

BULLETIN de l'**ASSOCIATION**
des **PROFESSEURS**
de **MATHÉMATIQUES**
de l'**Enseignement Public**

SOMMAIRE

I. ETUDES.

- G. CHOQUET : La droite numérique ; propriétés topologiques
fondamentales 162
- A. REVUZ : Espaces euclidiens et espaces métriques. Notions
métriques et notions topologiques 177

II. ESSAI.

- FRIBOURG : Essai d'une théorie du PGCD et du PPCM inspiré
par les méthodes de l'algèbre moderne 186

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.

- P. ROBERT : Les modifications de programmes dans les classes
préparant au Baccalauréat 189
- G. W. : Sur une modification des programmes 194

IV. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.

- R. DONTOT : Rapport sur l'Agrégation de Mathématiques
(hommes), session de 1956 195
- P. ROBERT : Rapport sur le Concours Général de Mathématiques
1956 (classe de Mathématiques) 220

V. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

- G. W. : Lettre au Ministre de l'Education Nationale 235
- Le bloc-notes de l'A.P.M. 236

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)
Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ...	300 F
Prix de l'abonnement au <i>Bulletin</i>	1 000 F
Prix du numéro	200 F

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

<i>Président :</i>	M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11 ^e). OBE. 56-95.
<i>Vice-Présidents :</i>	Mlle AFFRE, 5, rue Gustave-Le-Bon, Paris (14 ^e). M. BIGUENET, 41, rue M.-Michelis, Neuilly-sur-Seine. M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14 ^e). M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5 ^e). M. THÉRON, 38, rue Lacépède, Paris (5 ^e).
<i>Secrétaires :</i>	Mlle FÉLIX, 3, rue Pierre-Berland, Versailles (S.-et-O.) (Conférences). M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16 ^e). M. HUISMAN, 11, rue J.-Cœur, Paris (4 ^e) (Bibliothèque et « Bulletin »). M. ITARD, 6, avenue Paul-Appell, Paris (14 ^e) (Bibliographie). M. ROSTOLLAND, 19, rue des Ursulines, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.). M. SIROS, 13, avenue J.-Racine, Sceaux (Seine) (Programmes).
<i>Trésorier :</i>	M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).
<i>Comité de rédaction du « Bulletin » :</i>	Mlle FÉLIX ; MM. CHAZAL, GIRARD, ITARD, SIROS ; Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; Mlle VERVAECKE (Lille, *Fénelon*) ; M. POCHARD (Nice) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (Lyon, *Ampère*).

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (*Compiègne*) ; M. WALUSINSKI (*St-Cloud*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. DURRANDE (*St-Louis*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; RUFF (*St-Louis*) ; SIROS (*Lakanal*) ; THÉRON (*Louis-le-Grand*).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOU (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (*Rennes*) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (*Strasbourg, Kléber*) ; *Tunis :* M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public



I. ÉTUDES

LA DROITE NUMÉRIQUE; PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES FONDAMENTALES

par Gustave CHOQUET
Professeur à la Sorbonne

1. Introduction

La topologie générale est née le jour où l'on s'est intéressé à d'autres fonctions que celles données par une expression analytique, et où l'on a senti le besoin de donner une définition précise des fonctions continues. Aujourd'hui encore, on peut dire que la topologie générale est l'étude des notions de convergence et de continuité.

Le premier ensemble sur lequel on a défini ces notions, et qui maintenant encore reste le plus important, aussi bien dans les recherches théoriques que dans les applications, est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

C'est à la définition de $\mathbb{R}$ et à sa topologie que je consacrerai cette conférence.

2. L'ensemble $\mathbb{R}$ défini comme groupe commutatif, totalement ordonné, et continu

Avant de parler de la topologie de $\mathbb{R}$, j'en rappellerai d'abord les propriétés essentielles ; plus précisément, je définirai $\mathbb{R}$ comme ensemble muni d'une structure algébrique et d'une structure d'ordre, aux propriétés caractéristiques.

DÉFINITION 1 : On dit qu'un ensemble G est un groupe commutatif totalement ordonné si :

- 1) G est muni d'une opération interne notée $+$ pour laquelle G est un groupe commutatif.
- 2) G est muni d'une structure d'ordre total, noté $\leq$.
- 3) Cette addition et cet ordre sont compatibles en ce sens que :
 $a \leq b$ entraîne $a + x \leq b + x$ pour tout x .

Il est immédiat alors que la relation $a \leq b$ équivaut à $0 \leq (b - a)$.

(*) Conférence prononcée le jeudi 25 octobre 1956, à l'Institut Henri-Poincaré, première conférence du cycle sur la topologie organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

Exemples : L'ensemble Z des entiers de signe quelconque ; l'ensemble Q des nombres rationnels ; l'ensemble P des polynômes $p(x)$ à coefficients réels, où l'on pose $p_1 < p_2$ si le terme de plus bas degré de $(p_2 - p_1)$ a un coefficient > 0 .

DÉFINITION 2 : On dit qu'un ensemble totalement ordonné E est continu si :

1) Tout intervalle ouvert $]a, b[$ de E contient au moins un point (donc aussi une infinité de points).

2) Tout sous-ensemble X de E qui est majoré (1) admet une borne supérieure (1).

L'ensemble Z des entiers vérifie la propriété 2, mais pas la propriété 1 ; pour l'ensemble Q des rationnels, c'est l'inverse.

Quand R sera défini, on pourra montrer que tout sous-intervalle de R est continu. De même, soit E l'ensemble des couples (a, b) où $a \in [0, 1]$ et $b \in [0, 1]$; si on l'ordonne par la relation :

$$(a, b) \leq (a', b') \quad \text{si } a < a' \quad \text{ou si } a = a' \text{ et } b \leq b',$$

l'ensemble ordonné E est continu.

Il est immédiat que si E est continu, toute partie minorée X de E admet une borne inférieure, qui n'est autre que la borne supérieure de l'ensemble des minorants de X .

Nous allons voir que les définitions 1 et 2 conduisent à un ensemble structuré unique, à une isomorphie près. De façon plus précise :

THÉORÈME 1 : Soient G et G' deux groupes commutatifs totalement ordonnés et continus, et contenant chacun plus d'un élément. Quels que soient $a \in G$ et $a' \in G'$ avec $a > 0$ et $a' \geq 0$, il existe une représentation croissante (2) et une seule f de G dans G' telle que $f(a) = a'$. Lorsque $a \neq 0$, f est une isomorphie ; lorsque $a' = 0$, on a $f(x) = 0$ pour tout x .

On a un énoncé analogue pour $a' \leq 0$ en remplaçant le mot « croissante » par « décroissante ».

La démonstration de ce théorème est calquée sur la démonstration élémentaire classique établissant l'existence de l'exponentielle :

On montre d'abord que tout intervalle de G (resp. G') possède un milieu, ce qui permet de définir l'ensemble A des éléments $(p/2^r)a$ de G ; l'ensemble A est partout dense (3) sur E et on définit f sur A par la relation $f(\frac{p}{2^r}a) = \frac{p}{2^r}f(a)$. On prolonge ensuite f à G tout entier.

Remarque : Soient f et g deux représentations monotones de G dans G' ; soit h l'application définie par $h(x) = f(x) + g(x)$. Il est immédiat que h est une représentation. D'autre part, si, par exemple,

(1) On dit que l'élément a de E majore X si $x \leq a$ pour tout $x \in X$. Si, parmi l'ensemble de tous les majorants de X , il en existe un qui soit plus petit que tous les autres, on l'appelle borne supérieure de X . On définit de même les notions de minorant et de borne inférieure.

(2) C'est-à-dire que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et que $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$.

(3) C'est-à-dire que tout intervalle ouvert de G contient des points de A .

$h(a) \geq 0$, ($a > 0$), on a aussi $h(x) \geq 0$ pour tout élément $x \geq 0$ de A ; ceci s'étend alors à tout $x \geq 0$.

On peut donc dire que la somme de deux représentations monotones de G dans G' en est une ; plus précisément, ces représentations constituent un groupe, d'ailleurs isomorphe à G' .

Existence de ces groupes.

Le théorème 1 est fondamental puisqu'il montre l'unicité, à une isomorphie près, des groupes étudiés. Il n'en établit pas l'existence ; celle-ci pourra s'établir de diverses façons.

Par exemple, G sera l'ensemble des développements décimaux illimités, muni de l'addition ordinaire ; le défaut de ce procédé est la nécessité d'éliminer les développements ne comprenant que des 9 à partir d'un certain rang. Remarque analogue pour les développements dyadiques.

Plus classiquement, on peut partir du groupe commutatif ordonné Q des nombres rationnels ou des nombres rationnels dyadiques, et le compléter en utilisant, soit le procédé des suites de Cauchy, soit le procédé des coupures.

Nous signalerons ici une variante commode du procédé des coupures, qui supprime les inconvénients dus à l'existence de trois sortes de coupures :

Appelons *section commençante* du groupe ordonné Q toute partie non vide s de Q telle que :

- 1) Si $x < y$ et si $y \in s$, on ait aussi $x \in s$.
- 2) s n'ait pas de plus grand élément, et $s \neq Q$.

Par exemple, pour tout $a \in Q$, l'ensemble s_a des $x < a$ est une section commençante.

Soit S l'ensemble des sections commençantes ; la relation d'inclusion définit dans S un ordre total dont on vérifie qu'il est continu, en utilisant le fait que toute réunion de sections commençantes en est une, ou bien est égale à Q .

On définit sur Q une addition en posant :

$$s_1 + s_2 = \text{ensemble des } (x_1 + x_2), \text{ où } x_1 \in s_1 \text{ et } x_2 \in s_2.$$

Alors S muni de cette addition et de cet ordre est un groupe commutatif totalement ordonné continu, et il contient un sous-groupe partout dense isomorphe à Q dans l'isomorphie $a \rightarrow s_a$ ($a \in Q$) ; on identifie en général ce sous-groupe à Q .

C'est de préférence à cet ensemble que nous donnerons le nom de droite réelle R .

3. Structure de corps sur R

Sur la droite réelle R telle que nous venons de la définir, on n'a jusqu'ici qu'une seule opération, l'addition ; on peut en outre y définir une multiplication. Pour cela, il suffirait de prolonger à R la multiplication

déjà définie sur son sous-ensemble partout dense Q ; cette construction est classique.

Mais nous allons utiliser une autre méthode, basée sur le théorème 1, qui a l'intérêt de souligner les propriétés caractéristiques de la multiplication, et d'être plus proche des méthodes élémentaires qui considèrent la multiplication comme un opérateur.

DÉFINITION 3 : *On appelle corps commutatif totalement ordonné tout ensemble K muni d'une structure de corps commutatif et d'un ordre total (noté $\leq$) compatible avec la structure algébrique de K , en ce sens que :*

1) $a \leq b$ entraîne $a + x \leq b + x$ pour tout x .

2) $0 \leq a$ et $0 \leq b$ entraînent $0 \leq ab$.

On désigne par K_+ (resp. K_+^*) l'ensemble des éléments $x \geq 0$ (resp. $x > 0$).

THÉORÈME 2 (existence et unicité) :

Soit G un groupe commutatif totalement ordonné continu (et noté additivement).

Pour tout élément $e > 0$ de G , il existe sur G une structure de corps et une seule telle que son addition soit celle de G , que son unité soit e , et telle que :

$$(1) \quad 0 \leq a \text{ et } 0 \leq b \text{ entraînent } 0 \leq ab.$$

Ce corps est commutatif.

Nous avons supposé $e > 0$ parce que, dans un corps totalement ordonné, tout carré x^2 est ≥ 0 ; si donc e est l'unité, on a : $e = e^2 > 0$.

Unicité : Supposons que G possède une structure de corps satisfaisant à la condition (1) et notons xy le produit de x et y .

Soit a un élément > 0 de G . L'application f définie par $x \rightarrow ax$ est une isomorphie du groupe G sur lui-même, et l'inégalité (1) montre que f est croissante ; or $f(e) = a$, donc, d'après le théorème 1, cette application f est entièrement déterminée par la donnée de a, e , et de la structure de groupe de G .

De même si $a < 0$, comme on a dans tout corps $ax = -(-a)x$, le produit ax est déterminé par la donnée de a, e, G (et x).

Autrement dit, s'il existe sur G une structure de corps satisfaisant à la condition (1), elle est entièrement déterminée par le choix de l'élément unité.

Existence : Il nous reste à montrer qu'il existe bien sur G une telle structure de corps, et qu'un tel corps est commutatif.

Ce qui précède nous guide en nous montrant qu'on peut essayer de définir le produit ax comme transformé de x dans la représentation f_a croissante ou décroissante, qui transforme e en a .

Plus précisément, posons : $ax = f_a(x)$.

Nous voulons montrer que, muni de cette multiplication, G devient un corps commutatif ordonné :

1) $f_a \circ f_b$ est une représentation monotone.

Comme $f_a(f_b(e)) = f_a(b) = ab$, on a donc : $f_a \circ f_b = f_{ab}$.

Il en résulte que $f_a(f_b(c)) = f_{ab}(c)$, d'où : $a(bc) = (ab)c$; autrement dit, le produit est *associatif*.

2) Comme f_e est l'application identique, on a $eb = b$ pour tout b ; d'autre part $be = b$. Donc e est un élément unité.

3) Pour tout $a \neq 0$, f_a est un isomorphisme de G sur G ; donc il existe un élément a' tel que $f_a(a') = e$; on a $aa' = e$; ceci entraîne $a'a = e$; car si $a'a = u$, on a $aa'a = au$ ou $a = au$, d'où $u = e$ puisque f_a est biunivoque.

Autrement dit, a possède un inverse.

4) La relation $f_a(x + y) = f_a(x) + f_a(y)$ s'écrit :

$$a(x + y) = ax + ay.$$

On va voir que l'on a aussi $(a + a')x = ax + a'x$.

En effet, l'application $x \rightarrow (a + a')x$ n'est autre que $f_{a+a'}$; l'application $x \rightarrow ax + a'x$ est la somme des deux représentations monotones $f_a, f_{a'}$; d'après une remarque précédente, c'est une représentation monotone qu'on notera g . Comme les applications $f_{a+a'}$ et g prennent la même valeur au point e , elles sont identiques.

Nous venons donc de démontrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Les propriétés de la multiplication démontrées jusqu'ici prouvent qu'elle détermine sur G une structure de corps. On va voir que ce corps est commutatif.

5) Il suffit pour cela de montrer l'identité des applications $x \rightarrow ax$ et $x \rightarrow xa$. Supposons par exemple $a > 0$.

La première application est f_a ; soit φ_a la seconde. Nous venons de montrer que $(x + y)a = xa + ya$; d'autre part $xa \geq 0$ pour tout $x \geq 0$; donc φ_a est une représentation monotone. Comme $\varphi_a(e) = f_a(e)$, on a bien $\varphi_a = f_a$.

6) Si l'on remarque enfin que les relations $0 \leq a$ et $0 \leq x$ entraînent $0 \leq ax$, on voit que le théorème est entièrement démontré.

COROLLAIRE : Soient K et K' deux corps commutatifs totalement ordonnés continus. Il existe un isomorphisme croissant et un seul du corps K sur le corps K' .

Cet isomorphisme n'est autre que l'isomorphisme du groupe additif ordonné K sur le groupe additif ordonné K' , qui transforme l'unité de K en l'unité de K' .

Le corps R : D'après le corollaire précédent, on pourrait appeler corps des réels n'importe lequel des corps commutatifs totalement ordonnés continus. Mais nous réserverons ce nom au corps obtenu en munissant le groupe additif R de la multiplication associée à l'unité $e = 1$.

Exponentielles et logarithmes : L'ensemble R_+^* est un groupe totalement ordonné continu pour la multiplication. Il est donc isomorphe au groupe additif R d'après le théorème 1.

L'isomorphisme monotone f de R sur R_+^* tel que $f(1) = a$ s'ap-

pelle l'exponentielle de base a . L'application inverse f^{-1} est le logarithme de base a ; ces applications sont croissantes lorsque $a > 1$, décroissantes lorsque $a < 1$.

De l'isomorphisme entre R et R^* résulte par exemple que tout élément de R_+^* est un carré. Ceci permet de préciser le corollaire précédent. En effet, soit f une représentation algébrique (4) de K dans K' ; pour tout $x \geq 0$, on a $x = y^2$, donc $f(x) = f(y^2) = (f(y))^2 \geq 0$. Donc f est une représentation croissante; c'est un isomorphisme croissant, sauf si $f(x) = 0$ pour tout x .

En particulier, pour toute représentation algébrique f du corps R dans lui-même, on a $f(x) = x$ pour tout x , ou bien $f(x) = 0$ pour tout x .

4. Ouverts; fermés; voisinages d'un point

Le développement que je viens de donner aux relations entre la structure algébrique de R et sa structure d'ordre pourrait faire croire que la connaissance de ces relations est indispensable pour définir et étudier la topologie de R . Nous allons voir qu'il n'en est rien, et que la topologie de R peut se définir à partir de la seule relation d'ordre; ceci laisse deviner qu'un procédé analogue permettrait de définir une topologie sur tout ensemble totalement ordonné; on pourra vérifier aisément qu'il en est bien ainsi.

Rappelons que dans R , on appelle intervalle ouvert tout ensemble de la forme $]a, b[$ (où $a < b$), ou $] -\infty, a[$, ou $]a, +\infty[$, ou R ou $\emptyset$. Leurs définitions sont bien connues et n'utilisent que l'existence d'un ordre sur R .

Il est immédiat que l'intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

DÉFINITION 4 : Un sous-ensemble A de R est dit ouvert si c'est la réunion d'une famille (finie ou infinie) d'intervalles ouverts.

Il revient au même de dire que A est ouvert si pour tout $x \in A$, il existe un intervalle ouvert contenu dans A et contenant x .

Les propriétés suivantes en résultent aussitôt :

O_1 : Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte.

O_2 : Toute intersection finie d'ouverts est ouverte.

O_3 : R et $\emptyset$ sont des ouverts.

Les propriétés O_1 et O_3 sont immédiates; et O_2 résulte de ce que toute intersection finie d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

Il résulte aussi de la définition que tout intervalle ouvert est un ouvert.

Remarque : Il est faux que l'intersection d'une infinité d'ouverts soit toujours un ouvert : par exemple l'intersection des intervalles ouverts $] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} [$ où $n = 1, 2, \dots$ est l'ensemble réduit au point 0, et celui-ci n'est pas ouvert.

(4) C'est-à-dire qu'on n'impose pas *a priori* à f d'être croissante.

DÉFINITION 5 : Un sous-ensemble A de R est dit fermé lorsque son complémentaire est ouvert.

De chacune des propriétés O_1, O_2, O_3 va résulter aussitôt une propriété duale pour les fermés, en utilisant les formules suivantes de dualité :

$$\bigcap_i (\bigcup_i A_i) = \bigcup_i (\bigcap_i A_i) ; \quad \bigcup_i (\bigcap_i A_i) = \bigcap_i (\bigcup_i A_i)$$

F_1 : Toute intersection de fermés est fermée.

F_2 : Toute réunion finie de fermés est fermée.

F_3 : $\emptyset$ et R sont fermés.

Exemples de fermés : 1) Tout intervalle fermé $[a, b]$; en effet, son complémentaire est la réunion des intervalles ouverts $] -\infty, a[$ et $]b, +\infty[$.

2) Toute réunion finie d'intervalles fermés (donc en particulier tout ensemble fini).

3) Un exemple célèbre d'ensemble fermé est l'ensemble triadique de Cantor. Définissons par récurrence les ensembles A_n : $A_1 = [0, 1]$; $A_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$; A_{n+1} s'obtient en enlevant de chacun des intervalles fermés qui constituent A_n le tiers médian ouvert. Chacun des A_n est fermé ; l'ensemble cherché A est l'intersection de ces A_n .

On montre aisément que A n'est autre que l'ensemble des points de $[0, 1]$ qui, dans le système de numération de base 3, ont un développement constitué uniquement de chiffres 0 et 2.

Nous donnerons plus loin une caractérisation intéressante des fermés au moyen de la notion de point d'accumulation.

DÉFINITION 6 (des voisinages) : On appelle voisinage d'un point x de R tout sous-ensemble V de R contenant un ouvert contenant x .

Autrement dit, V est voisinage de x si V contient un intervalle ouvert contenant x .

Par exemple, tout ensemble ouvert A est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, tout ensemble A qui est voisinage de chacun de ses points est une réunion d'intervalles ouverts, donc est ouvert. Les notions d'ensemble ouvert et de voisinage sont donc réductibles l'une à l'autre.

Voici des propriétés simples des voisinages des points de R :

V_1 : Tout voisinage de x contient x .

V_2 : Tout ensemble contenant un voisinage de x en est un autre.

V_3 : L'intersection de deux voisinages de x en est un autre.

V_4 : Tout voisinage V de x contient un autre voisinage W de x tel que tout point de W admette V comme voisinage.

V_5 : Deux points distincts a et a' de R admettent deux voisinages V et V' disjoints.

Les propriétés V_1, V_2, V_3 sont immédiates. Pour montrer V_4 , il suffit de prendre pour W un ouvert contenu dans V et contenant x .

Pour montrer V_5 , supposons $a < a'$ et soit b entré a et a' ; il suffit

alors de prendre $V =]-\infty, b[$ et $V' =]b, +\infty[$. C'est la propriété V_5 qu'on utilise pour démontrer qu'une suite de points de la droite peut converger vers un point au plus.

Point adhérent à un ensemble et point d'accumulation d'un ensemble.

Soit A une partie de R et $x \in R$.

On dit que x est *adhérent* à A si tout voisinage de x contient au moins un point de A .

On dit que x est *point d'accumulation* de A si tout voisinage de x contient au moins un point de A autre que x .

Autrement dit, dire que x est adhérent à A équivaut à dire que $x \in A$ ou bien que x est point d'accumulation de A .

On vérifie aisément que si x est point d'accumulation de A , tout voisinage de x contient une infinité de points de A .

Un point de A qui n'est pas point d'accumulation de A est appelé point *isolé* de A .

Exemples : 1) L'ensemble Z des entiers n'a aucun point d'accumulation.

2) L'ensemble A des points $\frac{1}{n}$ ($n \in Z^*$) a pour seul point d'accumulation le point O . Tous les points de A sont isolés.

3) L'ensemble Q des rationnels n'a aucun point isolé. Tout point de R est point d'accumulation de Q .

Adhérence ; fermeture.

On appelle *adhérence* de A l'ensemble des points adhérents à A .

On appelle *fermeture* de A l'intersection des ensembles fermés contenant A ; c'est donc le plus petit fermé contenant A .

On vérifiera aisément que ces deux ensembles sont identiques ; on les note $\bar{A}$ et l'on emploie indifféremment les deux termes.

Par exemple, dire que A est fermé équivaut à dire que $A = \bar{A}$.

Borne supérieure des ensembles fermés majorés.

Il résulte de la définition de R que toute partie majorée A de R a une borne supérieure a , notée $\sup. A$.

On peut caractériser a par le fait que $]a, +\infty[$ ne contient aucun point de A , et que tout voisinage de a contient au moins un point de A . En particulier, a est adhérent à A ; donc, ou bien $a \in A$, ou bien a est point d'accumulation de A .

Lorsque A est fermé, $A = \bar{A}$, donc $a \in A$; autrement dit, tout ensemble fermé majoré contient sa borne supérieure.

5. Compacité des intervalles fermés bornés

Une des propriétés les plus importantes des intervalles fermés bornés s'exprime par le théorème de Borel-Lebesgue, qui permet de ramener l'étude des recouvrements ouverts à celle des sous-recouvrements ouverts

finis, et d'obtenir ainsi des propriétés globales à partir de propriétés locales.

THÉORÈME 3 (de Borel-Lebesgue) : Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de R dont la réunion contient l'intervalle fermé borné $[a, b]$; il existe alors une sous-famille finie $(\omega_i)_{i \in J}$ qui possède la même propriété.

Pour le montrer, on désigne par A l'ensemble des points x de $[a, b]$ tels que l'intervalle $[a, x]$ puisse être recouvert par une sous-famille finie des ω_i ; et on montre aisément que A contient sa borne supérieure, et que cette borne supérieure ne peut être que b . Or, la relation $b \in A$ équivaut à l'énoncé du théorème.

THÉORÈME 4 (de Bolzano-Weierstrass) : Tout sous-ensemble infini X d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ a au moins un point d'accumulation sur $[a, b]$.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent :

Si aucun point x de $[a, b]$ n'est point d'accumulation de X , tout x possède un voisinage ouvert $V(x)$ contenant au plus un point de X , à savoir x lui-même. Ces $V(x)$ constituent un recouvrement ouvert de $[a, b]$; d'après le théorème 3, il existe une famille finie de ces $V(x)$, disons $(V(x_p))$ ($p = 1, 2, \dots, n$), qui recouvre $[a, b]$. Donc, X contient au plus les n points x_p .

