendance marquée à rapprocher la date des épreuves du Concours général du début, plutôt que de la fin, du dernier trimestre scolaire ; en 1956, l'épreuve, pour la classe de Mathématiques, prit place à onze jours du dimanche de Quasimodo.

Certes, la tâche du Bureau ministériel chargé des concours s'alourdit de plus en plus avec la multiplication des sessions de nos concours de recrutement des maîtres. Cette multiplication est provisoire, affirme-t-on, mais bouleverse dans les classes toutes les traditions secondaires. Si la période de vacances ne comporte plus, désormais, de purgatoire pour les non-reçus au Baccalauréat, puisqu'on envisage de supprimer la seconde session, que tout le monde fasse effort pour assurer à l'année scolaire la plénitude d'emploi désirable.

L'Inspecteur général, président du Jury,

P. ROBERT.