A partir de ces deux théorèmes, on établit aisément les théorèmes analogues obtenus en remplaçant $[a, b]$ par n'importe quel sous-ensemble fermé de $[a, b]$.

6. Fonctions continues. Limite d'une suite

En un sens vague, dire qu'une fonction f est continue en un point x_0 , c'est dire que lorsque x est assez voisin de x_0 , $f(x)$ est voisin de $f(x_0)$. On peut donc espérer que la notion de voisinage va nous fournir une définition commode de la continuité.

Nous considérerons seulement ici des fonctions définies sur une partie X de R et à valeurs dans R , c'est-à-dire des fonctions numériques sur X .

DÉFINITION 7 : Soit f une application d'une partie X de R dans R , et soit $x_0 \in X$.

On dit que f est continue en x_0 si, pour tout voisinage W de $f(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que :

$$((x \in V \cap X)) \implies (f(x) \in W)$$

Si l'on convient d'appeler voisinage de x_0 relativement à X toute partie de X de la forme $(V \cap X)$ où V est un voisinage de x_0 dans R , la condition énoncée équivaut à dire que pour tout W , l'ensemble $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 relativement à X .

Supposons maintenant pour simplifier que $X = R$, c'est-à-dire que f est une application de R dans R .

Si f est continue en tout point, pour tout ouvert ω de R l'ensemble $f^{-1}(\omega)$ est voisinage de chacun de ses points d'après ce qu'on vient

de voir, donc est un ouvert. Inversement, si f est une application possédant cette propriété quel que soit ω , on vérifiera que f est continue en tout point. C'est là une caractérisation commode des fonctions continues.

Elle permet par exemple de montrer immédiatement que si f et g sont deux applications continues de R dans R , leur composée $f \circ g = f(g)$ est aussi continue (transitivité de la continuité).

Une caractérisation équivalente est la suivante :

L'application f de R dans R est continue si, pour tout fermé F de R , $f^{-1}(F)$ est fermé.

La démonstration est immédiate à partir de la formule :

$$f^{-1} \left(\bigcup A \right) = \bigcup (f^{-1}(A))$$

Limite d'une suite.

DÉFINITION 8 : *On dit qu'une suite (x_n) de points de R converge vers un point l de R , ou encore a pour limite ce point, si, pour tout voisinage V de l , on a $x_n \in V$, sauf pour un nombre fini de valeurs de n .*

Si l'on pose $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, la condition précédente revient à dire que, pour au moins un n , on a $X_n \subset V$.

A partir de l'axiome V_5 , on démontre aisément qu'une suite a au plus une limite.

On démontrera aisément les énoncés suivants :

1) Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) a une limite.

2) Soit f une application de X dans R , continue au point a de X ; pour toute suite (x_n) de points de X qui converge vers a , la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Valeurs d'adhérence d'une suite.

La suite de nombres réels $a_n = (\frac{1}{n} - 1)^n$ n'est pas convergente ; toutefois, les nombres $\frac{1}{e}$ et $-\frac{1}{e}$ apparaissent comme limites en un sens large. L'analyse de cette notion conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 9 : *Soit (a_n) ($n = 1, 2, \dots$) une suite de points de R . On dit qu'un point a de E est une valeur d'adhérence de cette suite si, pour tout voisinage V de a , il existe des indices n arbitrairement grands tels que $a_n \in V$.*

Si l'on désigne par A_n l'ensemble $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, on peut dire encore que a est valeur d'adhérence de la suite lorsque, pour tout x , le point a appartient à l'adhérence de A_n .

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est donc $A = \bigcap_1^\infty \bar{A}_n$.

Cet ensemble est fermé ; il peut être vide, par exemple si $a_n = n$. Mais on démontrera aisément, en utilisant la compacité des intervalles

fermés bornés, que toute suite bornée a au moins une valeur d'adhérence.

Lorsque la suite (a_n) converge vers l , la seule valeur d'adhérence est l . Mais la *réci-proque est fausse* ; par exemple, la suite :

$$\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots, \frac{1}{n}, n, \dots\right)$$

a pour seule valeur d'adhérence 0 et cependant cette suite ne converge pas vers 0. Par contre, on montrera aisément que si une suite *bornée* a une seule valeur d'adhérence a , elle converge vers a ; ceci tient essentiellement à la compacité des intervalles fermés bornés.

Bases dénombrables de R ; applications.

Toutes les propriétés topologiques que nous avons étudiées jusqu'ici n'ont utilisé que la structure d'ordre de R et seraient valables pour tout ensemble totalement ordonné dans lequel toute partie majorée admet une borne supérieure.

En utilisant le fait que R contient un sous-ensemble dénombrable partout dense (à savoir Q), on obtient de nouvelles propriétés liées à ce caractère dénombrable. Nous allons en énumérer quelques-unes, dont les démonstrations sont aisées :

1) Il existe une famille dénombrable (ω_n) d'ouverts de R telle que tout ouvert de R soit la réunion d'une sous-famille de ces ouverts (prendre pour ouverts ω_n les intervalles $]a, b[$ où $a, b \in Q$. Une telle famille (ω_n) est appelée *base dénombrable* de R.

2) De tout recouvrement ouvert d'une partie X de R, on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini ou dénombrable.

En particulier, toute famille d'ouverts disjoints deux à deux est finie ou dénombrable ; on peut déduire de là que tout ouvert ω de R est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux ; ces intervalles sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence ainsi définie sur ω : $x \sim y$ si $[x, y] \subset \omega$.

3) Si a est un point d'accumulation de X, a est limite d'une suite de points distincts de X.

4) Si a est valeur d'adhérence d'une suite (x_n) , il existe une sous-suite de la suite donnée qui converge vers a .

5) Soit f une application d'une partie X de R dans R, et soit $a \in X$. Pour que f soit continue au point a , il faut et il suffit que, pour toute suite (x_n) de points de X qui converge vers a , la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Cet énoncé complète un énoncé donné lors de l'étude des limites de suites.

Ces cinq propriétés sont des conséquences faciles de la première.

7. Structure uniforme de R

Nous n'avons pas utilisé jusqu'ici la structure algébrique de R. Nous allons voir que sa structure de groupe additif permet de définir de nouvelles propriétés ; en effet, l'existence de translations sur R va permettre de parler de la petitesse d'un ensemble.

Rappelons que pour tout $X \subset R$ et tout $a \in R$, on désigne par $X + a$ l'ensemble des éléments $(x + a)$ où $x \in X$; on dit aussi que $X + a$ est le translaté de X par la translation a .

On pourrait alors donner la définition suivante : Etant donné un voisinage V de O et un sous-ensemble X de R , on dit que X est petit d'ordre V s'il existe un translaté de X contenu dans V .

Une telle définition aurait l'avantage de pouvoir s'étendre à tout groupe muni d'une topologie convenable. Mais on peut encore préciser cette définition en utilisant le fait que R est un groupe totalement ordonné :

Pour tout $x \in R$, on pose $|x| = \sup. |x, -x|$; on vérifie que $|a + b| \leq |a| + |b|$; puis on pose : $d(x, y) = \text{distance } (x, y) = |x - y|$. On vérifie aisément que :

- 1) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$; et $d(x, x) = 0$.
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$.
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Ces trois propriétés sont essentielles et interviennent constamment dans l'étude de la structure uniforme de la droite.

Diamètre d'un ensemble.

Pour tout $X \subset R$, soit X' l'ensemble des nombres $|x - y|$ où $x, y \in X$. Si X' est majoré, on pose $\delta(X) = \sup. X'$; sinon, on pose $\delta(X) = +\infty$. On appelle $\delta(X)$ le diamètre de X . Il est immédiat que $\delta(X) = \delta(\bar{X})$.

DÉFINITION 8 : Pour tout $\varepsilon > 0$, on dit que l'ensemble X est petit d'ordre ε si $\delta(X) \leq \varepsilon$.

Si les ensembles X et Y sont petits d'ordre ε , et si $X \cap Y \neq \emptyset$, l'ensemble $X \cup Y$ est petit d'ordre 2ε .

Suites de Cauchy.

Soit (a_n) une suite convergente; si on pose $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, on voit que $\delta(A_n) \rightarrow 0$. La réciproque est une des propriétés fondamentales de la droite :

Disons qu'une suite (a_n) est une suite de Cauchy si $\delta(A_n) \rightarrow 0$ (ce qui revient à dire que $|a_p - a_q| \rightarrow 0$ lorsque p et $q \rightarrow \infty$).

Nous venons de remarquer que toute suite de Cauchy est convergente; voici la réciproque bien connue :

THÉORÈME 5 : Toute suite de Cauchy de R est convergente.

C'est une conséquence immédiate du fait qu'une telle suite est bornée, donc admet au moins une valeur d'adhérence; et du fait qu'elle admet au plus une valeur d'adhérence.

On peut aussi le montrer, plus classiquement, en se ramenant au cas des suites monotones.

Continuité uniforme.

C'est une notion qu'il ne serait pas possible de définir à partir de

notions purement topologiques, c'est-à-dire à partir de la notion d'ouvert ou de voisinage. Elle est basée sur la structure de groupe de R , ou encore sur la notion de distance ; nous mettrons ce fait en évidence en donnant deux définitions équivalentes de la continuité uniforme :

DÉFINITION 9 : Soit f une application d'une partie X de R dans R . On dit que f est uniformément continue si, pour tout voisinage W de O , il existe un voisinage V de O tel que, pour tout $A \subset X$ qui soit petit d'ordre V , son image $f(A)$ soit petite d'ordre W .

DÉFINITION 9' : Avec les mêmes notations, f est dite uniformément continue si $\delta(f(A))$ tend vers O quand $\delta(A)$ tend vers O . [Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $(\delta(A) < \eta) \Rightarrow (\delta(f(A)) < \varepsilon)$].

Il est immédiat que toute fonction uniformément continue est continue ; la réciproque est fausse.

Toutefois, un théorème fondamental exprime que si X est fermé et borné, toute application continue de X dans R est uniformément continue. C'est une conséquence facile du théorème 3 ou du théorème 4, ou de leurs extensions aux ensembles fermés et bornés.

Convergence uniforme d'une suite de fonctions.

C'est une notion relative à l'espace d'arrivée. Elle ne suppose aucune structure topologique, ni uniforme sur l'espace de départ. De façon plus précise :

DÉFINITION 10 : Soit E un ensemble absolument quelconque et soit (f_n) une suite d'applications de E dans R .

On dit que cette suite converge uniformément vers l'application f de E dans R si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geq n(\varepsilon)$, on ait :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ ce qui équivaut à } d[f_n(x), f(x)] < \varepsilon.$$

On étudiera plus en détail cette notion dans un exposé ultérieur. Rappelons simplement que cette convergence est plus restrictive que la convergence simple. Par exemple, soit f_n la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par les conditions :

$$f_n(x) = n^2 x (1 - nx) \quad \text{sur } [0, \frac{1}{n}]$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{sur } [\frac{1}{n}, 1]$$

Cette suite converge simplement vers la fonction $f \equiv 0$; mais la convergence n'est pas uniforme, puisque $\max |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{4}$, loin de tendre vers 0, tend vers $+\infty$.

8. Structure de corps topologique sur R

L'addition et la multiplication de R sont compatibles avec la topologie de R et aussi avec sa structure uniforme, en un sens que nous allons préciser.

THÉOREME 6 : *Sont continues les applications suivantes :*

$x \rightarrow ax$ de R dans R ; $(x, y) \rightarrow (x + y)$ de R^2 dans R .

$x \rightarrow \frac{1}{x}$ de R^* dans R ; $(x, y) \rightarrow xy$ de R^2 dans R .

Sont uniformément continues les applications suivantes :

$x \rightarrow ax$ de R dans R ; $(x, y) \rightarrow (x + y)$ de R^2 dans R .

Il faut évidemment donner un sens à la continuité et à l'uniforme continuité d'une application de R^2 dans R . Par exemple, la continuité uniforme s'obtient en prenant comme distance de deux points de R^2 leur distance euclidienne.

Notons que les applications $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et $(x, y) \rightarrow xy$ ne sont pas uniformément continues.

De ce théorème résultent, en utilisant la transitivité de la continuité et de la continuité uniforme, d'autres résultats connus.

Par exemple, si f et g sont deux fonctions numériques continues (resp. uniformément continues), $(f + g)$ l'est aussi.

On peut compléter le théorème 6 par un résultat lié à la structure de groupe totalement ordonné de R :

L'application $x \rightarrow |x|$ de R dans R est uniformément continue.

De la formule $\sup(x, y) = \frac{x + y}{2} + |x - y|$ résulte alors que l'application $(x, y) \rightarrow \sup(x, y)$ de R^2 dans R est unif. continue.

De même, si f et g sont deux fonctions numériques continues (resp. unif. continues), il en est de même de (f) et de $\sup(f, g)$.

Représentations continues du groupe R dans R .

Soit f une application continue de R dans R telle que :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Il en résulte aussitôt que $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$ pour toute fraction $\frac{p}{q}$.

Donc, la restriction de f à Q n'est autre que l'application $x \rightarrow ax$.

Les deux applications f et $x \rightarrow ax$ de R dans R sont continues et coïncident sur l'ensemble partout dense Q ; elles sont donc identiques (on utilise là une propriété importante, mais facile à montrer).

Donc, toute représentation continue de R dans R (pour l'addition) est monotone et de la forme $x \rightarrow ax$.

L'isomorphisme de R et du groupe multiplicatif R^* fournit aussitôt le parallèle pour les applications g de R_+^* dans R_+^* telles que $g(xy) = g(x)g(y)$.

Sous-groupes de R .

Nous terminerons cette étude par un résultat simple et souvent utilisé.

THÉORÈME 7 : *Tout sous-groupe additif de R est partout dense, ou bien est de la forme aZ (ensemble des points an où $n \in Z$).*

Il résulte de là que tout sous-groupe fermé de R est identique à R ou bien est un groupe aZ .

En voici une application : Soit f une fonction numérique sur R ; on dit que a est une *période* de f si $f(x + a) = f(x)$ pour tout x .

L'ensemble P des périodes de f est évidemment un sous-groupe additif de R . Lorsque f est continue, P est fermé.

Donc, ou bien $P = R$, ce qui entraîne $f = C^*$, ou bien P est de la forme aZ ; on peut toujours supposer que $a \geq 0$ et on appelle ce nombre a la *plus petite période* de f .

G. C.

ESPACES EUCLIDIENS et ESPACES MÉTRIQUES **NOTIONS MÉTRIQUES et NOTIONS TOPOLOGIQUES ***

par André REVUZ

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Poitiers

I. RETOUR SUR LA DROITE RÉELLE

Dans la précédente conférence, M. CHOQUET a rappelé les propriétés algébriques de la droite réelle R et a défini les applications continues de R dans R , en se fondant sur la structure d'ordre de R . L'intervalle $]a, b[$ étant l'ensemble des nombres réels x vérifiant $a < x < b$, l'application f de R dans R est continue en x_0 , si, pour tout intervalle $]z, \beta[$ auquel appartient $f(x_0)$, il existe un intervalle $]a, b[$ tel que $x \in]a, b[$ implique $f(x) \in]z, \beta[$, ou encore, en utilisant l'application réciproque f^{-1} (A étant un sous-ensemble de R , $f^{-1}(A)$ est l'ensemble défini par

$$x \in f^{-1}(A) \iff f(x) \in (A) :$$

f est continue en x_0 , si, pour tout intervalle $]z, \beta[$ contenant $f(x_0)$, $f^{-1}(]z, \beta[)$ contient un intervalle auquel x_0 appartient. Si l'on désigne par ensemble ouvert (ou plus rapidement par « ouvert »), toute réunion d'intervalles, on en déduit qu'une application de R dans R est continue en tout point si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert (l'ensemble vide est considéré comme ouvert).

Notre premier propos sera de définir la continuité des applications de R dans R , en utilisant une autre structure de la droite réelle : désignant par distance de deux nombres réels la valeur absolue de leur différence, on pourra donner de la continuité de f au point x_0 les trois définitions équivalentes suivantes :

1° Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que $|x - x_0| < \eta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2° La distance de $f(x)$ à $f(x_0)$ tend vers 0, lorsque tend vers 0 la distance de x à x_0 .

3° Pour tout intervalle I de centre $f(x_0)$, $f^{-1}(I)$ contient un intervalle de centre x_0 .

De l'énoncé 3°, et du fait que tout intervalle contenant un point contient un intervalle ayant ce point pour centre, on déduit l'identité entre cette définition de la continuité et celle qui est fondée sur la structure d'ordre de R et on peut donner des ouverts de R la définition suivante : est ouvert tout ensemble O tel que $x \in O$ implique l'existence d'un intervalle I de centre x inclus en O .

Cette dernière définition de la continuité a le mérite de s'appliquer à tout espace sur lequel a été définie une distance.

(*) Conférence prononcée le jeudi 15 novembre 1956, à l'Institut Henri-Poincaré, seconde conférence du cycle sur la topologie organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

H. DÉFINITION DE LA DISTANCE

E étant un ensemble dont les éléments seront désignés par $x, y, \dots$ une distance sur E est une application de $E \times E$ dans R^+ (ensemble des réels positifs ou nul) vérifiant les propriétés suivantes :

$$1^\circ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$2^\circ d(x, y) = d(y, x) \text{ Symétrie.}$$

$$3^\circ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ Inégalité triangulaire.}$$

E muni de cette distance sera dit un *espace métrique* (ou distancié). Il est immédiat que l'application $x, y \rightarrow |x - y|$ est bien une distance sur R.

Si E et F sont deux espaces métriques, on peut appliquer telle quelle la définition 2° ci-dessus de la continuité. L'équivalent de 1° est, si d est la distance sur E et δ la distance sur F : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \delta[f(x), f(x_0)] < \varepsilon$. L'équivalent de 3° s'obtient en introduisant la notion de boule : la boule ouverte (resp. fermée) de centre x_0 et de rayon r (*strictement positif*) est l'ensemble des points x vérifiant $d(x_0, x) < r$. (resp. $\leq r$). Il prend alors la forme : l'image réciproque d'une boule de centre $f(x_0)$ contient une boule de centre x_0 .

Avant de poursuivre l'étude de la continuité définie à partir de la distance, étudions un peu celle-ci en elle-même. Les axiomes de la distance, qui sont satisfaits par les distances « concrètes » sur la droite, dans le plan (R^2) dans l'espace à trois dimensions (R^3), apparaissent par là comme « naturels ». Il n'est cependant pas mauvais d'examiner le sens de chacun d'eux et de déterminer dans quelle mesure l'absence d'un des axiomes est rédhibitoire pour l'utilisation de la distance correspondante.

Le premier axiome signifie que tout élément est à distance nulle de lui-même et à distance positive de tout autre élément. Que se passerait-il si l'on avait une « distance » satisfaisant 2° et 3°, mais seulement 1 bis : $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ et pour laquelle il existe des couples d'éléments différents à distance non nulle l'un de l'autre ? (Une telle distance est appelée un écart). De deux choses l'une : ou bien cela résulte d'un choix maladroit de la distance et il faut en chercher une autre ; ou bien ce sont, en quelque sorte, les éléments différents dont la distance est nulle, qui ont tort d'être différents, car ils jouent le même rôle dans la question traitée. Dans ce cas, on remarquera que : 1° la relation x, y définie par $d(x, y) = 0$ est une relation d'équivalence ; 2° que les distances d'un élément x à deux éléments y et z appartenant à une même classe d'équivalence sont égales, car $d(z, y) = 0$ entraîne

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d(x, y),$$

$$\text{et} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(x, z)$$

et que, par suite, on peut adopter comme distance de deux classes modulo $\sim$ celle d'un élément quelconque de la première à un élément quelconque de la seconde. L'espace quotient $E/\sim$ est un espace métrique. Il est déduit de E par identification des éléments à distance nulle les uns des autres. Un exemple simple de cette situation est fourni par l'écart suivant : valeur absolue de la différence des abscisses pour les points

du plan. Les classes d'équivalence sont les droites $x = c^{\text{te}}$. L'espace E/φ est isométrique (voir plus loin) à la droite réelle.

Le deuxième axiome, sur la symétrie de la distance, pour naturel qu'il paraisse, n'est pas vérifié par une distance concrète : la distance mesurée en heures de marche que l'on utilise en montagne et qui est plus grande à la montée qu'à la descente. Le cas d'une distance dissymétrique n'est pas très dramatique cependant, car en posant

$$\delta(x, y) = \sup. [d(x, y), d(y, x)],$$

on obtient avec δ une distance satisfaisant les trois axiomes (si d satisfaisait 1° et 3°).

Le troisième axiome a pour mérite de garantir, pour employer un langage intuitif, que « le voisin du voisin est voisin ». D'autres inégalités auraient le même effet. Toute inégalité de la forme

$$d(x, y) \leq \varphi [d(x, z), d(z, y)]$$

où φ est une fonction réelle, positive, nulle et continue au point (0, 0) assurerait au moins, pour employer le même langage intuitif, que « le très voisin du très voisin est très voisin ».

L'inégalité triangulaire sous sa forme classique a deux mérites :

1° sa simplicité ;

2° son très grand domaine d'application. Tous les espaces étudiés de la Quatrième du Lycée au Certificat de Calcul différentiel et intégral peuvent être pourvus d'une structure métrique — utilisée effectivement et non imposée pour les besoins de la cause !

Exemples de distances (1).

Remarquons que l'on peut définir sur tout ensemble au moins une distance en posant $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. (C'est celle que pourrait obtenir un arpenteur avec un mètre infiniment élastique !). C'est évidemment un cas extrême qui ne peut guère avoir d'autre rôle que celui de garde-fou, en fournissant un contre-exemple éventuel à un théorème conjecturé sur les espaces métriques.

Dans l'espace R^n on peut définir une première distance $d_1(x, y)$ (distance euclidienne) pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\text{en posant } d_1(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}.$$

Les axiomes 1° et 2° sont évidemment satisfaits. Pour établir l'inégalité triangulaire, posons :

$$x_i - z_i = a_i \text{ et } z_i - y_i = b_i ; \text{ on a } x_i - y_i = a_i + b_i.$$

Il s'agit de vérifier

$$\sqrt{\sum (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}$$

(1) Il n'est peut-être pas sans intérêt de citer, à côté des exemples mathématiques, quelques-unes des distances de notre vie quotidienne, auxquelles on n'a pas l'habitude de donner ce nom, mais qui en ont pourtant en général les propriétés mathématiques : prix d'une unité de conversation téléphonique, durée d'un voyage, son coût...

inégalité équivalente à

$$\sum (a_i + b_i)^2 \leq \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2 \sqrt{(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)}$$

elle-même équivalente à

$$\sum a_i b_i \leq \sqrt{(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)}$$

qui est vérifiée si $\sum a_i b_i \leq 0$, et qui pour $\sum a_i b_i > 0$ résulte de l'inégalité de Schwarz :

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$$

qui exprime que le trinôme $\sum (a_i + b_i \lambda)^2$ est toujours positif ou nul, et est toujours vérifiée.

Remarquons que l'égalité ne peut avoir lieu que si $\frac{a_i}{b_i} = -\lambda$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, c'est-à-dire si

$$\frac{x_1 - z_1}{y_1 - z_1} = \dots = \frac{x_i - z_i}{y_i - z_i} = \dots = \frac{x_n - z_n}{y_n - z_n}$$

c'est-à-dire si les trois points x, y, z sont alignés.

Une autre distance possible dans R^n est

$$d_2(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$$

Une troisième est $d_3(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$.

Si les coordonnées x_i sont considérées comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires, les boules de d_1 sont limitées par des cercles dans R^2 , par des sphères dans R^3 . (On aurait des ellipses et des ellipsoïdes avec des coordonnées obliques). Avec des coordonnées rectangulaires, les boules de d_2 sont limitées par des carrés de côtés parallèles aux axes dans R^2 (cubes dans R^3), et les boules de d_3 sont limitées par des carrés de côtés parallèles aux bissectrices des axes dans R^2 (octaèdres réguliers dans R^3).

Si d est une distance sur un espace, et f une fonction réelle définie sur R^+ , positive et vérifiant $f(0) = 0$ et $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $f(d)$ est une distance admettant les mêmes boules que d [chaque boule ayant, en général, des rayons différents pour d et $f(d)$]. On peut, en particulier, prendre pour f une fonction croissante concave. Par exemple, si d est une distance, $\frac{d}{1+d}$ en est une autre, qui admet les mêmes boules que la première et qui est bornée.

Si plusieurs distances $d_1, d_2, \dots, d_p$ sont définies sur un même espace, on vérifie sans peine que

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_p^2}$$

en est une autre (conséquence de l'inégalité de Schwarz), ainsi que $d = d_1 + d_2 + \dots + d_p$ et $d = \sup_i d_i$. (Dans ce dernier cas, la boule de

centre m et de rayon r pour d est l'intersection des boules de mêmes centre et rayon pour les distances d_i).

Notons enfin que, si une suite de distances a été définie sur un espace, on peut en déduire une nouvelle en posant

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n}{1 + d_n}$$

Distance géodésique.

Etant donné un espace métrique E et un sous-ensemble F de E , la restriction à $F \times F$ de l'application d de $E \times E$ dans R^+ est évidemment une distance pour F , dite induite par celle de E . Par exemple, si E est R^3 et F une sphère S , la distance euclidienne de R^3 donne une distance sur S (longueur de la corde) que l'on pourra appeler aussi distance de plongement de S dans R^3 . Mais on peut, à partir de celle-là, en définir une autre : la distance géodésique.

Supposons qu'il existe sur F au moins un chemin continu liant un point donné a à un point donné b . Par un tel chemin, nous entendons une application continue f du segment $[0, 1]$ dans F vérifiant $f(0) = a$, $f(1) = b$. A toute suite finie $\{t_i\} : t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$ correspondent les points $a, \dots, m_i = f(t_i), \dots, b$ et le nombre réel positif $L(\{t_i\}) = d(a, m_1) + \dots + d(m_i, m_{i+1}) + \dots + d(m_n, b)$. Si l'ensemble de ces nombres pour toutes les suites finies t_i est borné supérieurement, le chemin est dit rectifiable et $\sup L(\{t_i\}) = L(f)$ est la longueur du chemin.

On vérifie alors que $\delta(a, b) = \inf L(f)$ ($\inf$ étant calculé pour l'ensemble de tous les chemins continus reliant a à b) est une distance. En effet :

1° $\delta(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ est évident, car si $a = b$, il y a un chemin de longueur nulle reliant a à b ($f(t) = a$ pour tout $t \in [0, 1]$) et si $a \neq b$ tout chemin a une longueur au moins égale à $d(a, b) > 0$.

2° La symétrie est évidente.

3° $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe des chemins f_{ac} et f_{cb} tels que

$$L(f_{ac}) < \delta(a, c) + \varepsilon \quad L(f_{cb}) < \delta(b, c) + \varepsilon.$$

Or, on peut définir de manière évidente la somme de deux chemins (C'est l'application φ définie par

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f_{ac}(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \varphi(t) &= f_{cb}(2t - 1) & \text{pour } 1/2 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

et la longueur du chemin somme est la somme des chemins. Mais φ est un chemin reliant a à b , on a donc

$$\delta(a, b) \leq L(\varphi) = L(f_{ac}) + L(f_{cb}) \leq \delta(a, c) + \delta(b, c) + 2\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, il en résulte l'inégalité triangulaire. On peut démontrer élémentairement, en appliquant la définition ci-dessus, que la distance géodésique définie sur la sphère S_2 à partir de la distance euclidienne de R^3 est la longueur du plus petit des deux arcs de grand cercle joignant deux points.

III. ISOMÉTRIES

Une application biunivoque f d'un espace métrique E (distance d) sur un espace métrique F (distance δ) est une isométrie si

$$d(a, b) = \delta [f(a), f(b)]$$

pour tous les couples d'éléments de E .

C'est le cas des transformations de la géométrie élémentaire, fâcheusement nommées déplacements et symétries (et qu'il vaudrait mieux appeler isométries directes ou inverses) (1).

Il est clair que si E' est un sous-espace de E , la restriction de f à E' est une isométrie de E' sur $f(E')$. Mais ce qui n'est pas toujours vrai et fera par conséquent l'objet de théorèmes, c'est la possibilité d'étendre aux espaces entiers une isométrie existant entre deux sous-espaces de E et F .

Par exemple, si $E = F = \mathbb{R}^2$, l'isométrie entre deux sous-ensembles composés de trois points non alignés s'étend de manière unique aux espaces entiers : c'est la forme épurée du troisième cas d'égalité des triangles. Il est encore vrai si E et F sont deux sphères de même rayon, que la distance soit la distance de plongement ou la distance géodésique correspondante. Avec ces mêmes distances, il est faux sur deux sphères de rayons différents. (Ces exemples montrent combien sont « lourdes d'axiomes inexprimés » les démonstrations usuelles des cas d'égalité !).

IV. CONTINUITÉ

Reprenons la troisième définition de la continuité d'une application f d'un espace métrique E dans un espace métrique F : dire que f est continue au point x_0 , c'est dire que l'image réciproque de toute boule de centre $f(x_0)$ contient une boule de centre x_0 . Ceci amène à introduire la notion suivante :

Définition : On appelle voisinage d'un point x tout ensemble contenant une boule de centre x .

On peut alors énoncer : « f est continue au point x_0 si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0 . » Énoncé simple et général qui a le mérite de conserver tout le contenu intuitif de la notion de continuité.

Supposons que f soit continue en tout point de E . On va pouvoir énoncer ce fait très simplement en faisant intervenir les ouverts de E et de F .

Définition : Un ensemble ouvert d'un espace métrique est une réunion (quelconque) de boules ouvertes.

En remarquant que si $y \in B(x, r)$, on a $d(x, y) = r' < r$ et par suite

(1) Il semble d'ailleurs que ce soit en utilisant les notions de distance et d'isométrie que l'on puisse le plus facilement donner une axiomatique de la Géométrie élémentaire, qui soit simple et « concrète » dans la mesure où les axiomes expriment des opérations usuelles de la Géométrie (mesure de distances, pliage, etc...).

$B(y, r - r') \subset B(x, r)$ en vertu de l'inégalité triangulaire, on en déduit une autre définition des ouverts :

Un ouvert est un ensemble qui est voisinage de tous ses points. On en déduit : « f est une application continue de E dans F (c'est-à-dire continue en tout point de E) si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E . »

Remarquons la facilité avec laquelle cette définition de la continuité permet de démontrer le théorème : Si E, F, G , sont trois espaces métriques, f une application continue de E dans F , g une application continue de F dans G , l'application composée $g \circ f$ de E dans G est continue.

Si $A \subset F$, et si $\complement A$ est son complémentaire, on sait que

$$f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A),$$

si donc on appelle fermé tout ensemble dont le complémentaire est ouvert, on voit qu'une définition équivalente de la continuité s'obtient en remplaçant dans l'énoncé ci-dessus le mot ouvert par le mot fermé.

On peut donner de l'ensemble fermé une définition intrinsèque en utilisant la notion de point adhérent à un ensemble.

Définition : a est adhérent à A , si, pour tout voisinage V de a , on a $V \cap A \neq \emptyset$. (Il suffit évidemment que ceci ait lieu pour les boules de centre a). L'adhérence $\overline{A}$ d'un ensemble A est l'ensemble de ses points adhérents. On a pour tout A , $A \subset \overline{A}$.

Théorème : Un ensemble est fermé si et seulement s'il est égal à son adhérence.

En effet, A fermé veut dire $\complement A$ ouvert. Si $a \notin A$, il existe une boule $B(a, r)$ incluse en $\complement A$, donc $B(a, r) \cap A = \emptyset$, et $a \notin \overline{A}$ (1), d'où $A \subset \overline{A}$, c'est-à-dire $\overline{A} = A$. Inversement, si $A = \overline{A}$, pour tout point $a \notin A$, il existe une boule $B(a, r)$ telle que $B(a, r) \cap A = \emptyset$, d'où $B(a, r) \subset \complement A$ et $\complement A$ est ouvert.

On vérifie immédiatement qu'une boule fermée est un ensemble fermé (ce qui rassure sur la cohérence de la terminologie).

Les ensembles ouverts possèdent deux propriétés très importantes :

(O₁) : Toute réunion d'ouverts est un ouvert. C'est une conséquence immédiate de la définition.

(O₂) : Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. (L'ensemble vide compte parmi les ouverts). En effet, soient, $O_1, O_2, \dots, O_n$, n ouverts d'intersection non vide et $a \in \bigcap_{i=1}^n O_i$. Il existe pour $i = 1, \dots, n$

(1) Le signe $\notin$ a été utilisé à la place du signe $\in$ barré. $\notin$ signifie donc ici « n'appartient pas à ».

une boule $B(a, r_i)$ incluse en O_i . On a donc $B(a, \inf_i r_i) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i$; ce qui établit l'assertion.

Les fermés étant des complémentaires d'ouverts possèdent les propriétés duales (que le lecteur pourra aussi démontrer directement en utilisant la définition $A = \bar{A}$ des fermés) :

(F₁) : Toute intersection de fermés est un fermé.

(F₂) : Toute réunion finie de fermés est un fermé.

V. NOTIONS TOPOLOGIQUES

Etant donnés deux ensembles E et F , une distance d sur E (δ sur F) fait de E (resp. de F) un espace métrique E_d (resp. F_δ). Désignons par $\mathcal{C}(E_d, F_\delta)$ l'ensemble des applications continues de E_d dans F_δ . (C'est un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les applications de E dans F). Une question importante se pose : Peut-on modifier d , ou δ , ou les deux, sans modifier $\mathcal{C}(E_d, F_\delta)$? Nous répondrons ici à la question suivante, parente de la précédente :

d_1 étant une distance donnée sur E , que doit être la distance d_2 sur E , pour que pour tout espace métrique F_δ , on ait

$$\mathcal{C}(E_{d_2}, F_\delta) = \mathcal{C}(E_{d_1}, F_\delta)$$

Il est évidemment suffisant que la famille $\mathcal{O}_1$ des ouverts correspondant à d_1 soit identique à la famille $\mathcal{O}_2$ des ouverts correspondant à d_2 . Mais c'est aussi nécessaire, car si un ensemble appartenait à $\mathcal{O}_1$ sans appartenir à $\mathcal{O}_2$, il suffirait de prendre $F_\delta = E_{d_1}$ pour constater que l'application identique de E dans lui-même appartient à $\mathcal{C}(E_{d_1}, E_{d_1})$ et non à $\mathcal{C}(E_{d_2}, E_{d_1})$.

La condition pour d_1 et d_2 de donner les mêmes ouverts est équivalente à la suivante : Pour tout $a \in E$, toute boule $B_1(a, r)$ relative à d_1 contient une boule $B_2(a, r')$ relative à d_2 , et inversement.

On vérifie à partir de là que les trois distances d_1, d_2, d_3 définies plus haut sur R^n donnent les mêmes ouverts et par conséquent les mêmes ensembles $\mathcal{C}(R^n, F_\delta)$ pour tout espace métrique F_δ .

On voit donc que si la donnée d'une métrique sur E définit l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$, la donnée de cet ensemble, et même de ces ensembles pour tout F , ne définit pas la métrique de E sans ambiguïté.

La notion de distance nous a conduit à une définition de la continuité, qui, finalement, ne dépend pas de la distance elle-même, mais seulement des ouverts que l'on a définis à partir d'elle.

Si, donc, on ne s'intéresse qu'à la continuité des applications définies sur un espace E , la structure métrique est plus précise qu'il n'est nécessaire. C'est ce qui amène à définir des structures plus générales : les structures topologiques.

Etant donné un ensemble E , on dit qu'on a défini une topologie $\mathcal{C}$ sur E si l'on s'est donné une famille $\mathcal{O}$ de sous-ensembles de E vérifiant les deux axiomes suivants :

(O₁) : Toute réunion d'ensembles appartenant à $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$.

(O₂) : Toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$.

(Les conventions relatives à la réunion et à l'intersection de la partie vide de $\mathcal{O}$, entraînent que E et le sous-ensemble vide de E appartiennent à $\mathcal{O}$).

Les ensembles appartenant à $\mathcal{O}$ seront dits les ouverts de E dans la topologie $\mathcal{O}$ et E sera dit un espace topologique.

Si E et F sont deux espaces topologiques, une application f de E dans F sera continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E .

Toutes les définitions données plus haut se transposent immédiatement : si on appelle fermé tout complémentaire d'ouvert, la famille $\mathcal{F}$ des fermés vérifie les axiomes (F₁) et (F₂) et on peut évidemment définir $\mathcal{O}$ par une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de E vérifiant ces deux axiomes.

De même, on appellera voisinage d'un point tout ensemble contenant un ouvert contenant le point ; point adhérent à un ensemble tout point tel que pour tout voisinage V de ce point, on ait $V \cap A \neq \emptyset$; adhérence $\bar{A}$ d'un ensemble A l'ensemble de ses points adhérents. On vérifie que les fermés sont les ensembles tels que $A = \bar{A}$.

On appellera homéomorphisme de deux espaces topologiques E et F une application biunivoque et bicontinue de E sur F .

Mais ces définitions étant acquises, une foule de problèmes se posent, par exemple :

Une topologie étant donnée sur un ensemble E , peut-elle être déduite d'une structure métrique sur E ?

Quelles restrictions y a-t-il lieu d'apporter à la généralité des structures topologiques définies plus haut pour qu'elles possèdent telle propriété particulière, de $\mathbb{R}^n$ par exemple ?

La tâche de la topologie, en tant que théorie, est de répondre à ce genre de questions.

A. R.

II. ESSAIS ET VARIÉTÉS

ESSAI D'UNE THÉORIE DU P.G.C.D. ET DU P.P.C.M., INSPIRÉ PAR LES MÉTHODES DE L'ALGÈBRE MODERNE

I. — On appelle « idéal » un ensemble (I) d'entiers relatifs tels que :

1° si α et $\alpha' \in (I)$, $\alpha + \alpha' \in (I)$;

2° si $\alpha \in (I)$, et si k est un entier relatif quelconque, $k\alpha \in (I)$.

PROPRIÉTÉS.

1° Si $\alpha \in (I)$, $-\alpha \in (I)$.

2° Si $\alpha \in (I)$, $\alpha' \in (I)$, $k\alpha + k'\alpha' \in (I)$, k et k' étant des entiers relatifs quelconques.

3° $0 \in (I)$.

4° Parmi tous les nombres positifs de (I), il en existe un qui est inférieur à tous les autres, soit Δ . Si $\alpha \in (I)$ nous pouvons diviser α par Δ :

$$\alpha = \Delta Q + R \quad 0 \leq R < \Delta.$$

D'après 1° $R = \alpha - \Delta Q \in (I)$ donc $R \geq \Delta$, ou $R = 0$. Il y a contradiction, sauf si $R = 0$.

THÉORÈME. — *Tous les entiers relatifs non nuls d'un même Idéal sont les multiples de l'un d'entre eux, l'entier positif qui a la plus petite valeur absolue.*

Réciproquement, on vérifie sans peine que tous les entiers relatifs de la forme $k\Delta$, Δ donné, k entier relatif quelconque, constituent un idéal.

Remarque. — Le groupe additif d'un idéal est isomorphe au groupe additif des entiers relatifs.

II. — Soient a et b deux entiers relatifs donnés. Nous cherchons tous les diviseurs communs à a et b . Il est clair qu'un tel diviseur divise tous les entiers relatifs $\alpha = ax + by$, x et y étant des entiers relatifs quelconques. Soient deux nombres de cette forme :

$$\alpha = ax + by \quad \alpha' = ax' + by',$$

les nombres

$$\alpha + \alpha' = a(x + x') + b(y + y'),$$

$$k\alpha = a.kx + b.ky \quad (k \text{ entier quelconque}),$$

ont encore la même forme. Par suite, les nombres de la forme $\alpha = ax + by$ constituent un Idéal (Iab) . a et b font partie de (Iab) .

Soit Δ le plus petit nombre positif de (Iab) . Tous les nombres de (Iab) sont multiples de Δ . En particulier a et b admettent Δ comme diviseur. Tout diviseur de Δ est un diviseur commun à a et b .

Réciproquement, comme $\Delta \in (Iab)$, on a :

$$\Delta = ax_0 + by_0,$$

et tout diviseur commun à a et b divise ax_0 et by_0 , donc leur somme algébrique Δ .

THÉORÈME. — *Tous les diviseurs communs à deux entiers relatifs sont les diviseurs du plus grand d'entre eux, Δ , appelé le P.G.C.D.*

COROLLAIRES.

1° Δ et $-\Delta$ sont les seuls nombres de (Iab) qui divisent a et b . En effet, tout autre entier non nul de (Iab) est supérieur à Δ en valeur absolue, il ne peut être diviseur commun à a et b , car il serait alors diviseur de Δ , ce qui est contradictoire.

2° Si $\Delta = 1$, on a $1 = ax_0 + by_0$, a et b n'ont aucun autre diviseur commun que 1 et -1 , ils sont *premiers entre eux*. (Iab) se confond alors avec l'anneau des entiers relatifs. Nous pouvons alors énoncer :

THÉORÈME DE BEZOUT. — *Pour que deux entiers relatifs a et b soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers relatifs x et y tels que*

$$ax + by = 1.$$

Remarque. — Dans $\Delta = ax_0 + by_0$, x_0 et y_0 sont premiers entre eux. En effet, s'il n'en est pas ainsi $x_0 = kx'_0$, $y_0 = ky'_0$

$$\text{et } \Delta = k(ax'_0 + by'_0); \quad \frac{\Delta}{k} = ax'_0 + by'_0$$

et Δ ne serait pas le plus petit nombre positif de (Iab).

PROPRIÉTÉS DU P.G.C.D. DE DEUX NOMBRES.

1° Soit Δ le P.G.C.D. de a et b . Si k est un entier quelconque, $k\Delta$ divise ka et kb . D'autre part :

$$\begin{aligned} \Delta &= ax_0 + by_0, \text{ donc :} \\ k\Delta &= (ka)x_0 + (kb)y_0. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 1° ci-dessus, $k\Delta$ est le P.G.C.D. de ka et kb .

2° Si k est un diviseur de Δ , il est un diviseur commun à a et b , et on démontrerait de même que $\frac{\Delta}{k}$ est le P.G.C.D. de $\frac{a}{k}$ et $\frac{b}{k}$. En particulier si $k = \Delta$, $\frac{\Delta}{k} = 1$.

THÉORÈME. — *Pour que Δ , diviseur commun à a et b soit leur P.G.C.D., il faut et il suffit que $\frac{a}{\Delta}$ et $\frac{b}{\Delta}$ soient premiers entre eux.*

3° Supposons que c est premier avec a , et divise ab . Nous avons :

$$\begin{aligned} 1 &= ax + cy \quad (\text{théorème de Bezout}), \\ \text{donc} \quad b &= abx + bcy, \end{aligned}$$

c divise ab , donc abx , il divise bcy , il divise donc leur somme b .

THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA DIVISIBILITÉ. — *Si un nombre divise un produit de deux facteurs, et est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.*

Les théorèmes suivants sur la divisibilité se démontrent ensuite comme dans les méthodes classiques.

Remarque. — Les restes successifs obtenus par la méthode de l'algorithme d'Euclide appartiennent tous à (Iab).

CAS DE PLUSIEURS ENTIERS RELATIFS a, b, c, d .

La méthode précédente se généralise. Les diviseurs communs cherchés divisent tous les nombres de la forme :

$$ax + by + cz + dt.$$

Ces nombres constituent un idéal (Iabcd), et cet idéal comprend les nombres a, b, c, d . Le P.G.C.D. de a, b, c, d est le plus petit nombre positif de cet idéal. Tous les diviseurs communs à a, b, c, d sont les diviseurs de

$$\Delta = ax_0 + by_0 + cz_0 + dt_0.$$

En particulier, pour que a, b, c, d soient premiers entre eux dans leur ensemble, il faut et il suffit qu'il existe des entiers relatifs x, y, z, t , tels que :

$$ax + by + cz + dt = 1.$$

Dans le cas général $\frac{a}{\Delta}, \frac{b}{\Delta}, \frac{c}{\Delta}, \frac{d}{\Delta}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, et cette propriété caractérise le P.G.C.D.

III. — Soient a et b deux entiers relatifs. Nous recherchons leurs multiples communs. Il en existe certainement, puisque (ab) possède cette propriété.

Si M_1 et M_2 sont deux multiples communs :

$$\begin{aligned} M_1 - M_2 &\text{ est un multiple commun,} \\ kM_1 &\text{ est un multiple quelconque.} \end{aligned}$$

THÉORÈME. — *Les multiples communs à deux entiers relatifs constituent un Idéal. Ils sont par suite les multiples de l'un d'entre eux, le multiple positif le plus petit, soit m , m est appelé le P.P.C.M. de a et b .*

Un multiple commun quelconque est : $M = km$, k étant un entier relatif quelconque.

En particulier $ab = km$.

Posons $m = a\alpha = b\beta$. Nous avons :

$$b = k\alpha \quad a = k\beta.$$

k est donc un diviseur commun à a et b , et sa valeur absolue est la plus grande possible pour que m soit le P.P.C.M. Donc k est égal au P.G.C.D., Δ , au signe près et :

$$m = \pm \frac{ab}{\Delta}$$

Les autres propriétés du P.P.C.M. se démontrent comme dans les méthodes classiques.

MULTIPLES COMMUNS A PLUSIEURS ENTIERS RELATIFS.

On montrerait de même que les multiples communs à plusieurs entiers relatifs a, b, c, d constituent un idéal (I_M), et que par suite $M = km$, m étant le P.P.C.M. Mais la méthode pour déterminer m ne se généralise pas.

FRIBOURG (Lycée de Saint-Cloud).

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

LES MODIFICATIONS DE PROGRAMMES DANS LES CLASSES PRÉPARANT AU BACCALAURÉAT

Nous prions les professeurs de se reporter à la lettre de l'arrêté du 23 novembre 1956 (*Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale*, n° 42, pages 31 et suivantes).

En particulier, il nous paraît important de rappeler, pour l'interprétation des modifications de programmes les intentions (page 32), en nous bornant à ce qui peut concerner notre seule discipline.

On désire :

« 1° Réduire le temps et l'effort consacrés à des acquisitions de détail qui surchargent inutilement la mémoire. »

« 2° Leur substituer, tout en donnant aux élèves les connaissances de base indispensables, des travaux qui les entraînent à la recherche personnelle et aiguïssent leur réflexion et leur jugement. »

« 3° Laisser aux professeurs plus d'initiative pour définir le contenu de leur enseignement. »

« 4° Répondre aux exigences générales de la vie scolaire d'aujourd'hui. »

Il découle de là que toute partie des anciens programmes ayant fait l'objet d'une suppression dans l'arrêté en question, ne devra donner lieu, tant à l'oral qu'à l'écrit du Baccalauréat, à aucune question de cours.

Quant aux problèmes, ils ne devront pas porter sur un corps de doctrine ayant fait l'objet d'une suppression (par exemple, la Statique en classe de Mathématiques). Cependant, il convient que l'appréciation des solutions fournies par les élèves ne soit entachée d'aucun préjugé défavorable à tel procédé qui ne serait pas mentionné dans le texte actuel des programmes, à condition qu'il soit justifié s'il n'est pas classique ; autrement dit, une discrimination fondée sur les allègements actuels ne doit pas jouer dans un sens défavorable à l'élève.

En l'année scolaire 1955-1956, nous avons eu des entretiens avec des professeurs des Enseignements Supérieur et Secondaire, sur la question des programmes, en une Commission présidée par M. le Doyen PÉRÈS. En gros, les alinéas qui ont été supprimés ou modifiés en novembre 1956, se sont trouvés désignés par les desiderata exprimés au sein de cette Commission ; mais il y en avait peut-être davantage de relatifs à des additions aux programmes qu'à des allègements !

Ce travail de refonte de notre enseignement mathématique n'est donc pas terminé ; mais, en ce qui concerne les classes de Baccalauréat, pour lesquelles aucun accroissement de l'horaire dévolu à notre discipline n'est envisagé par notre Direction, si elles sont touchées par de nouvelles modifications, additions et allègements devront se compenser. C'est pourquoi, si notre corps enseignant éprouve des regrets à la lecture de l'arrêté du 23 novembre 1956, il serait imprudent, de la part de l'Inspection Générale, d'aller jusqu'à leur dire : Patientez, ce n'est qu'un au revoir...

M. le Directeur général m'informe d'une refonte des programmes qui devra être appliquée dès la rentrée d'octobre 1957. Nous nous proposons de l'effectuer en collaboration avec les Sociétés de Spécialistes et espérons que nous ne serons pas placés, cette fois, devant des décisions brusquées.

Je vais maintenant répondre aux questions qui ont été posées au Président de l'Association des Professeurs de Mathématiques, ou aux Inspecteurs généraux, par de nombreux collègues, en laissant de côté les allègements qui n'ont pas soulevé chez eux d'émotion particulière. Les trois premières de ces questions (A, B, C) sont relatives à la classe de Mathématiques Élémentaires.

A. *La géométrie cotée n'est plus explicitement au programme ; est-elle complètement supprimée ?*

Du titre de l'alinéa on a fait disparaître « et géométrie cotée ». Nous ne sommes jamais bien parvenus, jusqu'ici, à faire disparaître certaines préventions évoquant le souvenir d'un appareil technique spécial développé, autrefois, à l'usage des topographes, et exigé à Saint-Cyr.

Dans les classes scientifiques de Première, une conception plus nuancée des méthodes concernant les représentations des figures avec un seul plan de projection a été, et demeure définie : on y utilise, conjointement avec la projection de chaque point, une cote, qui n'est pas nécessairement chiffrée, tout au moins pour les données et les résultats essentiels des épures. Ces cotes interviennent en vraie grandeur (compte tenu de l'échelle du dessin) dans des *tracés dont on n'entend pas faire l'économie*, ce sont ceux des rabattements de plans verticaux sur un plan horizontal (qui n'est pas exclusivement choisi de cote zéro). Ces tracés sont un acheminement vers ceux de la géométrie descriptive.

En classe de Mathématiques, ce terme prend sa signification traditionnelle avec le recours à un second plan de projection, perpendiculaire au premier : ce n'est pas absolument nouveau, puisqu'on a utilisé déjà des plans verticaux auxiliaires. L'élément neuf est que des figures non contenues dans ce plan, dit plan frontal de projection, sont projetées sur ce plan, d'où une parfaite dualité d'usage des deux plans de projection. C'est ainsi qu'on peut rabattre un plan de bout sur ce plan frontal, désormais.

On ne peut proscrire l'usage des représentations, soit d'une ligne droite, soit d'un plan par des « échelles de pente », parfois plus simples que celles de la Géométrie de Monge. Cependant le passage de ces données à une épure de cette géométrie est une méthode avantageuse ; si la droite, ou le plan, sont seuls dans la figure à étudier, pas d'hésitation ; le plan frontal à introduire est alors le plan vertical projetant horizontalement la droite ou projetant une ligne de pente du plan.

Cette conception fait disparaître de l'enseignement l'ancienne théorie de la droite et du plan perpendiculaire, spéciale à la géométrie cotée (l'intervalle d'une normale à un plan est l'inverse de celui d'une ligne de pente du plan, etc...) et les tracés qui en résultent et qui faisaient appel à la mémoire.

Les intersections de plans et d'une droite avec un plan doivent d'abord être étudiées sans épure et comportent des méthodes générales applicables dans les deux systèmes de représentation des figures : on recommande de s'abstenir de diviser ces chapitres en sous-chapitres, l'un relatif à la Géométrie de Monge, l'autre aux projections cotées, lorsqu'on passera aux épures. Mieux vaudrait, pour obéir à la recommandation (1°), laisser de côté complètement le second sous-chapitre, étant entendu qu'on peut l'annexer au premier. C'est la méthode bien connue de la casserole qu'on raccroche au clou.

Ainsi disparaîtrait, en géométrie « cotée » la question de l'intersection d'un plan avec une normale à ce plan, qui, pour les puristes de cette géométrie, exigeait un artifice particulier. En prenant au contraire un plan frontal auxiliaire, comme dit plus haut, le tracé est d'une extrême simplicité et parle aux yeux, le plan étant rendu de bout.

Conclusion : pas d'exercices *systématisés* sur la géométrie cotée ; même conseil pour les exercices de représentation de prismes et de pyramides, supprimée en principe.

B. *L'étude des cas de résolution des triangles est-elle supprimée ?*

La réponse est : Oui ; l'ancien alinéa VI du programme de trigonométrie d'élémentaires disparaît complètement.

Le remplacement de cet alinéa par une rédaction relative à d'autres travaux [recommandation 2°] est destiné à éviter que les élèves ne perdent l'entraînement aux formules de la trigonométrie et au maniement des tables logarithmiques, qui n'a

pas, dans l'Enseignement du Second Degré, été pratiqué déjà en Première. D'autre part, cette rédaction donne le pas aux problèmes de trigonométrie issus d'applications concrètes à ceux qui, stériles « bateaux », sont posés par l'existence d'un triangle satisfaisant à trois conditions données où interviennent les lignes plus ou moins remarquables de ce triangle.

La question des formules calculables par logarithmes a, nous dit-on, moins d'importance que dans le passé et ne joue pas de rôle dans les actuelles machines à calculer.

Comme nous allons tenter de le faire voir, les cas *classiques* de résolution des triangles quelconques, ne seront presque jamais utilisés dans les théories que l'élève rencontre dans ses études, postérieurement à Mathématiques Élémentaires. Ne parlons pas, bien entendu, des cas classiques de résolution des triangles rectangles, fort importants, au contraire, mais qui sont justiciables de formules connues depuis la classe de Troisième. Laissons de côté le cas douteux, dont il est douteux déjà qu'un arpenteur l'ait jamais rencontré ; étudié dans les classes antérieures géométriquement, sa discussion par le calcul devient rébarbative si on la prolonge trop.

Le troisième cas (on donne les trois côtés du triangle), a certes de l'intérêt ; mais par l'intermédiaire de calculs, il aboutit à des formules évidentes géométriquement

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}, S = pr$$

auxquelles il convient d'adjoindre celle qu'on a établie déjà en Seconde

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Arrivons au second cas : résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris. C'est une expression d'un problème fondamental se posant très fréquemment, que voici :

Connaissant les orientations (directions et sens) de deux vecteurs et leurs intensités, définir par un calcul l'orientation et l'intensité de leur somme géométrique ou de leur différence géométrique (l'une revient à l'autre).

Lequel d'entre nous a jamais traité ce dernier problème en appliquant la formule : $\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cotg \frac{A}{2}$? Il est heureux qu'on ait mieux : le problème en question se traite à l'aide des coordonnées de vecteurs.

Dès cette même classe de Mathématiques, à propos de la construction de Fresnel (somme géométrique de deux vecteurs tournants), tous nos manuels développent les calculs comme conséquence du théorème des projections, méthode analytique.

Le développement moderne des théories vectorielles a comme effet de rendre surannée la théorie traditionnelle des triangles rectilignes. Le temps que l'on perd à traiter le second cas de résolution des triangles en évitant de se servir de

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

idée fournie par l'élève moyen, serait mieux employée à étudier le système

$$\begin{cases} x \cos y = a_1, \\ x \sin y = a_2. \end{cases}$$

D'autre part, les angles de triangles sont particuliers et en géométrie analytique plane, il s'agira souvent d'angles orientés, de mesures non comprises entre 0 et π .

Quant à l'aspect du problème découlant de la composition de deux vecteurs, l'élève le retrouvera en Mathématiques Supérieures, à propos des nombres complexes. Il sera mieux compris à ce niveau.

Plus loin encore, en Analyse, il existe un rapport étroit évident de notre second cas de résolution avec le calcul des parties réelle et imaginaire du nombre complexe $\operatorname{Log}(1+z)$ quand $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Consultez la Géométrie de Legendre, et à propos de la résolution des triangles rectilignes, vous y verrez pour $0 \leq r < 1$, les développements en série entière en r

du module et de l'argument de $\text{Log}(1 + z)$. Il y a là, pour les professeurs de Spéciales, deux exercices intéressants de développements, permettant un retour sur le passé, essentiel à la compréhension mathématique.

Nous avons oublié de parler du premier cas de résolution, si facile ; on en retrouvera plus tard une variante : passage de coordonnées biangulaires à des coordonnées polaires, qui n'intervient que dans de rares occasions.

Sans prohiber absolument les résolutions de triangles dans les cas non classiques, à titre d'exercices, constatons que les élèves moyens n'y voient trop que l'observation de certains rites et méconnaissent, faute de réflexion [recommandation 2°] leur intérêt en tant que problèmes spéculatifs, comportant analyse, synthèse et enfin discussion.

C. La suppression de la construction d'un cercle passant par deux points et tangent à une droite ou à un cercle donnés interdit-elle d'employer cette construction pour une étude classique des coniques ? Mais si elle ne l'interdit pas, il faut bien étudier la construction.

La réponse à la première question est ici, *non*, pourvu qu'on fasse glisser cette construction de celles qui font l'objet de la recommandation (1°) à celles qui sont encouragées dans la recommandation (2°).

En second lieu, il n'a pas paru possible de décréter, à propos du problème de recherche des points d'intersection d'une droite avec une conique, « la question ne sera pas posée ». En effet, il existe des procédés d'étude de ce problème qui le traitent sans faire intervenir un cercle directeur, donc sans rattacher l'intersection au problème de cercles tangents. Les maîtres attachés à ces procédés, évidemment, ne sont pas gênés par la suppression proposée.

Nos collègues de la Commission PÈRÈS ont été parfois d'avis que trouver les points d'intersection d'une conique avec une droite, au compas, sans tracer la conique, c'est un raffinement. Professeurs de Spéciales ou de Faculté, leur conception de l'ensemble de la théorie des courbes du second ordre les porte à évoquer une très grande variété de tracés servant, par exemple, dans les épreuves, pour construire l'intersection, et comme c'est très rarement que la définition de la conique en cause fera intervenir, ne fût-ce qu'un seul foyer, nos méthodes de Mathématiques Élémentaires leur paraissent tenir trop de place et être surannées. Tout le monde sera d'accord pour penser que le problème de l'existence et du nombre des points d'intersection d'une droite avec une conique est de beaucoup plus important que l'obtention d'un tracé que presque personne n'utilisera jamais.

Mais l'atmosphère de la théorie des coniques en Spéciales est morne par rapport à l'initiation qui se pratique en Mathématiques Élémentaires. Nous pensons donc que, à l'école de Dandelin et de Lebesgue, nous sommes sûrs de ne pas perdre tant de temps qu'on le proclame parfois, la géométrie pure étant une bonne école du raisonnement.

Les professeurs, à mon avis, pourront traiter en travail libre, et sans dogmatisme, le problème de cercles tangents incriminé. Nous sommes en janvier 1957 et la place assignée à ce problème dans l'ancien programme doit être modifiée cette année, les axes radicaux ayant été traités. Rien n'est perdu : on peut le faire rentrer dans les applications de l'inversion. Celles-ci ne sont pas mentionnées explicitement dans les programmes, mais il y est dit aussi que toute liberté est laissée au professeur pour l'agencement de son cours !

Etant donné un cercle (C) et deux points A et B (non situés sur le cercle), on pourrait d'abord se proposer d'étudier la correspondance sur (C), entre les points M et N d'intersections avec (C) d'un cercle quelconque sécant à (C) et passant par A et B. Quelques remarques préalables guideront l'élève :

a. Si deux points s'échangent dans une inversion, celle-ci laisse (globalement) invariant tout cercle passant par ces deux points.

b. Deux couples de points échangés par une même inversion appartiennent à un

même cercle [une droite, au point de vue anallagmatique, n'est qu'un cercle particulier].

c. Si, inversement, A, B, M_0, N_0 sont quatre points d'un même cercle, le couple (A, B) étant distinct du couple (M_0, N_0) , il existe une inversion unique échangeant d'une part A et B , d'autre part M_0 et N_0 ; cette inversion, au point de vue anallagmatique, peut être une symétrie axiale (lorsque les droites AB et M_0N_0 sont parallèles).

On peut établir, d'après cela, la proposition : *Il existe une inversion (I), et une seule, échangeant les points donnés A et B et conservant (globalement seulement) le cercle (ou droite) (C).*

Il semble plus intéressant d'insister sur cette propriété que sur son corollaire, maintenant facile : trouver un cercle passant par A et B et coupant (C) en deux points M et N confondus.

Plusieurs professeurs nous ont fait la suggestion suivante : traiter le problème des cercles en question en le transformant par une inversion ayant pour pôle A ou B ; il se ramène au problème des droites tangentes à un cercle et passant par un point donné. La discussion est immédiate : il y a deux solutions quand A et B sont tous deux intérieurs, ou tous deux extérieurs à (C) .

Un autre procédé utilise la proposition suivante :

d. Etant donnés dans un plan (ou sur une sphère) quatre points A, B, C, D , pour que les cercles (ABC) et (ABD) soient orthogonaux, il faut et il suffit que les cercles (CAD) et (CBD) soient orthogonaux. Elle se démontre en transformant la figure par une inversion de pôle B .

Ceci posé, soit une conique de foyer F , de cercle directeur (F') , de centre F' , distinct de F , et une droite (D) : les points éventuels d'intersection de la conique avec (D) sont les centres des cercles éventuels passant par F et φ et tangents à (F') , le point φ étant le symétrique de F par rapport à (D) .

Introduisons le point G inverse de F dans l'inversion positive ayant (F') comme cercle d'inversion ; les cercles passant par F et G sont orthogonaux à (F') .

Pour qu'un point C du cercle (F') soit point de contact avec (F') du cercle (X) passant par F, φ et C , il faut et il suffit que le cercle $(F\varphi C)$ soit orthogonal au cercle (F, G, C) .

D'après la propriété *d*, il faut et il suffit encore à cet effet que les cercles $(F\varphi G)$ et $(C\varphi G)$ soient orthogonaux. Ce qui amène à la construction suivante :

Considérer le cercle connu φGF (qui peut être une droite), puis le cercle (J) orthogonal au précédent aux points φ et G : les points de rencontre C et C' de (J) avec (F') sont les points de contact avec (F') des cercles cherchés, passant par F et φ et tangents à (F') .

Un de ces cercles peut être une droite.

Ceci n'est mentionné qu'à titre de curiosité. G est le symétrique de F par rapport à la directrice de la conique relative au foyer F .

Programme de cosmographie, de Philosophie et de Sciences Expérimentales.

Il semble que les suppressions opérées, acceptables pour la première des deux classes précédentes, soient vraiment indulgentes et trop grossières pour la seconde.

Les inégalités du mouvement du soleil en ascension droite (réduction à l'écliptique, équation du centre) sont instructives et peuvent être évaluées par un calcul approché ; mais il faut se résigner, pour la masse des élèves, à ne pas aborder ces problèmes.

Lorsque le professeur viendra à l'étude des inégalités des jours et des nuits, il lui faudra rappeler la définition de la latitude du lieu, tirée de la géographie.

P. ROBERT,

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Sur une modification des programmes

L'arrêté du 23 novembre 1956 porte, pour la classe de Mathématiques :

« Exemples de problèmes tirés de la géométrie, de la topographie ou des sciences physiques, dont la résolution fait intervenir l'algèbre et la trigonométrie. Usage des tables de logarithmes à cinq décimales et des tables de valeurs numériques en général. »

On reconnaît ici l'idée des exemples réels que notre Collègue DELAPIERRE a déjà présentée ici (n° 177, p. 433 ; n° 179, p. 58). Indiquons quelques ouvrages où les Collègues trouveront des suggestions :

— J. ESCARRA : *Traité d'arpentage*, Gauthier-Villars, 1923 (prix : 105 F).

— ROUCHÉ-COMBEROUSSE : *Éléments de géométrie suivis d'un complément à l'usage des élèves de Mathématiques Élémentaires et Mathématiques Spéciales, et de Notions sur le Lever des plans, l'Arpentage et le Nivellement*, Paris, 1932, Gauthier-Villars (prix : 480 F).

A titre indicatif, j'énumère quelques problèmes classiques de topographie :

— Des deux extrémités AB d'une base de longueur connue, les deux angles de visée d'un point C permettent de calculer les coordonnées géographiques d'un troisième point C quelconque (problème de la télémétrie).

— Connaissant les positions de trois points A, B, C, la mesure de deux angles APB et APC permet de calculer les coordonnées de P (problème de la carte ou du relèvement).

— Hauteur d'un édifice CD, dont le pied C est inaccessible, par deux visées de son sommet D à partir de deux points A et B alignés sur une horizontale de C.

— Hauteur d'une montagne par deux visées de son sommet à partir des extrémités d'une base horizontale AB de longueur connue.

Il faut aussi faire une place aux applications de la *trigonométrie sphérique* si on veut bien admettre qu'il est difficile de parler des trièdres sans donner les définitions relatives aux triangles sphériques. Se présentent alors tous les exemples de calculs de l'astronomie : relations entre coordonnées horizontales et coordonnées horaires ; azimut des lever ou du coucher d'un astre de coordonnées équatoriales connues (correction de réfraction, résolution d'un triangle rectiligne ; calcul du passage d'un astre dans le premier vertical, résolution d'un triangle rectangle ; plus grande digression des polaires. On trouvera les indications sur les résolutions dans l'*Astronomie générale*, de A. DANJON, et les données numériques dans la *Connaissance des Temps*).

Les mêmes problèmes se présentent en géographie. Le calcul d'une orthodromie est à la portée d'un élève de Mathématiques Élémentaires.

Pour finir, je rappellerai que la *Carte du Ciel*, éditée par l'Institut Géographique National (édition en vert), est une projection stéréographique qui se prête à des constructions réelles au compas. Une notice de J. LEVALLOIS peut être commandée avec la carte (prix de la carte, 185 F ; de la notice, 132 F).

Les remarques précédentes n'ont pas la prétention d'épuiser le sujet. Invitation à tous les Collègues de nourrir cette rubrique des exercices réels de Mathématiques pour toutes les classes.

G. W.

≡ IV. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS ≡

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES (Hommes) Concours de 1956

Rapport de M. l'Inspecteur général DONTOT, Président du jury

Le jury était composé de M. DONTOT, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; M. COMBES, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse, vice-président ; M. Y. MARTIN, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes ; M. THÉRON, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; M. POUGNAND, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Janson-de-Sailly.

ÉPREUVES ÉCRITES

Elles ont eu lieu les 22, 23, 25 et 26 mai, de 8 heures à 15 heures.

Le nombre des candidats inscrits a augmenté ; il est de 230 au lieu de 218 (+ 12), mais celui des candidats qui se sont effectivement présentés est à peu près stationnaire ; il est de 196 contre 191 (+ 5) ; enfin le nombre des candidats ayant remis les quatre compositions diminue, il n'est plus que de 178 contre 183 (— 5). Nous ne tiendrons compte dans les considérations qui suivent et en particulier pour le calcul des pourcentages, que des 178 candidats ayant subi la totalité des épreuves écrites.

Parmi les cinquante-deux candidats qui n'ont pas remis les quatre compositions écrites, on décompte trente-quatre d'entre eux qui ne se sont pas présentés et dix-huit qui ont renoncé après avoir subi une ou deux épreuves écrites. Sur les trente-quatre qui ne se sont pas présentés, trente sont des professeurs en exercice. Si l'on excepte de ceux-ci trois ou quatre velléitaires, candidats fantômes s'inscrivant chaque année et ne se présentant jamais, ces professeurs n'ont pu courir leur chance, soit parce qu'ils n'ont pu consacrer autant de temps qu'ils l'espéraient à leur préparation, soit parce qu'ils n'ont pu se résoudre à abandonner leurs élèves au milieu du troisième trimestre pendant une dizaine de jours. A un moment où l'on parle beaucoup de démocratiser l'enseignement, et par conséquent les concours, il est bon de rappeler que les candidats à l'agrégation ne se présentent pas tous dans les mêmes conditions favorables. Les moins favorisés — tout au moins en ce qui concerne les épreuves écrites — ont toujours été les professeurs en exercice, tenus d'accomplir deux tâches à la fois, celle du professeur et celle du candidat ; or la tâche du professeur est devenue très lourde à cause, d'une part, de l'augmentation des effectifs, à cause, d'autre part, de la disparition du personnel de remplacement (utilisé comme maîtres auxiliaires) et de la multiplication des vacances de postes. Dans certains établissements, les professeurs assurent un service et demi, deux services, même, et ne peuvent, par conséquent, pas faire autre chose. Nous voyons, dans l'augmentation du nombre des candidats à l'agrégation qui renoncent à s'y présenter, une conséquence de cet état de fait qui doit être pris en sérieuse considération.

Parmi les dix-huit candidats qui ont abandonné après une seule épreuve écrite, rarement après la seconde ou la troisième, on trouve seize élèves des C.P.R. ou étudiants. Il s'agit manifestement de candidats qui se sont présentés sans une préparation suffisante ou qui se sont trompés sur leurs aptitudes. Nous nous sommes réjouis l'année dernière de constater l'effort considérable entrepris pour assurer la préparation des candidats à l'agrégation de Mathématiques : création d'une préparation à la Sorbonne, à l'Enseignement par correspondance, etc... Il est normal que ces créations aient attiré des candidats de valeurs diverses ; un tri s'effectuera naturellement parmi ceux-ci. Il est souhaitable que le plus grand nombre possible de jeunes licenciés soient

placés à proximité d'une préparation, prennent contact avec elle, mesurent l'effort qu'elle exige, mais il est également souhaitable que ne se présentent au concours que ceux qui sont capables de cet effort et suffisamment préparés pour l'accomplir.

Le jury s'est réuni au Lycée Saint-Louis le vendredi 22 juin pour fixer la liste des admissibles. Etant donné le grand nombre de places mises au concours, le jury a proposé pour l'admissibilité tous les candidats ayant, comme l'année dernière, totalisé pour les quatre compositions écrites plus de 25 points sur 80, c'est-à-dire ayant une moyenne de 6,5 sur 20 au moins ; 62 candidats ont été, dans ces conditions, proposés pour l'admissibilité au lieu de 48 en 1955.

Le pourcentage des admissibles par rapport aux candidats ayant subi la totalité des épreuves écrites est de 35 % ; il était en 1955 de 27 %, en 1950 de 18 %. Parmi les 62 admissibles figurent dix-huit admissibles des sessions antérieures.

Le tableau suivant donne une répartition des admissibles par catégories.

	Candidats	Adm.
Professeurs (Enseignement secondaire, technique).....	89	20
Adjointes d'enseignement	5	1
Maîtres d'internat	1	
Assistants de faculté	5	4
Elèves des C.P.R.	27	1
Elèves de l'E.N.S. (rue d'Ulm)	16	16
Elèves de l'E.N.S. (St-Cloud)	20	10
Etudiants	15	10

Le total des notes obtenues par les admissibles est compris entre 26 et 67 ; la moyenne sur 20 est donc comprise entre 6,5 et 16,25. Nous noterons le très large éventail de la notation et la bonne qualité des copies remises par les meilleurs candidats. Quatorze d'entre eux ont une moyenne supérieure à 10 sur 20 (il n'y en avait que 8 en 1955) et trente et un ont une moyenne supérieure à 8.

Les rapports des correcteurs signalent avec insistance le pourcentage trop élevé de copies, remises par les candidats, dont les notes n'atteignent, ni la moyenne, ni même 4 ou 5 sur vingt. La comparaison des totaux d'écrit de 1956, 1955, 1954 fournit de curieux renseignements sur cet inquiétant phénomène ; on peut dire en gros qu'en 1954, les épreuves d'écrit étaient de difficulté moyenne ; qu'en 1955 la composition de mécanique a été spectaculairement mauvaise, et qu'en 1956, un effort très sensible a été fait par le jury pour proposer aux candidats des problèmes aux premières parties non hermétiques, accessibles sans connaissances spéciales ; en outre, les barèmes ont été, en 1956, très généreux. Les notes des candidats classés les premiers traduisent assez fidèlement, soit l'incident dû à la composition manquée, soit la moindre difficulté des problèmes ; les notes du 1^{er} sont en 1956 : 67, en 1955 : 47,5, en 1954 : 65,5. Les différences s'atténuent très vite : les notes du 13^e sont 40, 38, 36, celles du 34^e sont 30, 27, 29,5, et à partir de là, diffèrent extrêmement peu. Le candidat classé 63^e a 24,5 en 1956 ; 24 en 1955 ; 24,5 en 1954. On constate donc qu'à partir d'un certain rang, qui représente évidemment celui au-delà duquel l'admissibilité serait une aventure, ou une loterie, les totaux des candidats sont indépendants en quelque sorte des questions posées ; les candidats ne sont plus classés par l'écrit et ceci quel que soit cet écrit.

Les compositions écrites ont donné lieu aux observations suivantes :

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

(Correcteur : M. POUCCAND)

Le texte soumis aux candidats comprend trois parties : une étude générale et deux applications entièrement distinctes l'une de l'autre.

ÉTUDE GÉNÉRALE.

Elle propose de montrer, par la géométrie élémentaire, qu'une affinité ($\mathcal{C}$) d'axe (L), direction δ , rapport $k \neq 1$, transforme une parabole (P) de direction asymptotique δ et de paramètre p , mesuré algébriquement sur un axe $x'x$ parallèle à δ , en une autre parabole (P') de même direction asymptotique δ et de paramètre $p' = \frac{p}{k}$. La droite (L) contient les points communs à (P) et (P') réels ou non ; une construction simple des éléments principaux de (P') est obtenue à l'aide de l'homothétie unique dans laquelle (P') est l'homologue de (P).

Le texte commence par une analyse de la figure formée par deux paraboles (P) et (P') de même direction asymptotique ; il demande de définir avec précision l'homothétie unique qui permet de passer de (P) à (P') et de caractériser la droite (L) ainsi que l'affinité ($\mathcal{C}$). Il est alors facile d'obtenir par une synthèse rapide le résultat cherché.

Les difficultés rencontrées par les candidats et les fautes relevées sont les suivantes :

1) Trop souvent il a été considéré comme élémentaire ou évident le fait que deux paraboles d'axes parallèles sont homothétiques. Les programmes de Mathématiques Élémentaires et le titre VIII de Mathématiques Supérieures n'en font pas mention et le texte commence par : « Montrer que... ». Cependant, on s'est en général borné à exposer plus ou moins clairement que l'homothétie de rapport $\frac{p'}{p}$, dont le centre est le point d'intersection de FF' et HH', fait correspondre les deux courbes. Existe-t-il d'autres homothéties ? Les foyers sont-ils forcément homologues ? Où est le centre si HH' et FF' sont confondues, ou si l'une de ces droites n'est pas déterminée par suite de la confusion de H et H' ou de F et F' ? Autant de points laissés de côté qu'une analyse préalable de la question aurait mis en évidence.

2) La solution de la deuxième question commence en général par ces mots : « On sait que deux paraboles de même direction asymptotique, ayant deux points communs à l'infini... » Ce raisonnement analytique n'est pas à la portée d'un élève de Mathématiques Élémentaires. Il serait bon de relire à ce sujet le préambule au programme des épreuves écrites de l'agrégation. En réalité, et certains candidats peu nombreux l'ont bien compris, le raisonnement géométrique demandé permettait de montrer l'existence d'une droite unique (L) contenant les points communs à (P) et (P'). Il existe une direction (l) unique ayant même diamètre par rapport aux deux paraboles ; donc s'il existe un point E commun, il en existe un autre E' sur la parallèle (L) à (l) issue de E. Réciproquement, si deux points communs E et E' distincts existent, la droite EE' ayant même diamètre conjugué de sa direction par rapport à (P) et (P') est parallèle à (l). On peut en conclure aisément que tout point commun autre que E se trouve sur la droite (L) unique issue de E et parallèle à (l). Évidemment (L) peut être tangente en E à (P) et (P').

3) L'axe d'affinité (L) est introduit comme droite joignant les points E, E' communs à (P) et (P'), supposés réels. Mais il fallait se demander pourquoi l'énoncé recherchait des propriétés de (L) indépendantes de la réalité de E et E'. Dans la

suite du problème, cette réalité n'est plus nécessaire et la transformation de (P) par l'affinité ($\mathcal{C}$) n'impose aucune restriction à (L) autre que de ne pas être parallèle à la direction asymptotique δ . Le texte, volontairement, n'insiste pas sur cette subtilité : il suggère pourtant la discussion de l'existence de E et E' d'après la position de (P') et (P), (L) étant toujours réelle, « définie à partir des seuls éléments fixes ». N'oublions pas qu'il s'adresse à des professeurs pour qui savoir lire et analyser un texte est primordial. A la correction, nous avons nettement avantagé les candidats trop rares qui ont aperçu et résolu cette difficulté.

Nous laissons de côté les maladroites habituelles, les recherches analytiques longues, maladroites, fastidieuses — moins nombreuses d'ailleurs que les années précédentes — les fautes d'orientation, l'emploi fréquent d'une équation fautive de parabole rapportée à la tangente en un point et au diamètre conjugué ; cette équation, qui n'est pas explicitement au programme, aurait dû être rétablie. Signalons cependant que, à la fin de cette partie, la détermination du lieu de F₁ comme conique de foyers E, E', n'est valable que si E et E' existent ; il est plus simple et plus élégant de retrouver cette hyperbole à l'aide de ses asymptotes et du point F.

APPLICATIONS.

Une homographie, dans laquelle les points E et E', réels ou imaginaires communs à (P) et (P') ont pour homologues les points cycliques, transforme les deux paraboles en deux cercles tangents (I') et (I''). La recherche analytique de la condition nécessaire et suffisante d'existence de triangles inscrits dans (I') (rayon R) et circonscrits à (I'') (rayon r) donne $4R = r$, lorsque la solution $R = r$ est exclue.

Ce rapport $\frac{r}{R} = 4$ des rayons est précisément le rapport cherché entre les paramètres de (P) et (P') dans l'application A ; la conservation du birapport dans l'homographie permet de retrouver aisément ce résultat. La famille, étudiée dans l'application B, des coniques tangentes à (P) et (P') et passant par E et E' correspond par cette homographie à celle des cercles bitangents à (I') et (I'').

Application A : La difficulté majeure est de montrer que la droite (L) passe par les centres de gravité G, G', G'' des trois triangles Att'', Bt't, Ct't''. La méthode suggérée par l'énoncé est simple. Soit λ , milieu de t θ le point d'intersection de BB' et tt''. La figure B $\lambda\theta$ est homothétique de AA't'' par rapport à t ; d'où le parallélisme de B θ et AC. Pour une raison analogue C θ est parallèle à At en prenant t'' pour centre d'homothétie ; d'où le parallélogramme AC θ B et la relation $\vec{Ar'} = \vec{t'\theta}$ en appelant r' le point commun à BC et AA'. D'autre part, puisque le triangle t't''t est homothétique de A'B'C', on a : $\vec{Ar} = -\frac{1}{2}\vec{t'\theta}$, si r est le point d'intersection de B'C' et de AA'. On en déduit le rapport k de l'affinité ($\mathcal{C}$) d'axe (L) faisant correspondre A'B'C' à ABC : $k = \frac{\vec{Ar'}}{\vec{Ar}} = -\frac{1}{2}$. Le point G d'intersection de (L) et de AA' est

donc tel que : $\frac{\vec{GA'}}{\vec{GA}} = -\frac{1}{2}$; G est bien le centre de gravité de Att''. Le rapport d'affinité égal à $\frac{1}{4}$ des deux triangles abc et ABC est alors trouvé facilement.

Aucun candidat n'a mené à bien cette démonstration. La condition nécessaire et suffisante d'existence des triangles inscrits dans (P) et circonscrits à (P') a été entrevue par quelques candidats.

Application B : (P) et (P') ont deux points communs E et E'. Il est possible de

faire apparaître la famille de coniques cherchée en utilisant le théorème de Pascal. La méthode élémentaire proposée s'appuie sur la détermination d'une conique par deux points diamétralement opposés, leurs tangentes parallèles, et un point quelconque. Cette étude préliminaire fait l'objet de la première question et utilise les propriétés des pôles et polaires par rapport à une conique. Signalons qu'elle a arrêté beaucoup de candidats, dont certains semblent, d'après leur rédaction, persuadés qu'une conique est déterminée lorsqu'on connaît les droites supports de deux diamètres conjugués. La première partie du problème donne aussi une solution très simple dans le cas de la parabole, car deux paraboles tangentes en A à AT et de direction asymptotique donnée sont homologues dans une affinité ($\mathcal{C}$) d'axe AT.

La deuxième question est une conséquence directe de cette étude préliminaire. Le quadrilatère $uu'v'v''$ est un parallélogramme dont les côtés et les diagonales passent par des points-fixes. Les points μ et μ' décrivent la parabole de direction asymptotique $x'x''$, passant par E, E' et le milieu J de SS'. Le lieu de ω se déduit de (P) par une homothétie de centre I, dont le rapport est facile à calculer.

Résultats obtenus. — Le texte, quoique relativement facile, est long. Le barème utilisé en a tenu compte largement. Pratiquement l'étude générale et une application correctement traitée permettaient d'obtenir une très bonne note.

Aussi les notes se sont-elles assez largement étalées de 0 (copie blanche) à 18,5, donnant ainsi un classement satisfaisant des candidats. Nous avons :

- 31 notes supérieures ou égales à 10 ;
- 50 notes comprises entre 7 (inclus) et 10 ;
- 36 notes comprises entre 5 (inclus) et 7.

Mais il reste un paquet trop volumineux de 79 copies dont la note est inférieure à 5, et dans lesquelles les nombreuses fautes et maladresses témoignent de la faiblesse en géométrie pure de leurs auteurs. Il est à remarquer que 7 d'entre eux ont été admissibles, 3 seulement restant sur la liste d'admission.

Finalement, la moyenne générale des 196 copies corrigées est de 6,18, moyenne légèrement inférieure à celle obtenue l'année dernière.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Correcteur : M. THÉRON)

Le problème comportait de nombreuses questions faciles (toute la section I, les questions II 1°, III 1° et 2°), les autres, plus délicates, n'étaient pas inabordables ; enfin, l'énoncé guidait de très près les candidats. Cependant, malgré la présence de quelques bonnes et très bonnes copies, l'impression d'ensemble est assez fâcheuse. Trop de copies sont si vides qu'il est inutile d'essayer de les analyser. D'autre part, on relève, dans un grand nombre d'autres, des fautes graves dont les plus fréquentes sont indiquées ci-dessous.

La question I 1° demandait *in fine* de discuter l'existence d'une courbe (Γ) dont l'associée est une courbe (γ) donnée. Cent candidats (soit 54 %) n'ont pas étudié cette réciproque, quelques-uns par faiblesse, d'autres par dédain ou inconscience ; certains ont épilogué sur les conditions analytiques précises que doivent vérifier les fonctions $\rho(t)$ et $\theta(t)$ pour que la réciproque soit exacte (alors que le préambule était destiné à supprimer ces discussions), mais n'ont pas vu le cas par trop trivial $X = C^0$ qui donne les spirales logarithmiques.

La question I 3° montre que de très nombreux candidats ne savent pas ce que signifie *orienter* une courbe : pour justifier le passage de $ds^2 = \frac{\rho^2 Y^2}{\sin^2 X} dX^2$ à l'équa-

tion (3), plusieurs dizaines de candidats ont écrit : « Il suffit d'orienter la courbe dans le sens des s croissants », ce qui ne veut rien dire ; plus nombreux sont ceux qui l'ont orientée dans le sens des X ou des θ croissants ; plus nombreux encore ceux qui n'ont donné aucune explication. Il n'est donc pas inutile de rappeler qu'étant donné un arc d'une courbe paramétrique rectifiable, orienter cet arc dans le sens

du paramètre t croissant, c'est imposer $\frac{ds}{dt} \geq 0$ en tout point. Ici, sauf aux points

où $dX = 0$ et aux points en lesquels $\frac{\rho Y}{\sin X}$ est nul ou n'existe pas, l'orientation pour

laquelle (3) est vérifiée, se trouve définie par la condition : $\frac{ds}{dX}$ doit avoir le signe

de $\frac{\rho Y}{\sin X}$.

Les réponses aux questions de la section II font intervenir des intégrales du

type $\int_{n\pi + \frac{\pi}{2}}^X \varphi \cotg \varphi d\varphi$, qui n'ont en général pas de sens lorsque X est égal à l'une

des bornes de l'intervalle ; or les candidats, qui ont abordé la question II 2° ont souvent remplacé brutalement X par sa limite dans l'expression du quotient des rayons de courbure, après quoi ils ont naturellement raisonné sur ces expressions dénuées de sens.

**

La section III a peu inspiré les candidats.

La question 1° a été traitée très lourdement dans presque toutes les copies ; il existe pourtant au moins deux méthodes simples : on peut remarquer que le cercle a un rayon de courbure constant, donc l'équation (4) donne une équation différentielle des courbes (Γ) ; on peut aussi utiliser l'équation finale de la question I 3° : il suffit

de faire une figure en remarquant que l'angle X défini par l'égalité $\tg X = \frac{\rho d\theta}{d\rho}$, n'est autre que l'angle désigné traditionnellement par V pour avoir en trois lignes l'équation de (Γ).

La question 2° a été assez souvent traitée, mais en général de façon superficielle.

La question 3°, délicate, a mis en évidence l'esprit d'analyse des meilleurs candidats.

**

184 copies furent corrigées, dont les notes vont de zéro (deux fois) à 19. La répartition des notes se représente assez exactement par la superposition d'une répartition du type de Gauss, allant des notes 0 à 8 et intéressant 90 % des candidats avec une répartition irrégulière allant des notes 9 à 19, attribuées aux 10 % restants. Le tiers des candidats n'arrive pas à obtenir la note 4 et la moitié d'entre eux ne peut obtenir la note 5.

L'impression d'ensemble, comme l'an dernier, n'est pas très encourageante. Les bons candidats sont en trop petit nombre ; les notes 19, 18, 17,5, 16,5, 16, témoignent du mérite des meilleurs d'entre eux et de la qualité des solutions qui nous ont été remises. Nous nous inquiétons de la proportion trop faible de notes comprises entre 9 et 14 que n'expliquent, ni la difficulté, ni la longueur du problème.

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

(Correcteur : M. Y. MARTIN)

Renseignements statistiques : 183 copies furent remises. La moyenne des notes est de 5,77. Les meilleures notes sont : 19,5 ; 19 ; 17 ; 15,5 (2 fois) ; 15 (2 fois) ; 14,5 ; 14 ; 13,5 ; 13 (2 fois) ; 12,5 (2 fois) ; 12 (4 fois), etc... Les résultats globaux sont consignés dans le tableau suivant :

Notes	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 4$	$4 \leq x < 6$	$6 \leq x < 8$	$8 \leq x < 10$	$10 \leq x < 12$	$12 \leq x < 14$	$14 \leq x < 16$	$16 \leq x < 18$	$18 \leq x < 20$
Fréquences...	38	34	31	23	22	17	9	6	1	2

Ces résultats sont, dans l'ensemble, assez décevants et ce n'est qu'à la générosité du barème que la moyenne doit d'être de 5,77. En particulier, il ne devrait pas se trouver 38 candidats à avoir une note inférieure à 2, alors qu'il était attribué 11 points pour l'ensemble des trois premières questions ! Notons, en guise de consolation, que si l'on excepte ces 38 « candidats », la moyenne se trouve hissée à 7, et que la moyenne relative aux 62 admissibles est de 10,1, ce qui implique une corrélation très satisfaisante entre les résultats de l'épreuve d'Analyse et ceux de l'ensemble des épreuves écrites.

Les deux meilleures copies distançaient nettement les suivantes et faisaient preuve de qualités indéniables, mais très différentes ; elles furent notées 19,5 et 19. La première, sensiblement plus complète que la seconde, dénotait une exceptionnelle endurance : la presque totalité des cinq premières questions et le début de la sixième y étaient traitées. Toutefois, les méthodes employées étaient souvent inutilement compliquées, alourdissant d'autant une rédaction peu aérée. La deuxième copie appartenait au candidat qui devait se classer premier à l'admissibilité comme à l'admission ; de lecture infiniment plus agréable, elle témoignait d'un esprit particulièrement vif, révélant en outre, par la clarté et la simplicité de son exposé, de très grandes qualités pédagogiques.

**

Les trois premières questions devaient, dans l'esprit du correcteur, faire une première sélection et on espérait qu'elles seraient un obstacle vite franchi par la majorité des candidats. Il n'en fut rien et c'est sur ces trois premières questions que les deux tiers environ des candidats se départagèrent. Dans les deux premières questions et dans une bonne partie de la troisième, les candidats n'avaient pourtant qu'à se laisser guider par un énoncé très explicite. Dans les questions suivantes, une initiative plus grande leur était volontairement laissée : ce fut l'occasion d'une débâcle quasi-générale. En particulier, malgré le souci d'utiliser dans l'énoncé des notations évocatrices, peu de candidats pensèrent à utiliser à la fin du 3^e la transformation d'Abel rappelée au début de cette même question. Cet échec tient, en réalité, à ce que la très grande majorité des candidats n'a pas assimilé les notions premières de l'Analyse. Aucune des fautes classiques (hélas !) ne fut oubliée. Citons, parmi les plus fréquentes :

— Si $\frac{u_n}{u_n} \rightarrow 1$, les séries (u_n) et (v_n) sont de même nature.

— Les inégalités $|a_n| < A$ impliquent $|\sum a_n b_n| < A |\sum b_n|$.
 — Si les sommes partielles d'une série à termes quelconques sont bornées, la série converge.

— Si la série (u_n) converge, $\sqrt[n]{|u_n|}$ a une limite.

— Si la série $(u_n + v_n)$ converge, il en est de même des séries (u_n) et (v_n) , etc...

La simple notion de convergence dépasse beaucoup de candidats qui n'y ont sûrement jamais réfléchi. Quant à l'expression « convergence uniforme », elle n'évoque pour beaucoup qu'une précaution de style bien commode pour éviter les foudres du correcteur. Chaque candidat ne devrait-il pas avoir présents à l'esprit, à défaut d'un sens inné de la rigueur, divers contre-exemples qui rendent évidente l'utilité de la notion de convergence uniforme ?

La quatrième question était assez longue et demandait déjà quelques connaissances plus approfondies. Nous pensions qu'elle serait au moins abordée par la moitié des candidats. Elle ne servit en réalité qu'à classer les meilleures copies. Aucun candidat ne donna d'ailleurs l'expression exacte de $h(\theta)$ et très peu manièrent convenablement le calcul des résidus.

La cinquième question se résolvait en quelques lignes si l'on pensait, comme le suggérait l'énoncé, à calculer d'abord les sommes partielles, polynômes de degré $n-1$ prenant des valeurs connues (0 ou 1) pour $z = 1, 2, 3, \dots, n$. On en déduisait la valeur des coefficients a_n par différence de deux sommes partielles successives.

La sixième question, par sa difficulté et sa longueur, représentait, en fin d'épreuve, un obstacle exceptionnel que le correcteur ne proposa que dans le double but de donner une conclusion naturelle à l'énoncé et de fournir aux futurs candidats quelques éléments de travail et de réflexion. De rares copies établirent correctement les lemmes proposés. Aucune ne dépassa ce stade. Mais la chose était prévue et ne causa par conséquent aucune déception.

Il convient enfin de mettre les candidats en garde contre un défaut trop souvent observé : l'escamotage d'une question à l'aide d'affirmations non justifiées mais nombreuses et très variées données dans l'espoir que le correcteur saura extraire le bon grain de l'ivraie et en créditera le candidat : de telles réponses ont été plus mal jugées que celles de candidats qui, ne trouvant pas de solution, se bornèrent à bien mettre en évidence les difficultés qu'ils n'avaient pas réussi à surmonter.

En conclusion, pour diriger convenablement leur préparation au concours, les candidats doivent se persuader qu'il ne leur est demandé aucune virtuosité de calculateur, ni aucune connaissance de théories spécialisées : il leur suffit seulement, à l'occasion d'exercices et de problèmes nombreux et variés, d'avoir réfléchi aux notions fondamentales de l'Analyse et de les avoir bien assimilées. Puisse ce pressant appel être entendu des candidats à venir.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

(Correcteur : M. J. COMBES)

Le problème, d'un genre très classique, était consacré à la théorie des liaisons unilatérales, dont quelques aspects se trouvaient mis en évidence dans l'étude d'un dispositif simple : bobine à bases inégales, mobile sur un plan incliné qu'elle touche en deux points, diverses hypothèses étant faites sur la nature des contacts. On ne demandait pas aux candidats une étude exhaustive : le texte précisait que les mouvements seraient d'abord étudiés comme si les liaisons étaient bilatérales, et qu'on n'examinerait le sort des liaisons que dans les cas explicitement indiqués.

Dans la première partie, les deux contacts étaient supposés sans frottement. Une première question, concernant le mouvement avec bicontact et le calcul des réactions.

correspondantes, a été dans l'ensemble correctement traitée, bien que déjà des erreurs graves apparaissent dans de trop nombreuses copies : erreurs dans l'emploi des trièdres mobiles (on confond les dérivées absolue et relative d'un vecteur), erreurs d'homogénéité... La deuxième question, concernant le sort des liaisons dans un mouvement commençant* où, *a priori*, toutes les hypothèses sont possibles, fournissait un exemple d'une difficulté que — le correcteur a été surpris de le constater — presque tous les candidats ignorent. Quand il y a deux contacts unilatéraux, I et I', ils ne persistent tous deux que tant que les réactions correspondantes ont toutes deux des sens convenables, ce qui se traduit ici par la condition : Z et Z' positifs, en désignant par Z et Z' les valeurs algébriques sur Oz des deux réactions. Lorsque cette condition n'est pas remplie, on est assuré que le mouvement avec bicontact ne se produit pas, mais il est faux d'affirmer par exemple que, si Z est négatif et Z' positif, le contact I est rompu, tandis que le contact I' persiste : le seul signe des réactions calculées dans le cas du bicontact ne permet pas de conclure, ce qui n'a rien de surprenant si l'on pense qu'il s'agit alors de réactions calculées dans un mouvement qui n'a pas lieu. Sans faire appel à la théorie de Delassus, il suffisait d'étudier successivement les conditions de possibilité d'un mouvement commençant avec rupture d'un contact, de l'autre, des deux. On constatait que la règle inexacte signalée ci-dessus conduit effectivement à des résultats faux lorsque l' est négatif.

Dans la deuxième partie, les deux contacts étaient supposés sans glissement. Le mouvement est alors cinématiquement déterminé : II' est axe instantané de rotation, le point où DD' perce le plan d'appui reste fixe. La position du système ne dépend que d'un paramètre, et le théorème de la force vive donne la loi du temps. Les réactions s'obtiennent par les théorèmes généraux ou la méthode du travail virtuel (avec, naturellement, une indétermination pour les composantes sur II', dont seule la somme est connue), et on en déduit les conditions nécessaires de persistance des contacts demandées par l'énoncé : l' positif et α assez petit. Pourquoi seulement conditions nécessaires ? C'est que, dès qu'intervient le frottement, on peut rencontrer des indéterminations, ainsi d'ailleurs que des impossibilités, et il restait donc une discussion, qui était reportée au IV. Cette deuxième partie a été plus ou moins bien traitée suivant les copies ; les calculs sont souvent très lourds et non dominés ; les conditions nécessaires demandées ont été rarement obtenues.

Comme la précédente, la partie III a été assez souvent abordée, mais peu de candidats arrivent à dégager les équations du mouvement. Le contact I est sans glissement, le contact I' sans frottement. Les quatre paramètres de position x, y, ψ, φ sont liés par deux relations exprimant le non-glissement ; on trouve aisément une intégrale première linéaire en φ' et ψ' ; comme quatrième équation on peut utiliser celle que fournit le théorème de la force vive, ou remarquer que ψ satisfait à une équation de type pendulaire, qui se réduit à $\psi'' = 0$ quand α est nul. Les composantes des réactions et les conditions nécessaires de persistance des contacts s'obtiennent comme au II. Pour ne pas allonger, on ne demandait aux candidats que de traiter l'analogue du cas II, a.

La partie IV n'a été abordée que dans deux copies. Il s'agissait d'étudier les conditions de possibilité des mouvements commençants des divers types, une partie de cette étude ayant d'ailleurs été faite au I, 2°. Le but était double. D'une part, on prouvait que les conditions nécessaires obtenues au II et au III, sont suffisantes : lorsqu'elles sont remplies, le mouvement avec bicontact est le seul possible, et se produit donc effectivement. D'autre part, on rencontrait sur un exemple très simple (bobine abandonnée immobile, avec pour les contacts les hypothèses du III) des impossibilités ou des indéterminations pour le mouvement commençant, lorsque les données et la position initiale étaient convenablement choisies. Au sujet de ces difficultés, que les candidats devaient seulement constater, on pourra se reporter à des articles de DELASSUS (*Nouvelles Annales*, 1920 et 1925-1926).

Enfin la partie V, indépendante des précédentes, a été traitée partiellement et, en général, avec peu de succès dans une trentaine de copies.

L'énoncé laissait aux candidats le choix des méthodes : théorèmes généraux ou méthode du travail virtuel, mise en équations spéciale pour chaque question ou établissement préalable des équations générales et particularisation au fur et à mesure suivant les liaisons imposées. Ce dernier point de vue a été adopté dans quelques copies, et notamment dans la meilleure, qui a obtenu la note 18. Son auteur a compris tout le problème, et, s'il n'a pas eu le temps de terminer toutes les discussions, il a traité correctement et exposé de manière élégante tout l'essentiel. Premier à l'écrit, il a conservé cette place dans le classement définitif. On trouve ensuite les notes : 15 (une fois), 12,5 (deux fois), 12 (deux fois), 11 (une fois), 10,5 (une fois), 10 (deux fois). Pour 178 copies soumises à correction, il y a 26 notes supérieures ou égales à 8, 54 supérieures ou égales à 6, 53 inférieures ou égales à 2. Ce dernier lot, trop nombreux et qui comporte neuf fois la note 0, est responsable d'une moyenne générale très basse voisine de 4,5. Tout en faisant la part de la fatigue lors de la dernière épreuve (comment expliquer autrement qu'un candidat à l'agrégation

écrive la surprenante inégalité : $\cos \alpha > \frac{fmg}{\sqrt{2}}$?), on doit constater que trop de can-

didats abordent le concours avec des souvenirs imprécis de leur cours de mécanique rationnelle ; un travail méthodique devrait leur permettre d'éviter les erreurs grossières et d'arriver dans une épreuve de sept heures à obtenir des résultats plus substantiels.

EPREUVES ORALES

Elles ont eu lieu au Lycée Saint-Louis. La liste d'admissibilité a été arrêtée le vendredi 22 juin au matin et publiée dans l'après-midi ; les candidats ont été répartis en deux séries ; l'appel de la première série a été fait au Lycée Saint-Louis, le mardi 26 juin à 17 heures, et celui de la seconde, le lundi 9 juillet à 17 heures. Les épreuves pratiques communes aux deux séries ont eu lieu le mardi 10 juillet.

Tous les candidats doivent être présents à Paris au moment de l'appel, pour participer au tirage au sort des leçons d'oral et de leur répartition dans le temps et au moment des épreuves pratiques ; il est donc impossible, et il restera impossible tant que les épreuves pratiques seront des épreuves de l'oral, de constituer plus de deux séries de candidats. Comme en 1956 la liste d'admissibilité était de 62 noms, chacune des séries se trouvait être de plus de 30 candidats, ce qui représente pour chacun d'eux quinze à dix-sept jours de présence à Paris, charge très lourde pour ceux qui n'habitent pas à proximité de Paris, ou n'y possèdent pas de parents pouvant les héberger. Nous souhaitons très vivement réduire cette charge dans la mesure du possible ; nous souhaitons aussi faciliter en même temps celle du jury. L'expérience des années précédentes nous avait montré que les délibérations du jury, pour être efficaces, devaient porter sur l'étude d'un petit nombre d'examens oraux, complètement terminés et terminés depuis peu de temps. Ces considérations diverses nous ont amenés à proposer au jury de modifier l'ordre des épreuves orales de manière à concilier, dans la mesure où cela était possible, le souci de réduire au minimum la durée effective pour chaque candidat de son séjour à Paris et d'alléger la tâche écrasante des membres du jury.

Les 62 admissibles ont été répartis en six groupes de douze candidats chacun en principe ; chacune des deux séries était donc composée de trois groupes. Les vingt-quatre leçons, qui constituent les épreuves totales proprement dites, des candidats d'un groupe ont été réparties sur quatre jours en assurant à chaque candidat un repos d'une journée entre les deux leçons. La journée suivant ces quatre jours d'oraux était consacrée à la discussion du jury et à la réception des candidats par son président.

Cette organisation a permis, d'une part, de réduire à sept jours la durée de la présence à Paris obligatoire pour un candidat ; une journée pour l'appel, une pour les épreuves pratiques, cinq pour les oraux proprement dits. Il n'a pas été possible bien entendu de faire en sorte que ces sept jours soient consécutifs, mais en groupant les épreuves orales, nous avons libéré ceux des candidats qui n'habitent pas à une trop grande distance de Paris de l'obligation d'un séjour prolongé à l'hôtel et de l'énervement de l'attente de la seconde leçon ; la plupart de ceux-ci ont pu rentrer chez eux entre le début ou la fin des épreuves orales de leur groupe et l'appel, ou les épreuves pratiques.

En outre, ce groupement des leçons d'oral a facilité la tâche du jury ; comparer et classer vingt-quatre leçons entendues dans les quatre journées précédentes est singulièrement plus aisé que d'en comparer ou classer soixante-deux après douze ou treize journées d'oraux ; la délibération finale a porté comme d'habitude sur l'ensemble des résultats obtenus et, en particulier, a bien obligé à classer les cent vingt-quatre leçons entendues par le jury, mais ce choix n'a exigé qu'une synthèse relativement aisée des comparaisons déjà faites.

Un exemplaire de la note dont on trouvera le texte dans le rapport sur l'agrégation 1954 (*Bulletin* n° 168, p. 118) a été remis à chaque candidat.

*
**

Le tirage au sort des leçons jumelées a eu lieu après l'appel des candidats de chaque série. Voici la liste des textes de leçons qui n'ont pas déjà été publiés dans le rapport de 1955.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

1. *Mathématiques Supérieures.*

1. Générations tangentielles d'une conique considérée comme enveloppe d'une famille de droites. Applications. Exemples.
2. Transformations par polaires réciproques par rapport à un cercle. Applications. (La théorie des pôles et polaires est supposée connue).
3. Condition pour que quatre points d'un plan soient sur un cercle. Applications.
4. Les sections planes du cône et du cylindre de révolution ayant été étudiées, étudier les cônes de révolution contenant une conique donnée. Applications.
5. Hyperbole définie par ses asymptotes et un point.
6. Polaire d'un point par rapport à un cercle. Droites conjuguées. Applications et exemples. (La transformation par polaires réciproques n'est pas demandée. L'étude des cercles et des faisceaux de cercles a déjà été faite).
7. Première leçon sur le déplacement plan défini comme transformation ponctuelle conservant l'égalité de deux figures. (L'étude de l'égalité de deux figures est supposée faite).
8. Section parabolique d'un cône de révolution. Cercles bitangents à la parabole.
9. Etude géométrique de la sphère. Plan tangent. Cônes et cylindres circonscrits.

2. *Mathématiques élémentaires.*

10. Géométrie : Une hyperbole est définie par le foyer F et le cercle directeur ayant pour centre le second foyer. Existence de la tangente en un point. Problèmes sur les tangentes.
(La construction par points, l'intersection avec une droite, ont déjà été exposées).
11. G. : L'inversion dans le plan et dans l'espace ayant été traitée, indiquer et traiter des applications.

12. G. : Ellipse et cercle déduits l'un de l'autre par affinité. Tracé dit de la bande de papier. Construction d'une ellipse définie par deux diamètres conjugués.
13. G. : Coniques définies comme lieu des centres passant par un point et tangents à une droite ou à un cercle. Problèmes sur les tangentes et théorèmes de Poncelet.
14. G. : Exemples de détermination de coniques par la donnée d'éléments réels tels que points, tangentes, foyers, directrices.
15. G. : Axe radical de deux cercles. Etude des faisceaux linéaires de cercles. Exercices.
16. G. : Division harmonique de points et faisceaux harmoniques de droites. Polaire d'un point par rapport à deux droites. Applications.
17. Géométrie et géométrie cotée : Projection orthogonale d'un cercle sur un plan (Etude géométrique). Application à la représentation d'un cercle en géométrie cotée et à la détermination d'une tangente au cercle.
18. Analyse : Notion de fonction primitive. Utilisation pour le calcul de certaines aires. On admettra la notion d'aire et le théorème concernant une fonction dont la dérivée est constamment nulle. Le candidat a la possibilité d'étendre la théorie au calcul d'un volume simple.
19. Algèbre : Traiter quelques exemples d'inéquations irrationnelles.
20. A. : Exemples numériques simples sans aucune théorie générale d'équations qui se ramènent à des équations du premier ou du second degré.
21. A. : Première leçon sur les nombres positifs et négatifs. (La notion de nombre positif est supposée acquise).
22. Trigonométrie : Donner un ou deux exemples de résolution d'un triangle dans un cas non classique. (Le cas douteux est considéré comme classique).
23. Arithmétique : Diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres. P.G.C.D. Propriétés. Ex. de calcul du P.G.C.D. Nombres premiers entre eux. (La théorie des nombres premiers sera faite ultérieurement).
24. Arithmétique : Définition et extraction de la racine carrée arithmétique d'un nombre donné à une unité près.
25. Arithmétique : Notion de fraction. Egalité de deux fractions. Inégalités. Multiplication et division.
26. Cinématique : Vitesse et accélération d'un mobile animé d'un mouvement curviligne. Détermination du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans le cas où la position du mobile est définie par ses coordonnées. Exemples. (L'étude complète des mouvements uniformément variés, circulaire et vibratoire simple n'est pas au programme de cette leçon).
27. Géométrie descriptive : Droites et plans perpendiculaires. Applications.

3. Sciences expérimentales.

28. Dérivées d'un produit, d'un quotient, d'une puissance et d'une racine carrée. Dérivées successives de $(1+x)^n$ (n entier). Application à la formule du binôme.
29. Fonction $y = \sqrt[n]{x}$. Logarithme de y^p . Exercices.

4. Première C. et M.

30. Traiter un ou deux exemples de problèmes dont la résolution conduit à un système de deux équations du premier degré ou à une équation du second degré.
31. Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. Etudier s'il existe des valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$, le signe de $f(x)$, le sens de variation de $f(x)$.
32. Somme géométrique de deux vecteurs. Projection sur un axe de la somme géométrique. Formules donnant le cos. et le sin. de la somme de deux arcs en fonction du cos. et du sin. de ces arcs.

- 33. Projection orthogonale sur un plan d'un point, d'une droite, d'un segment. Condition pour qu'un angle droit se projette suivant un angle droit ; application.
- 34. Surface conique à directrice circulaire. Définition. Section par un plan parallèle au plan de la directrice. Plans tangents. Exercices.

5. *Seconde C. et M.*

- 35. Géométrie : Somme et différence des carrés des distances d'un point à deux points fixes. Applications à des problèmes de lieux géométriques.
- 36. G. : Traiter par une méthode d'analyse et de synthèse un exemple classique du programme et un exemple non classique de problème de lieu géométrique.
- 37. G. : Position relative de deux cercles.
- 38. Algèbre et analyse : Etude de la fonction linéaire. Représentation graphique. Association à une droite d'une fonction linéaire. Coefficient angulaire. Pente.
- 39. A. : Résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

- 1. Première leçon sur les nombres complexes.
- 2. Division de deux polynômes ordonnés suivant les puissances décroissantes. P.G.C.D. de deux polynômes.
- 3. Formule des accroissements finis. Formule de Taylor. Applications.
- 4. Fonction x^α , α quelconque, réel. Fonction u^v , u et v étant deux fonctions de x . Exemples.
- 5. Développement limité d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux fonctions. Développement limité d'une fonction de fonction. Exemples et applications.
- 6. Application des développements limités à l'étude des branches infinies de courbes d'équation $y = f(x)$ et des courbes planes définies paramétriquement.
- 7. L'étude des formes indéterminées étant achevée, traiter sous forme de révision un certain nombre d'exemples.
- 8. Formes indéterminées. Etude générale. Ex. d'applications. (La leçon : étude des diverses formes indéterminées obtenues par produit ou quotient des fonctions e^{kx} , x^α , $\log x$, est connue).
- 9. Décomposition d'une fraction rationnelle à coefficients réels en éléments simples de la forme $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$. Exemples et usages.
- 10. La théorie générale de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples de première espèce est supposée faite ; donner des exemples de telles décompositions et des applications montrant leurs usages.
- 11. Multiplication de deux séries absolument convergentes. Produit de deux séries entières. Exemples.
- 12. Changement de variable dans une intégrale définie ou indéfinie. Etude théorique. Exemples.
- 13. Intégrations de fractions rationnelles de x et y , quand $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ou $y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, a, b, c, d étant des nombres. Exemples.
- 14. Equations différentielles du 2^e ordre linéaires et à coefficients constants. La théorie de l'équation sans second membre étant supposée connue, donner des exemples d'équations avec second membre.
- 15. Dérivée d'une fonction composée. Formule des accroissements finis. Formule de Taylor pour une fonction de plusieurs variables.
- 16. Etude de l'enveloppe de la droite d'équation $x \cos u + y \sin u = f(u)$. Déve-

loppée, courbure. Exemples. (La théorie générale des enveloppes et de la courbure a été faite. On pourra donner des exemples comportant le tracé d'hypocycloïdes ou d'épicycloïdes, mais l'étude générale de ces courbes n'est pas demandée).

17. Enveloppe définie paramétriquement d'une droite dont l'équation dépend d'un seul paramètre. Point caractéristique. Exemples.
18. Etude au voisinage d'un point à distance finie et branches infinies d'une courbe plane définie paramétriquement.
19. Courbes gauches ; normales ; normale principale. Courbure d'une courbe gauche.
20. Etude des surfaces de révolution. (Géométrie analytique).
21. Système de vecteurs glissants. Moment résultant. Axe central. (La théorie du moment d'un vecteur par rapport à un point est supposée connue).
22. Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace. Moment d'un vecteur par rapport à un point. Applications.
23. La statique des systèmes ayant été enseignée, donner quelques exemples de l'équilibre de corps solides ou d'assemblages de solides.
24. Première leçon sur le paraboloïde hyperbolique. (L'étude analytique de cette surface est supposée faite).

*
**

On pouvait craindre, en portant le nombre des admissibles de 48 à 62, que l'amélioration des moyennes des notes des leçons d'oral, amélioration déjà sensible en 1955, ne se maintienne pas. Il n'en a rien été ; la moyenne des notes obtenues par les admissibles pour les leçons d'Elémentaires est de 11,5 comme en 1955, et celle des leçons de Spéciales de 10 au lieu de 9,5. (Moyennes des leçons de candidats reçus agrégés : 12,8 et 8,4). Comme, d'autre part, le jury n'a pas, comme en 1955, entendu de leçons particulièrement remarquables et qu'aucune note n'a été supérieure à 17,5, il s'agit d'une amélioration de toutes les leçons et le mérite en revient à la qualité des préparations déjà signalées dans le rapport de l'année dernière.

C'est en Spéciales seulement que quelques défaillances spectaculaires ont eu lieu ; un candidat a renoncé à exposer la leçon (11) : multiplication de séries absolument convergentes ; un autre a courageusement reconstitué, avec plus d'imagination que de bonheur, la leçon sur le mouvement elliptique des planètes, aboutissant en définitive à une trajectoire définie par le système

$$r = \frac{\mu}{a^2} + b \sin \varphi \quad \theta - \theta = A \left| \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right|$$

qu'il affirme être une conique de foyer O (dans le système de coordonnées polaires r, θ). Deux autres leçons sont très mauvaises. On peut donc dire, *grosso modo*, que sur les 124 sujets de leçons proposés, quatre seulement étaient totalement, ou à peu près, ignorés des candidats ; les autres ont été traités diversement, les notes s'échelonnent de 3 (une fois), à 17,5.

Il nous paraît donc équitable de ne pas trop insister sur les défauts des leçons entendues, tout au moins sur les défauts de toutes les leçons entendues, et de chercher plutôt à dégager des 124 comptes rendus du dossier de l'agrégation 1957, quelles difficultés éprouvent les candidats à satisfaire aux exigences du jury, comment ils les surmontent et quelles précautions ils pourraient prendre pour y réussir plus pleinement.

L'Agrégation étant un des concours de recrutement de l'Enseignement du Second Degré, destiné à lui fournir des professeurs capables d'enseigner au minimum en Mathématiques Elémentaires, et éventuellement dans les classes préparatoires aux Grandes Ecoles, les épreuves de ce concours ont pour but de mettre en lumière les connaissances des candidats et, surtout, leurs qualités pédagogiques. Ces dernières

sont révélées particulièrement par les épreuves orales. On a donc choisi ces épreuves : leçons d'agrégation, aussi semblables que possible à l'exercice quasi-quotidien du professeur : la préparation d'une classe. Le candidat, comme tout professeur, est donc invité à préparer, sur un sujet et pour une classe qui lui sont indiqués, une leçon d'une durée maximum de 45 minutes, leçon destinée à des élèves représentés par un jury muet ; il dispose d'un temps suffisant, et même largement calculé, pour cette préparation ; il peut, comme un professeur le ferait, limiter le sujet proposé s'il le trouve trop vaste ; il a sur le professeur l'avantage de n'avoir pas à insérer sa leçon dans l'enseignement réparti sur une année scolaire et il est libéré des soucis que peut causer dans les classes l'emploi d'un livre.

Il est presque banal, à force de le répéter, de dire qu'enseigner, c'est essentiellement choisir. Dans le cas présent, choisir d'abord ce qui doit être enseigné, car on ne peut pas *tout* enseigner ; donc décider ce qui fera partie de l'enseignement magistral, puis, ce qui, ne l'étant pas, sera réservé pour une étude dirigée sous forme d'exercices. Ce premier tri effectué, il faut choisir de nouveau, parmi les vérités à enseigner, les plus importantes, car il serait vain de croire que tout ce qui est enseigné sera retenu ; l'élève est, en général, incapable de choisir entre l'essentiel et l'accessoire ; il appartient au professeur de lui faciliter cet indispensable choix. C'est pourquoi une leçon débitée sur un ton monotone ou une leçon sans conclusions fermes et précises a peu de chances d'être jugée efficace et par conséquent bien notée. Il en est de même pour les leçons-marathons que le refus de choisir transforme en une décevante course contre la montre.

Ces choix, bien entendu, ne sont pas faciles et nous constatons sans surprise qu'ils n'ont pas, au cours des oraux de 1956, toujours été excellents, mais ce qui est rassurant, c'est que la presque totalité des concurrents a fait un choix ; très nombreuses sont les leçons, équilibrées dans le temps, dont le plan est clair et l'ordonnance logique. On leur doit, pour une part, l'amélioration déjà signalée des notes d'oral.

Le plan étant fixé, le candidat expose sa leçon devant les membres du jury ; il est naturellement tout à fait libre de choisir la forme et le mode d'exposition qui lui conviennent. Nous avons entendu, cette année encore, deux leçons à tendances axiomatiques dont nous parlerons tout à l'heure ; bien que les exposés dogmatiques aient encore des partisans, particulièrement lorsqu'il s'agit de leçons de Spéciales, les candidats choisissent en général les méthodes d'exposition dites actives, recommandées par les Instructions de 1938. Signalons-leur que s'il est légitime de ne pas énoncer à l'avance le résultat que l'on désire démontrer, il ne l'est cependant pas du tout de laisser ignorer totalement ce que l'on cherche. L'auditeur moyen a besoin d'un fil conducteur et il est aussi indispensable de préciser clairement les hypothèses et l'objet de la recherche que la méthode que l'on entend suivre pour la mener à son terme ; il est indispensable également de faire à la fin le bilan exact et précis des résultats obtenus.

Pour illustrer ces considérations générales, nous choisirons un exemple emprunté à des exposés relatifs aux transformations. On démontrait autrefois une réciproque qui s'énonçait ainsi :

(I) Etant donnés deux points *fixes* A, A' , et deux points mobiles M et M' , tels que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$ ($k \neq 1$), la transformation ponctuelle dans laquelle M' est le transformé de M est une homothétie fixe, c'est-à-dire définie par les données A, A', k .

On lui substitue quelquefois, avec le souci de se placer dans des conditions plus générales, le suivant :

(II) La transformation qui fait correspondre à un couple de points quelconques A, B un couple A', B' , tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \neq 1$) est une homothétie.

Le raisonnement qui justifie cette proposition (II) n'est pas simple pour des

débutants. Si l'on suppose A et A' fixes, B et B' mobiles, on démontre, comme dans (I), que B' est l'homologue de B dans une homothétie fixe, mais comme A et A' sont quelconques, il y a autant d'homothéties que de couples A, A' et il faut, en plus, démontrer que toutes ces homothéties sont identiques.

Enfin, dans certains cas, on énonce la propriété (II) en ajoutant A, B, points quelconques d'une figure (F) quelconque. Si, par malheur, et ce malheur, hélas ! est arrivé à certains auteurs d'ouvrages, on oublie le second quelconque, la proposition énoncée n'est pas exacte. La transformation

$$\begin{aligned}x' &= kx + x^2 + y^2 - a^2, \\y' &= ky + x^2 + y^2 - a^2,\end{aligned}$$

n'est pas une homothétie et elle fait correspondre à tout couple de points A, B du cercle (F) d'équation $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ un couple A', B' tel que $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Les élèves moyens se perdent dans ces subtilités ; ceci prouve qu'il n'est pas utile de tout enseigner et que le choix est indispensable. La proposition (I), nette, précise, à sa place dans un cours magistral, et la proposition (II) est, à la rigueur, valable comme exercice, parce que lorsque l'élève apprend son cours, il est seul en face de ses notes et que, lorsqu'il traite un exercice, il a un mentor pour lui éviter les faux pas. La recherche de la généralité la plus grande, celle de la rigueur totale, sont certes des conditions de progrès dans la découverte ; elles peuvent, en pédagogie, décourager plus qu'elles n'instruisent.

LEÇONS D'ÉLÉMENTAIRES

La leçon n° 25 : *Math. élém. : notion de fraction, égalité, inégalité, multiplication, division*, a fait l'objet d'un des deux exposés axiomatiques entendus au cours de cette session. Le candidat a adopté le plan de l'énoncé qui écartait le problème de l'addition. Il a eu l'estimable souci pédagogique de rappeler aux élèves qu'une étude des fractions, comme fractions de grandeurs, avait déjà été faite dans les classes antérieures. Il s'est borné à en souligner les faiblesses pour conclure à la nécessité d'une nouvelle étude « plus rigoureuse ». Il est regrettable que le candidat n'ait pas attaché plus d'importance à ce préambule d'ailleurs excellent ; il aurait suffi qu'il précisât ce qu'il voulait dire avec plus de netteté pour énoncer le plan d'une leçon très différente de celle qu'il s'est résigné à faire et qui aurait pu être meilleure.

Les élèves auxquels il est censé s'adresser n'ont sans doute pas très clairement réalisé encore qu'un nombre fractionnaire est un ensemble de deux nombres naturels ordonnés, mais ils connaissent, sous des dénominations, il est vrai plus modestes, les relations d'ordre et les lois de composition interne de ces nombres. Il est excellent de leur faire observer que ces relations et ces lois ont été fixées intuitivement par interprétation de phénomènes concrets, et l'objet de la leçon pouvait être de montrer que ces relations et ces lois découvertes intuitivement, étant acceptées, le système de nombres ainsi défini jouit d'un certain nombre de propriétés, et en particulier que son usage n'entraînera pas de contradictions. Autrement dit, elle pouvait être une prudente initiation, faite sans exagération de rigueur et de dogmatisme, dans une langue simple, à la notion de structure de corps qui permettra des généralisations fructueuses et dont les débutants n'ont encore aucune idée.

Ce n'est pas tout à fait cette leçon que nous avons entendue et c'est dommage. Suivant une coutume contestable, le candidat, après ce préambule intelligent, adopte la méthode dogmatique ; il semble, à l'entendre, que les relations d'ordre, les lois de composition interne, aient été fixées de toute éternité ou choisies au hasard ; il n'est pas fait la moindre allusion à la nécessité (au moins pratique) d'opérer ce choix de

manière à permettre de définir $\frac{a}{1}$, définition d'ailleurs qui arrive au moment où nous ne l'espérons plus.

La leçon n° 21 : *Math. élém. : Première leçon sur les nombres positifs et négatifs* a été traitée, elle aussi, axiomatiquement, mais cette fois sans aucun souci de donner aux élèves un fil conducteur. La volonté d'hermétisme du candidat semble délibérée ; il sait où il va, le jury également, mais aucun élève de Mathématiques ne découvrirait sans aide où on le mène. La relation d'équivalence des nombres (a, b) (a', b') n'a pas été choisie au hasard ; elle l'a été de manière à permettre d'identifier le nombre (a, b) , dans le cas où $a > b$, avec le nombre $a - b$. La règle des signes, admise sans aucune explication, résulte elle aussi du souci d'avoir une loi de composition interne, celle du produit, valable dans le cas $a > b, a' > b'$

$$(a - b) (a' - b') = [(aa' + bb') - (ab' + ba')].$$

Ces explications ne sont sans doute pas nécessaires, mais elles sont utiles dans la mesure où l'on espère accrocher l'attention d'un auditoire. La première a en définitive été donnée, *in extremis*, dans les cinq dernières minutes, sous la forme suivante : la classe d'équivalence $(a + p, a)$ est, par définition, le nombre positif p . A ce moment, il y a de fortes chances pour qu'aucun élève ne soit encore en état d'en tirer profit. La seconde a été passée sous silence.

Notons, entre autres fautes de détail, que si l'on définit arbitrairement les classes d'équivalence positives, il est indispensable de vérifier que $A - 0$ est positif.

La leçon : *Math. élém. : Fonction $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, a, b, c ayant des valeurs numériques données*, est l'occasion d'une faute classique souvent signalée. Lorsque le trinôme a des racines α, β , la courbe représentative coupe l'axe des x en A et B ; la tangente en ces points est parallèle à Oy ; on en donne la raison suivante : le coefficient angulaire y' de la tangente en un point M distinct de A et de B, augmente indéfiniment lorsque M tend vers A, donc la tangente en A est parallèle à Oy. Cette affirmation est exacte, mais la propriété qu'elle utilise n'a pas été démontrée.

Leçon 6 : *Polaire d'un point par rapport à un cercle*. L'étude géométrique classique se fait en substituant à la définition de la conjugaison de deux points M et M' par rapport à un cercle (O), $(M, M', A, B) = -1$, la définition : cercle de diamètre MM' orthogonal à (O).

La substitution d'une propriété métrique à une propriété projective a, parmi d'autres inconvénients, celui d'interdire l'extension aux coniques, perspectives d'un cercle, de la définition et des propriétés des pôles et polaires par rapport à un cercle. Cependant, une des propriétés démontrées au cours de l'étude précédente, et une seule, est une propriété projective (construction de la polaire au moyen de la règle seule) ; elle a donc une incontestable importance puisqu'elle peut servir de point de départ à une théorie projective de la notion de polaire d'un point par rapport à un cercle, et un choix judicieux devrait conduire à lui faire dans l'exposé une place moins modeste que celle qui lui est en général réservée.

A propos de la leçon *Math. élém. : Etude des trièdres*, signalons qu'il est souhaitable d'établir la distinction entre trièdre *direct* et trièdre *positif*. L'opinion généralement admise et d'ailleurs sanctionnée dans la Norme X 02.102 parue en avril 1948 (Afnor) est la suivante :

« Un trièdre est dit *direct* s'il est tel qu'un observateur placé le long de Oz, les pieds en O, la tête sur Oz, regardant dans la direction de Ox, ait Oy à sa gauche. Si le trièdre est de sens opposé, il est dit : *inverse*.

« Un trièdre est dit *positif* s'il est de même sens que le trièdre de référence. »

Ainsi un trièdre direct est positif ou négatif selon qu'il est, ou qu'il n'est pas, de même sens que le trièdre de référence.

Signalons également, à propos de la leçon 12, une construction de l'ellipse définie par deux diamètres conjugués OA, OB, utilisée par les dessinateurs. Soit H la projection orthogonale de B sur OA et M un des points de BH défini par HM=OA. Soit $x'x$ la droite OA, $y'y$ la droite OM ; marquons sur une bande de papier trois

points h, b, m , tels que les figures hbm et HBM soient égales ; si m décrit $y'y$ et h $x'x$, le point b décrit l'ellipse cherchée. Cette construction, beaucoup plus précise dans la pratique que la construction classique, paraît beaucoup moins connue.

La leçon : *Rotation dans l'espace définie comme transformation ponctuelle. Symétrie par rapport à une droite : demi-tour ou transposition. Produit de deux transpositions*, est l'exemple type d'une leçon qui nécessite un choix. Le candidat qui l'a traitée a donné une définition (fausse d'ailleurs) du déplacement, puis celle, élémentaire, de la rotation transformation ponctuelle T , vérifié que T est un déplacement, examiné la réciproque, étudié les produits de transpositions avec leurs réciproques et naturellement a manqué du temps nécessaire pour exposer correctement ces aspects divers du problème. Il était cependant tout à fait libre de limiter son étude à la transformation ponctuelle T dans le cas général et celui de la transposition, en réservant pour une séance ultérieure l'étude de la même transformation considérée comme un déplacement.

La leçon de statique : *Equilibre d'un point matériel pouvant glisser sans frottement ou avec frottement sur une droite, un cercle, un plan ou une sphère*, aurait beaucoup gagné à être plus sobrement et plus correctement présentée. Nous ne saurions trop mettre en garde les candidats contre les considérations générales dans lesquelles se complaisent certains d'entre eux ; l'essentiel s'y mêle généralement à l'accessoire, le vrai au faux ; elles lassent l'attention avant même que le problème soit posé. Dans le cas présent elles sont responsables de la confusion qui a marqué cette leçon.

Rappelons aussi que les problèmes apparemment les plus simples doivent être traités soigneusement ; il est maladroit d'étudier l'équilibre d'un point sur une figure qui ne correspond manifestement pas à un équilibre, de démontrer par de pesants calculs des résultats évidents géométriquement. Faut-il rappeler aussi que la résultante d'un poids et d'une attraction exercée par un centre fixe proportionnellement à la distance, est une attraction du même type.

LEÇONS DE SPÉCIALES

Les programmes des classes de Mathématiques Supérieures et de Spéciales ont été modifiés à la rentrée d'octobre 1956 ; il en est résulté une modification du programme de l'agrégation pour 1957. On trouve le texte de ce programme dans le *B.O.E.N.* (Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale), n° 33, du 27-9-56, page 2415.

Le théorème sur la continuité uniforme, admis sans démonstration dans les cours de Spéciales, est démontré dans les cours de licence ; il ne retient pas suffisamment l'attention des candidats. Dans les exposés classiques des leçons : définition de l'intégrale définie (par les sommes s et S de Darboux), ou définition de la longueur d'un arc de courbe, l'hypothèse de la continuité uniforme de la ou des fonctions utilisées intervient, soit pour démontrer l'existence de sommes s et S dont la différence est inférieure à un nombre donné ϵ , soit, dans le cas de l'arc de courbe, pour démontrer l'existence d'une ligne brisée, régulièrement inscrite, dont la longueur s diffère d'un nombre fixe ϵ de moins de ϵ . Deux candidats ont traité la leçon : définition de l'intégrale définie ; c'est évidemment celle où l'application du théorème de la continuité uniforme est la plus aisée ; cependant, l'un des candidats, pourtant bien classé à l'écrit, a cru pouvoir, en substituant des suites croissantes à la notion d'ensembles (s) et (S) adjacents, démontrer l'existence de l'intégrale sans évoquer la continuité uniforme ; il n'y a réussi qu'en commettant une erreur ; l'intention, cependant, nous le verrons tout à l'heure, n'était pas mauvaise.

Le second candidat a parlé de la continuité uniforme, mais de la définition qu'il en a donnée et des commentaires qui l'accompagnaient, il ne résulte pas clairement qu'il existe une partition du segment (a, b) , dans lequel $f(x)$ est définie et continue, en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels l'oscillation de cette

fonction est inférieure à ε donné. Deux candidats ont traité la leçon : définition de l'arc de courbe ; l'un d'eux ignorait manifestement la continuité uniforme, le second au contraire la connaissait et même la connaissait fort bien. Il s'est cependant borné à indiquer que le fait que les fonctions $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ et $\sqrt{x}$ étaient uniformément continues, entraînaient qu'une certaine inégalité était vérifiée, sans en donner de démonstration.

Un premier point paraît donc établi ; les candidats auraient intérêt à examiner d'un peu plus près les diverses propriétés des fonctions continues et, en particulier, la continuité uniforme. Nous voudrions présenter, à propos des deux leçons précédentes, une observation d'un ordre un peu différent. Il nous faut, pour le faire, préciser les notations.

Le premier problème : définition de l'intégrale définie d'une fonction $f(x)$, définie, continue, sur le segment (a, b) , conduit à l'étude d'un ensemble de nombres s définis à partir de partitions P de l'intervalle (a, b) . Ce sont les sommes s de Darboux ; un candidat les dénomme $s(P)$; c'est une bonne notation. Le second : définition d'un arc de courbe est l'étude d'un être un peu plus complexe, l'arc de courbe, défini par trois fonctions x, y, z , d'une variable t , définies, continues sur un segment (t_1, t_2) ; nous passons sur les hypothèses supplémentaires nécessitées par la démonstration. On est conduit, ici encore, à associer à toute partition P du segment (t_1, t_2) un nombre $s(P)$ qui est la longueur d'une ligne brisée, régulièrement inscrite dans l'arc de courbe A, B . Pour la commodité de la rédaction, nous confondrons dans le langage segment (a, b) , segment (t_1, t_2) et la notation AB (arc AB ou segment AB).

L'analogie entre les deux problèmes n'est, ni accidentelle, ni superficielle : les deux ensembles $s(P)$ ont des propriétés communes :

1° ils sont bornés supérieurement. [Nous avons déjà publié dans le *Bulletin* de l'Association des Professeurs de Mathématiques de mars 1954 (n° 161) une démonstration élémentaire du fait que cet ensemble (dans le cas de l'arc de courbe) est borné]. Ils ont donc l'un et l'autre une borne supérieure $[A, B]$;

2° le nombre $s(P)$ augmente (au sens large) si l'on ajoute aux nombres déterminant la partition P un nombre supplémentaire.

Or, ces deux propriétés entraînent l'égalité $[A, C] + [C, B] = [A, B]$, C correspondant à un nombre, soit du segment (a, b) , soit du segment (t_1, t_2) . Il en résulte que la fonction $[A, M]$ est définie pour toute valeur x , à laquelle correspond la notation M , des segments précédents ; c'est cette fonction qui est, suivant le cas, l'intégrale définie, ou la longueur de l'arc.

L'élégante et simple définition de l'intégrale définie par les deux ensembles adjacents de Darboux fait jouer à l'ensemble $S(P)$ un rôle trop important ; le candidat dont nous avons signalé plus haut la tentative qui consistait en gros à extraire de $s(P)$ une suite croissante bornée semble bien en avoir eu conscience, car le procédé permettrait une extension à la définition de la longueur d'un arc. Il semble bien cependant que la définition d'un nombre comme borne supérieure d'un ensemble (ou inférieure) est en général plus maniable que la définition par une suite ; par contre, la définition par une suite facilite l'étude des règles de composition. Ces considérations justifient une fois encore la nécessité d'un choix.

La leçon sur les séries à termes positifs a été fort mal traitée et mérite une mention particulière. Les faits capitaux à mettre en lumière sont les suivants : une série à termes positifs U_p converge si, et seulement si, les sommes partielles S_n sont bornées ; elle diverge si, et seulement si, $\lim S_n = +\infty$. On en déduit les consé-

quences immédiates : supposons qu'on ait $0 \leq U_p \leq V_p$, quel que soit p : la convergence de la série (V_p) entraîne celle de la série (U_p) ; la divergence de (U_p) entraîne celle de (V_p) . Le reste n'est que mise en application de cette idée capitale de comparaison : règle de Cauchy, et, éventuellement de d'Alembert, pour comparer une série

à une série géométrique ; recherche d'un ordre d'infinitude par rapport à $\frac{1}{n}$ pour comparer une série à une série de Riemann, ce dernier critère étant, par la nature même des séries de Riemann, « lentement » convergentes, ou « lentement » divergentes, bien plus puissant que les précédents. Naturellement les deux premiers critères sont mieux adaptés aux séries comparables aux séries géométriques, tandis que le troisième convient mieux aux séries proches de celles de Riemann.

Le candidat, après avoir énoncé correctement les divers critères classiques, mais sans en avoir probablement bien compris l'origine, les utilisa à contre-temps d'une manière si constante qu'on aurait pu la croire systématique, constituant ainsi une collection inégalable de séries « maltraitées ».

Bien qu'il ait énoncé que $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ était une condition nécessaire de convergence, le candidat éprouva le besoin d'utiliser la règle de Cauchy pour prouver la divergence des séries de terme général $(3 + \cos n\pi)^n$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et se contenta de remarquer que cette même règle ne permettait pas de conclure pour la série de terme $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. De même, l'étude de la série de terme $n!$ nécessita l'emploi de la règle de d'Alembert. La série de terme $\frac{1}{n^2} (1 - \frac{1}{n} \sin n\pi)$ (*sic*) résista aux assauts du critère de Cauchy, tandis que la série de terme e^{-n} se laissait heureusement traiter par une variante de la règle de Riemann, ainsi que par la comparaison avec une intégrale impropre ! Quels déplorable exemples pour un auditoire non averti, et quelle preuve de manque de bon sens de la part du candidat !

La difficulté de la leçon de statique (23) : *Exemples d'équilibres de corps solides ou d'assemblages de solides*, se trouve dans le choix des exemples, qui doivent être à la fois assez simples et probants. Un premier exemple a conduit à des calculs très laborieux et occupé la plus grande partie des 45 minutes allouées. Un deuxième proposait d'étudier l'équilibre d'un carré pesant articulé, formé de quatre tiges identiques, dont l'une est maintenue horizontale et fixe. Il a été maladroitement abordé, et la disproportion entre les efforts déployés et la simplicité du résultat aurait certainement déconcerté les élèves.

Il n'a pas été tenu compte des remarques faites dans le précédent rapport par l'auteur de la leçon : *Travail d'une force, théorème de la force vive pour un point matériel, applications*. Il ne s'agit pas, dans cette leçon, de faire — et de faire mal — la théorie de l'intégrale curviligne. On peut définir le travail, d'une manière classique, comme limite de $\sum \vec{F}_i \cdot \vec{M}_i M_{i+1}$ (avec les notations usuelles). On évite toute difficulté en adoptant directement comme définition $\int \vec{F} \cdot d\vec{M}$. Cette dernière définition n'est pas moins naturelle que l'autre, elle généralise bien la définition élémentaire correspondant au cas d'une force constante dont le point d'application décrit un segment de droite.

Quant au théorème de la force vive, il est dangereux de l'énoncer sans préciser qu'on doit tenir compte du travail de toutes les forces appliquées au point, y compris les forces de liaison, et il est inadmissible de l'appliquer à des problèmes de mouvement de point gêné sans faire la moindre allusion aux réactions : même si elles ne travaillent pas, il est bon de le dire et d'expliquer pourquoi.

ÉPREUVES PRATIQUES

Elles ont eu lieu au Lycée Saint-Louis le mardi 10 juillet, de 8 à 12 (Épure), de 16 à 18 h. 30 (Calcul). Pour l'épreuve de calcul numérique, une table de Barlow a été mise à la disposition de chaque concurrent.

COMPOSITION D'ÉPURE : Sujet. — *Les coordonnées, exprimées en centimètres, sont repérées par rapport à un trièdre trirectangle direct. L'origine O est au centre de la feuille, la ligne de terre Y'OY est placée sur le grand axe de la feuille, l'axe OZ étant vertical ascendant.*

On donne les points A (0, 0, 8) ; B (5, 0, 8) ; C (0, 5, 8) ; E (5, 0, 13) et on désigne par (S) la sphère de centre C, tangente en A à OZ ; par (H) l'hyperboloïde engendré par la rotation de la droite Z'OZ autour de la droite CE ; enfin par (Σ) le cône engendré par les horizontales tangentes à (S) et rencontrant l'axe Z'OZ.

1° Montrer, si possible géométriquement, que les génératrices de (Σ) sont tangentes à un cône de révolution de sommet B que l'on déterminera. En déduire la détermination des sections de (Σ) par des plans de bout contenant la droite AB.

2° Déterminer les génératrices de (H) parallèles aux axes de coordonnées.

3° Construire l'intersection des surfaces (H) et (Σ). Point courant, tangente, asymptotes, points et tangentes remarquables.

Représenter la portion de surface (Σ) extérieure à (H), l'intérieur de (H) étant la région qui contient son centre.

RAPPORT DE M. THÉRON, correcteur. — Les deux questions 1° et 2° étaient destinées à aider les candidats à trouver une méthode simple de construction de l'intersection de (H) et (Σ).

L'étude géométrique du 1° a extraordinairement gêné et retardé la plupart des candidats.

Soit I un point de l'axe OZ et Δ une génératrice de (Σ) passant par I, qui touche (S) en T, il suffit de montrer que le plan B, Δ fait un angle constant avec OZ. Abaissons BH perpendiculaire à Δ et faisons l'épure, on voit aussitôt sur la projection horizontale que les triangles bih et ict sont égaux, donc $bh = it$. Mais le segment horizontal IT se projette en vraie grandeur : $it = IT$; de plus, on voit dans l'espace que les deux segments de tangentes à (S), issues de I, sont égaux : $IT = IA$. En définitive $bh = IA$, ce qui montre que le plan B, Δ fait un angle de 45° avec OZ.

(Une nouvelle épure où figure le cône de sommet B, et une ligne de calcul montrent que la section de (Σ) par un plan de bout contenant AB, se projette horizontalement selon un cercle de centre a.)

On déduit de ce résultat la détermination du plan tangent à (Σ) en un de ses points M, puisqu'on connaît par ses projections une courbe de (Σ) passant par M : la section de (Σ) par le plan de bout MAB.

La réponse à la question 2° est immédiate en remarquant que (H) est engendré par la rotation de l'arête d'un cube autour d'une diagonale de ce cube ne la rencontrant pas. Plus de la moitié des candidats n'a pu formuler nettement cette remarque.

On est ainsi conduit à construire l'intersection par points de (H) et (Σ) en coupant par un plan de bout variable passant par AB. La tangente au point courant se trouve sans difficulté et il apparaît d'assez nombreux éléments remarquables.

Quinze épreuves environ comportent un dessin des projections de l'intersection qui a quelque rapport avec la réalité ; la détermination de la tangente au point courant est rare, celle des asymptotes l'est encore beaucoup plus, seuls les meilleurs concurrents (l'un noté 18 et trois autres notés 17) ont représenté la surface demandée. La moitié des épreuves environ se réduisent au dessin de quelques cercles et de droites plus ou moins artistiquement disposés, mais ressemblant davantage à un dessin futuriste qu'à une épure.

Comme les années précédentes, le rapporteur termine en assurant les candidats

qu'une préparation modeste, mais régulière, dans le cours de l'année leur ferait gagner presque à coup sûr un nombre appréciable de points. Voici deux preuves de l'importance que peuvent avoir ces points : le candidat qui a obtenu la meilleure note, 18, doit son succès à cette note, s'il avait obtenu 12, il aurait échoué ; le premier candidat non reçu l'aurait été s'il avait obtenu la note 7 à son épreuve.

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE : Sujet. — On pose

$$(1) \quad A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}, \quad p \text{ entier positif ou nul.}$$

1° En ignorant systématiquement l'expression de A à l'aide du nombre π , encadrer A par deux nombres dont la différence soit inférieure à $5 \cdot 10^{-9}$. Il est précisé que tous les termes nécessaires de la série (1), sauf un seul, peuvent être évalués, avec la précision voulue, en utilisant judicieusement les tables de Barlow.

2° Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$ impaire, de période 2π , égale à $x(\pi - x)$ pour $0 \leq x \leq \pi$. En déduire l'expression de $\sqrt[6]{15} A$ à l'aide du nombre π . Avec quelle précision les calculs du 1° permettent-ils d'approcher π ?

N.-B. — La deuxième question peut être traitée sans que la première le soit. Les coefficients attribués à ces questions sont : 2 pour la première ; 1 pour la deuxième.

Une courte notice devra indiquer les méthodes de calcul employées et justifier les approximations faites. Enfin tous les calculs auxiliaires devront figurer sur la copie, dont la présentation constituera un élément d'appréciation non négligeable.

RAPPORT DE M. MARTIN, correcteur. — Renseignements statistiques : 61 copies furent remises. La moyenne des notes est de 8,3. Les meilleures notes sont : 18 ; 16 (deux fois) ; 13 (quatre fois) ; 12 (cinq fois), etc... Les résultats globaux sont consignés dans le tableau suivant :

Notes	0-1	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17	18...
Fréquences	0	6	8	14	13	8	9	0	2	1

L'épreuve de Calcul numérique comportait, cette année, une innovation : la mise à la disposition des candidats des tables de Barlow donnant les carrés, cubes, inverses, etc... des entiers inférieurs à 10 000, destinée à faciliter les calculs demandés.

Les candidats ont semblé, pour la plupart, ignorer que la faute la plus grave dans un calcul numérique est l'absence de justification des approximations faites. Faut-il préciser que l'épreuve n'est pas une épreuve de rapidité de calcul, mais une application à un problème concret de l'esprit de rigueur et du sens de l'analyse, dont tout candidat devrait faire preuve ?

Sur combien de copies avons-nous vu évaluer le nombre 5^{-6} ($= 64 \cdot 10^{-6}$) avec six chiffres significatifs garantis exacts, alors que le troisième était déjà faux ! Il y a là, en plus d'une étourderie pardonnable, un manque de rigueur ou plutôt d'honnêteté intellectuelle qui doit être sévèrement sanctionné.

L'encadrement de la somme d'une série numérique nécessite deux opérations : la première fixe le rang du dernier terme calculé ; la seconde fixe la précision avec laquelle chaque terme conservé doit être calculé. Les deux opérations ne sont pas indépendantes et il est arbitraire de fixer *a priori* la part de l'« erreur » réservée au reste et celle réservée au calcul des termes conservés. Le calcul du rang d'arrêt a été généralement effectué, mais sans efficacité, sinon sans erreur : on pense bien à

la majoration du reste $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$, mais rarement à sa minoration. Plusieurs

candidats, probablement entraînés par la routine, croient valable la minoration par

$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^6}$! Un simple graphique eût suffi à mettre en évidence l'inexactitude de cette affirmation.

L'évaluation des inverses des nombres $(2_p + 1)^6$ pouvait se faire par simple lecture des tables pour $p \geq 3$, avec quatre chiffres significatifs exacts, ce qui suffisait, à condition de lire ces nombres affectés d'une puissance convenable de 10 dans la colonne des inverses et d'en déduire leurs inverses dans la colonne des nombres. Aucun candidat n'y a pensé, malgré l'avertissement figurant dans l'énoncé.

La seconde partie était destinée, d'une part, à montrer l'emploi que l'on pouvait faire des calculs du 1^{er}, d'autre part à permettre aux candidats de glaner facilement quelques points. Peu de candidats ont vu la liaison entre les deux questions (on pouvait, soit intégrer trois fois $f(x)$, soit, plus simplement, utiliser la formule de Bessel-Parseval donnant l'énergie moyenne attachée à $f(x)$ en fonction de celles attachées à chaque harmonique). Un candidat, parmi les meilleurs, a cru pouvoir affirmer que

la fonction $f(x)$ était à variation bornée, *au moins au voisinage de* $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui dénote, ou bien une prudence maladive, ou bien une conception inexacte de ce que sont les fonctions à variation bornée, à moins encore que ce ne soit le signe d'une fatigue excessive !

En conclusion, souhaitons que les candidats se persuadent enfin de ce que l'épreuve de calcul numérique constitue une *occasion exceptionnelle* d'acquérir des points toujours précieux, et ce à peu de frais, pour peu qu'on y témoigne de qualités d'ordre, de rigueur et d'honnêteté intellectuelle.

RESULTATS GENERAUX

Les totaux des notes obtenues par les admissibles pour l'ensemble des épreuves en 1956 sont compris entre 56 et 304 sur 400 ; ils étaient, en 1955, compris entre 98 et 295 et en 1954 entre 113 et 316. L'augmentation du nombre des admissibles (62 au lieu de 48) entraîne, comme on pouvait le prévoir, une baisse très nette du total du dernier classé ; elle a cependant permis le succès de cinq candidats classés à l'écrit après le 48^e.

Puisque 178 candidats (au lieu de 183 en 1955) ont terminé les épreuves écrites, 35 % de ceux-ci (au lieu de 27 % en 1955) ont été déclarés admissibles et 21 % (au lieu de 13 %) nommés agrégés. La moyenne sur 20 du dernier agrégé 9,35 est très légèrement supérieure à celle 9,2 du dernier agrégé de 1955. Le rendement du concours est donc nettement amélioré ; il est certain que le mérite en revient surtout au développement et à la qualité des préparations.

Le tableau suivant donne la répartition des agrégés suivant l'origine des candidats :

	Candidats	Admiss.	Reçus
Professeurs (Ens. secondaire, technique, E.N.) . . .	89	20	12
Adjoints d'enseignement	5	1	
Maitres d'internat	1		
Assistants de Faculté	5	4	2
Elèves des C.P.R.	27	1	1
Elèves de l'E.N.S. (rue d'Ulm)	16	16	14
Elèves de l'E.N.S. (St-Cloud)	20	10	5
Etudiants	15	10	4

Quinze agrégés (14 reçus en 1956 et un reçu en 1954), qui n'étaient pas encore professeurs, ont reçu, au 1^{er} octobre 1956, une nomination, l'un d'entre eux de professeur de Spéciales, un autre, de classe préparatoire à l'Ecole Supérieure d'Electricité, un troisième de classe préparatoire à l'Institut de Chimie de Mulhouse, dix dans des classes de Mathématiques Élémentaires ; deux ont été, sur leur demande, détachés l'un au lycée de Londres, l'autre en Indochine.

*
**

Le nombre des places mises au concours dépassait la centaine ; il est déterminé par les besoins du seul Enseignement du Second Degré (métropole et F.O.M.), compte non tenu des appels d'offres de l'Enseignement Technique, de l'Enseignement Primaire (Ecoles Normales), de l'Enseignement Supérieur (Assistants, Recherche), et même d'organismes indépendants, comme, par exemple, l'Energie Atomique. Les besoins en agrégés dépassent donc cette année, très largement la centaine. Or le concours de 1956, nous a permis de recruter 38 agrégés seulement. La disproportion entre ces deux nombres, qui va augmentant d'année en année, est inquiétante.

Comme les besoins en agrégés ne risquent pas de décroître, le problème est d'augmenter le nombre de ceux-ci. Les modalités techniques du concours de 1956 (choix des textes, des barèmes, cotation des leçons d'oral, nombre des admissibles et des reçus) ont été étudiées avec le souci au départ de faciliter le succès du plus grand nombre de candidats possibles ; 35 % de ceux-ci ont été déclarés admissibles et le cas de chaque admissible a été examiné au cours de deux délibérations, l'une d'elles ne portant que sur douze d'entre eux à la fois. Tout candidat valable a donc vraisemblablement été détecté et nommé agrégé. Il est même vraisemblable que les marges de sécurité ont été atteintes ; le pourcentage des reçus apparaît donc comme un maximum qui, dans les années à venir, variera fort peu et n'augmentera pas nécessairement ; il en résulte que le seul moyen d'augmenter le nombre des agrégés est d'augmenter le nombre des candidats.

Parmi les candidats, nous trouvons les professeurs en exercice d'une part, les étudiants (C.P.R., E.N.S., étudiants) d'autre part. L'allongement des listes d'admissibilité est une mesure dont les principaux bénéficiaires sont les professeurs en exercice pour des raisons très claires et qui ont été examinées dans la première partie de ce rapport. Il ne saurait être question de les allonger davantage ; le nombre des agrégés n'en serait augmenté que d'une façon très modeste, et ceux-ci étant prélevés sur ce qui constitue en fait la réserve en candidats de l'agrégation, le bénéfice de cette augmentation, faite en dehors des marges de sécurité, serait tout à fait illusoire.

Le véritable problème est donc de permettre au plus grand nombre possible de licenciés d'enseignement, diplômés d'études supérieures, de devenir agrégés, sans passer par l'état intermédiaire de professeur en exercice. Ce problème n'est pas celui des préparations, dont nous avons déjà dit tout le bien que nous pensions : elles sont actives et efficaces et la question est tout simplement de leur trouver des élèves en nombre suffisant. Les statistiques signalant un afflux de candidats dans les Facultés des Sciences et dans les classes de propédeutique, en particulier, on devrait donc constater une augmentation, sinon proportionnelle, du moins très sensible du nombre des licenciés. Il n'en est malheureusement rien ; il n'existe plus, dans les Facultés, un seul licencié d'enseignement de Mathématiques qui n'ait été recruté s'il est candidat à une tâche d'enseignement ; il resterait bien entendu à examiner s'il existe encore des licenciés d'enseignement de Mathématiques et, si la race n'en est pas en voie d'extinction, ce qu'ils deviennent une fois leur licence terminée.

Nous n'avons pas, dans un rapport d'agrégation, à procéder à un examen de cette

nature. Bornons-nous donc à répéter que le sort de l'agrégation sera conditionné par le rendement de la licence, tant que celle-ci continuera à être exigée des candidats aux concours du Second Degré. Or, la vieille licence d'enseignement de Mathématiques a été trop longtemps la seule qu'ambitionnaient à la fois les candidats à l'enseignement et les candidats à la recherche ; elle est devenue pour nombre d'entre eux un obstacle difficilement franchissable et d'une valeur sélective discutable ; il est urgent de créer une licence adaptée aux besoins de l'enseignement en général, et de celui du Second Degré, en particulier, et une licence complémentaire du troisième cycle pour les besoins de la recherche. Cette réforme est à l'étude : souhaitons qu'elle aboutisse à autre chose qu'à un aménagement de la vieille licence ; la réforme ne sera efficace que si elle règle la question des programmes de la propédeutique et des certificats de licence ; ceux-ci devraient être des programmes nationaux, fixés par arrêtés ministériels, et comme la route qui mène à l'agrégation ou au C.A.P.E.S. est très longue, un candidat moyen devrait pouvoir terminer la licence d'enseignement, sans effort excessif, en deux années ; il est nécessaire pour cela que les programmes ne soient pas trop ambitieux et qu'ils puissent être enseignés dans des conditions qui assurent un pourcentage honorable des succès.

**

Les mesures déjà prises, ou qui le seront dans un avenir prochain pour augmenter le nombre des candidats à l'agrégation de Mathématiques, et par conséquent celui des agrégés, ne porteront leurs fruits que dans quelques années. Il faut donc, dans l'immédiat, assurer les besoins vitaux de l'Enseignement du Second Degré, c'est-à-dire pourvoir les chaires de Mathématiques élémentaires de nos Lycées et des classes préparatoires aux Grandes Ecoles, et, pour y parvenir, affecter dans les postes vacants un certain nombre d'agrégés de la dernière promotion. Il en résulte que les demandes de sursis ou de dérogations à l'engagement quinquennal ne peuvent être toutes accordées ; ces demandes sont d'ailleurs, d'année en année si nombreuses, que si toutes étaient accordées, il n'y aurait bientôt plus de professeurs qualifiés dans les chaires les plus importantes des lycées et des collèges.

Nous tenons cependant, avant de terminer ce rapport, à préciser, à l'intention de ceux qui, ayant sollicité un sursis ou une dérogation, ne l'ont pas obtenu, qu'il est toujours possible, pour un professeur en exercice, d'obtenir, soit un congé pour études, soit un détachement dans un établissement d'enseignement ou un organisme agréé, même après une seule année d'exercice. Il faut naturellement en faire la demande et la justifier : les demandes des professeurs en exercice sont examinées avant celles des élèves des E.N.S. et des étudiants et, lorsqu'elles sont sérieusement motivées, satisfaites par priorité.

Les demandes de sursis et de dérogations ont été en 1956 accordées aussi largement que possible : nous avons épuisé toutes nos réserves en agrégés pour répondre favorablement aux demandes pressantes et légitimes des organismes qui désiraient les accueillir. Il en est d'ailleurs résulté que nous nous sommes trouvés, au cours de la présente année scolaire, dans l'impossibilité de remplacer trois professeurs de classes préparatoires aux Grandes Ecoles que la maladie, un accident ou le rappel pour servir en Algérie, rendait indisponibles pour plusieurs mois. Nous avons demandé à des agrégés de l'année, normaliens, choisis parmi les plus qualifiés, et à ce titre bénéficiaires d'un sursis pour une quatrième année d'études, d'abandonner ces études pendant quelques mois et de remplacer les professeurs défaillants. Ils ont répondu à notre appel de très bonne grâce et sans hésitation. Nous tenons à leur dire notre satisfaction ; il y a des façons plus ou moins élégantes d'accomplir un devoir, la meilleure est encore de le faire avec simplicité et bonne humeur. Etre agrégé

confère des devoirs ; nous n'avons pas eu besoin de le leur rappeler et cette constatation est réconfortante. Ce sens du devoir, cette simplicité à accepter les charges d'un nouvel état, nous les avons trouvés chez tous les agrégés de 1956, et ceci aussi incline, en ce qui concerne l'avenir de l'agrégation et leur avenir propre, à l'optimisme.

R. DONTOT,

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées, Collèges et Écoles normales en 1956 ⁽¹⁾

Solution du problème

I

Les données sont un cercle (A) [plan (P), centre O, rayon a , axe sz] et un angle aigu α .

1° A tout point h de (P), non intérieur au cercle (A), correspond un cercle déterminé (h) de (P) orthogonal au cercle (A) ; les tangentes ht et ht' à (A) issues de h déterminent son rayon $ht = ht'$. L'axe radical (Δ) des cercles (h) et (A) est la polaire tt' de h par rapport à (A).

On fait correspondre au point h les deux cônes de révolution ayant (h) comme directrice et tels que leurs génératrices fassent avec le plan (P) l'angle donné α ; ils sont symétriques par rapport à (P). Leur axe commun est la perpendiculaire élevée en h au plan (P) : le sommet H de l'un quelconque d'entre eux est sur cette droite à la distance de h donnée par $Hh = ht \operatorname{tg} \alpha$.

Lorsque h est situé sur (A), le cercle (h) est de rayon nul, la formule précédente exige que Hh soit aussi nul, les deux points H correspondant à h se confondent avec h .

L'énoncé définit le plan (Q) contenant h et (Δ) ; en supposant h non situé sur (A) et extérieur à (A), ce plan est déterminé puisque $Hh \neq 0$. H est en dehors de (P), donc de (Δ).

Soit HH' la perpendiculaire en H au plan (Q), elle est orthogonale à (Δ) et contenue dans le plan OhH perpendiculaire à (Δ) au milieu K de tt' . h et K sont distincts, le premier étant extérieur, le second intérieur à (A) ; HK n'est donc pas perpendiculaire à (P), d'où il s'ensuit que HH' coupe (P) en un point que l'on désigne par H' . H' est sur Oh et le triangle KHH' est rectangle en H : Hh étant sa hauteur

$$\overline{hK} \cdot \overline{hH'} = -hH^2 = -ht^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Dans le triangle Oth rectangle en t

$$ht^2 = \overline{hO} \cdot \overline{hK}, \quad \text{d'où}$$

(1) Le Jury était composé de MM. ROBERT, inspecteur général, président ; COSSART, professeur (Ecole Supérieure d'Electricité) au Lycée Chaptal ; DURRANDE, professeur (Spéciales), et ECALLE, professeur (Navale) à l'annexe Stanislas du Lycée Saint-Louis ; EUVRARD, professeur (Centrale) au Lycée Chaptal, et de Mme OKAL, professeur (Fontenay) au Lycée Fénélon.

Voir l'énoncé du problème, *Bulletin* 178, p. 548.

$$\overline{hK} \cdot \overline{hH'} = -\overline{hK} \cdot \overline{hO} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad \overline{hK} \text{ est } \neq 0,$$

il en résulte $\overline{hH'} = \overline{Oh} \operatorname{tg}^2 \alpha$ ou, les points O, h, H' étant alignés, $\overrightarrow{hH'} = \overrightarrow{Oh} \operatorname{tg}^2 \alpha$ (1).

En gros, la figure des trois points O, h, H' est invariable. Explicitons le rapport $\frac{\overline{OH'}}{\overline{Oh}}$

$$\overline{OH'} = \overline{Oh} + \overline{hH'} = \overline{Oh} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{\overline{Oh}}{\cos^2 \alpha}. \quad \text{Ainsi } \overrightarrow{OH'} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \overrightarrow{Oh} \quad (2).$$

K est le pied sur Oh de la polaire (Δ) de h par rapport à (A), il en résulte

$$\overline{OK} \cdot \overline{Oh} = a^2.$$

Le produit $\overline{OK} \cdot \overline{OH'}$ est donc, lui aussi, constant. Précisons :

$$\overline{OK} \cdot \overline{OH'} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \overline{OK} \cdot \overline{Oh} = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}. \quad \text{Si l'on pose } \frac{a}{\cos \alpha} = c \quad \overline{OK} \cdot \overline{OH'} = c^2.$$

On appelle (C) le cercle de plan (P), de centre O, de rayon c. La relation $\overline{OK} \cdot \overline{OH'} = c^2$ montre que (Δ) est la polaire du point H' par rapport au cercle (C).
Noter l'ordre de grandeur

$$OK < Oh < OH', \quad H' \text{ est extérieur à (C).}$$

Remarques : 1° La définition du plan (Q) tombe en défaut si h est sur le cercle (A). L'étude précédente permet d'étendre cette définition à ce cas singulier, par un passage à la limite : Faisons tendre, sur un diamètre x'x de (A), h vers un point h₁ de rencontre de x'x avec (A) : Oh > a, Oh₁ = a ; comme Hh tend vers zéro,

H tend vers h₁. D'après la relation (2) ; H' tend vers H'₁ défini par $\overrightarrow{OH'_1} = \frac{\overrightarrow{Oh_1}}{\cos^2 \alpha}$;

OH'₁ > a. Le plan (Q) perpendiculaire en H à HH' tend vers le plan (Q₁) perpendiculaire en h₁ à h₁H'₁, c'est-à-dire à x'x. (Q₁) est ici perpendiculaire à (P) et passe par la tangente à h₁ en A. Donc, aux points h situés sur (A) et confondus avec leurs correspondants H, les plans (Q) ont encore une définition et sont, dans l'ensemble, les plans tangents au cylindre de révolution d'axe s's et de rayon a.

2° Etudions de même ce que devient (Q) quand h s'éloigne à l'infini sur un diamètre x'Ox de (A) : $\overline{OK} = \frac{a^2}{\overline{Oh}}$ tend vers zéro ; la droite (Δ) tend vers le diamètre y'Oy de A perpendiculaire à x'Ox.

Posons $\beta = \widehat{hKH}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{Hh}{Kh} = \frac{ht \operatorname{tg} \alpha}{Kh}$ Or $ht = Kh \cos \widehat{Oht}$, $\widehat{Oht}$ tend vers zéro, donc $\frac{ht}{Kh}$ tend vers 1, $\operatorname{tg} \beta$ tend vers $\operatorname{tg} \alpha$, β tend vers α . Le plan (Q) tend vers le plan (Q₂) passant par y'Oy et formant avec le demi-plan de (P) contenant Ox l'angle α (Q₂) fait avec Oz, en O, l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$: il est donc tangent au cône de révolution (A) de sommet O, d'axe s's, de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

2° Il s'agira de comparer un plan (Q) et le cercle fixe (C).

En général, excluons les cas limites (Q₁) ou (Q₂), h est à distance finie de O et extérieur à (A). Prenons comme plan de figure le plan de s's et de Oh ; il est perpendiculaire à la droite (Δ) en K et contient H et H'.

La polaire de H' par rapport à (C) est la droite (Δ) ; en vertu de sa définition à l'aide des points conjugués de H', il est manifeste que le plan polaire de H' par

rapport à toute sphère passant par (C) [dont la définition est analogue] contient la droite (Δ).

Prenons le point de rencontre N de HH' avec $z'z$ et appliquons la remarque précédente à la sphère (N), de centre N, passant par (C) ; le plan polaire de H' par rapport à cette sphère passe par (Δ) et doit être perpendiculaire à NH' : on reconnaît là le plan (Q).

Le rapport $\frac{\overline{NH}}{\overline{NH'}}$ est égal au rapport $\frac{\overline{Oh}}{\overline{OH'}}$ des projections des vecteurs colinéaires

$\overrightarrow{NH}$ et $\overrightarrow{NH'}$ sur $x'Ox$. D'après (2) ce rapport est égal à $\cos^2 \alpha$.

$$\text{Donc} \quad \frac{\overline{NH'}}{\overline{NH}} = \cos^2 \alpha \quad (3).$$

H étant le pied sur NH' du plan polaire de H' par rapport à (N), en désignant par R le rayon de (N) on a $\overline{NH} \cdot \overline{NH'} = R^2$ (4).

Des relations (3) et (4) on tire $\overline{NH}^2 = R^2 \cos^2 \alpha$ d'où $\overline{NH} = R \cos \alpha$ (5).

L'interprétation de (5) est simple : considérons un point l du cercle selon lequel (Q) coupe (N), cercle qui existe puisque $\overline{NH} < R$; le triangle Nhl est rectangle en H. $Nl = R$, l'angle aigu $\widehat{HNl}$ n'est donc autre que α .

Or le plan tangent en l à la sphère (N), et le plan (Q) sont respectivement perpendiculaires aux côtés Nl et NH de cet angle ; l'angle aigu de ces plans est donc α . On exprime ceci en disant qu'en tout point commun au plan (Q) et à la sphère (N), le plan (Q) coupe la sphère (N) sous l'angle α .

La droite (Δ), sécante à (C), coupe ce cercle en deux points désignés par λ et λ' dans l'énoncé ; ce sont aussi les points de contact avec (C) des tangentes à (C) menées par le point extérieur H'. Chacun de ces points est commun au plan (Q) et à la sphère (N).

Quel est l'angle de la tangente à (C) en λ , (soit H' λ), avec le plan (Q) ? H'H étant perpendiculaire à (Q), le plan projetant cette tangente sur (Q) est le plan

HH' λ et la projection de H' λ sur (Q) est H λ . L'angle aigu cherché est donc $\widehat{H\lambda H'}$.

H λ , situé dans (Q) est perpendiculaire à HH'. Dans le plan $\lambda NH'$, le triangle N $\lambda H'$ est rectangle en λ , car $\lambda H'$ tangente à (C) est une tangente à (N) ; λH est la hauteur issue du sommet λ de l'angle droit : les angles $\widehat{H\lambda H'}$ et $\widehat{\lambda HN}$ sont égaux.

λ étant un point l particulier tel que $\widehat{INH} = \alpha$, $\widehat{\lambda HN}$ et $\widehat{H\lambda H'}$ ont pour valeur α . Ainsi le plan (Q) coupe le cercle (C) en chacun des points λ et λ' sous l'angle α .

Remarque : Un plan (Q) du type (Q₁) [cas de H situé sur (A)] coupe visiblement encore (C) sous l'angle α d'ailleurs le raisonnement précédent n'est pas en défaut dans ce cas, où N coïncide avec O.

Un plan (Q) du type (Q₂) [cas de h rejeté à l'infini dans (P)] a encore cette propriété, puisqu'aux points λ et λ' d'intersection de ce plan avec (C), situés sur le diamètre $y'Oy$, les tangentes à (C) sont parallèles à Ox et l'étude de (Q₂) a montré que son angle aigu avec $x'Ox$ est α .

3° Dans le plan $Hs'z$, les droites HH' et HK sont conjuguées harmoniques par rapport aux rayons HF et HF' [en désignant par F et F' les points de rencontre de (C) avec $x'x$, conjugués harmoniques par rapport à H' et K]. HH' et HK étant de plus rectangulaires, ces droites sont les bissectrices de HF et HF'. La considération du triangle HFF' donne

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{F'H}{F'H'}$$

Soit k la valeur commune de ces rapports. Le lieu des points M tels que $\frac{MH}{MH'} = k$ passe donc par les points F et F' : or c'est une sphère coupant orthogonalement et harmoniquement la droite HH' ; son centre est nécessairement N , qui est commun à HH' et au plan médiateur de FF' ; c'est donc la sphère (N) .

Tous les points de (C) , situés eux-mêmes sur (N) appartiennent à ce lieu : en particulier le point λ précédemment considéré, ainsi $k = \frac{\lambda H}{\lambda H'}$.

Le triangle $H\lambda H'$ rectangle en M montre que $\frac{\lambda H}{\lambda H'} = \cos \alpha$, puisque $\widehat{H\lambda H'} = \alpha$.

En résumé on a démontré que

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{F'H}{F'H'} = \cos \alpha \quad (6).$$

H étant extérieur à (C) , soit à FF' , la différence $|F'H - FH| = FF' = 2c$. D'après (6) il en résulte que $|F'H - FH| = 2c \cos \alpha = 2a$ (7).

Dans le plan $FF'z$ le point H appartient donc à l'hyperbole de foyers F, F' dont le demi-axe transverse vaut a . L'excentricité de cette hyperbole est $\frac{c}{a} = \frac{1}{\cos \alpha}$.

A observer que l'angle α est l'angle aigu des asymptotes avec l'axe focal FF' ; soit encore que les asymptotes sont des génératrices du cône $(\mathcal{A})$.

La normale en H à cette hyperbole est la bissectrice extérieure en H du triangle FHF' , c'est donc HH' : le plan (Q) est perpendiculaire au plan $z'zH$ selon la tangente en H à l'hyperbole.

Réciproquement, soit $\bar{H}$ un point de cette hyperbole : si c'est un des sommets c'est un point H , puisque ceux-ci appartiennent à (A) . Si, plus généralement, $\bar{H}$ est extérieur à la droite FF' , $\bar{H}$ se projette sur (P) en un point de la droite FF' extérieur au segment des sommets, donc extérieur à (A) ; appelons $\bar{h}$ ce point, ils lui correspondent deux points H (construction générale pour h choisi en $\bar{H}$) ; ils appartiennent, d'après les considérations de 1°, 2°, 3°, à l'hyperbole précédente ; cette hyperbole n'étant coupée qu'en deux points par $\bar{h}\bar{H}$, l'un des points H coïncide avec $\bar{H}$, et $\bar{H}$ peut être considéré comme un point H .

Conclusion : Quand h varie sur un diamètre $x'Ox$ du cercle (A) , extérieurement à (A) , le lieu des points H qui lui correspondent est, dans le plan de $x'x$ et de $z'z$, l'hyperbole définie plus haut dont les foyers F, F' sont communs à ce plan et au cercle (C) .

Dans l'espace, le lieu des points H correspondant à tous les points h de (P) , non intérieurs au cercle (A) est la surface de révolution (Σ) engendrée par cette hyperbole en tournant autour de son axe non transverse $z'z$.

Cette surface entoure complètement l'axe $z'z$. Elle partage l'espace en deux régions : celle qui contient l'axe $z'z$ sera appelée, dans ce problème, la région intérieure à (Σ) [bien qu'elle contienne les régions extérieures des hyperboles méridiennes]. Le cône $(\mathcal{A})$ a ses deux nappes dans cette région intérieure ; le cercle (C) au contraire est, dans l'autre région, dite extérieure à (Σ) . On peut concevoir (Σ) comme engendrée par un parallèle mobile, cercle d'axe $z'z$, assujéti à rencontrer une hyperbole méridienne : l'ensemble des points du plan de ce cercle intérieurs au parallèle engendre la région intérieure à (Σ) .

II

Si les cercles (h) orthogonaux, dans (P) , au cercle fixe (A) , satisfont à une autre condition, les points (H) correspondants décrivent deux lignes, symétriques par rapport à (P) et situées sur la surface (Σ) .

1° Si l'un des points t, t' de rencontre de (h) avec (A) , t pour fixer les idées est maintenu fixe, le cercle (h) varie en engendrant un faisceau de cercles tangents en t , point fixe, à la droite Ot . Les points H restent situés dans le plan tangent au cylindre de révolution d'axe $z'z$ et de section droite (A) au point t de ce cylindre, h décrivant la tangente à (A) en t . Ce plan est le plan (Q_t) relatif au cercle point t .

Pour chaque point H , la droite Ht est l'une des génératrices du cône de révolution de sommet H , qui est intervenu initialement pour définir ce point à l'aide de (h) . Ht fait donc en t avec (P) l'angle constant α . La droite tH est l'une ou l'autre de deux droites fixes, d'où obtention aisée du lieu cherché. Il est formé de deux droites issues de t , projetées orthogonalement sur (P) selon la tangente au cercle (A) en t et faisant avec le plan (P) l'angle donné α . Tout point d'une telle droite est point de (Σ) . Par tout point, tel que t , du cercle (A) , passent deux droites que nous appellerons (D) , et qui dérivent, par révolution autour de $z'z$, de celles passant par un point t particulier.

Revenons sur un point déterminé H de (Σ) , non situé sur (A) , il lui correspond $h, (h), t, t', (\Delta)$ selon les notations fixées au début. Les deux droites Ht et Ht' sont des droites (D) [symétriques par rapport au plan $zz'H$]. Le plan de ces droites est celui de H et de (Δ) , c'est le plan (Q_H) relatif au point H . Ce sont les seules droites (D) passant par H , car une telle droite doit, d'une part, être génératrice du cône de révolution de sommet H et de directrice (h) , et d'autre part son point de rencontre avec (P) doit être sur (A) .

En réunissant ces observations avec celles déjà faites, relatives au cas où H serait situé sur (A) [remplacer la lettre t alors par H], on voit que par un point quelconque H de (Σ) passent deux droites (D) distinctes et deux seulement.

2° Si l'on considère deux points quelconques H et H_1 de (Σ) , non situés sur (A) , la droite HH_1 coupe (P) en un point σ [qu'on dira être à l'infini si HH_1 est parallèle à (P)]. Dans tous les cas, l'homothétie de centre σ transformant H en H_1 est bien déterminée [elle devient une translation de vecteur $\overrightarrow{HH_1}$ si σ est à l'infini]. Cette transformation fait correspondre à l'axe du cône $[H, (h)]$ l'axe du cône $[H_1, (h_1)]$ et change le premier cône dans le second puisqu'ils ont même angle au sommet : comme elle conserve le plan (P) , le cercle (h) relatif à H , est transformé en le cercle (h_1) relatif à H_1 ; autrement dit σ est un des centres d'homothétie des deux cercles (h) et (h_1) .

Considérons deux points distincts α et β de (h) alignés avec σ et leurs homothétiques α_1 et β_1 de (h_1) ; les tangentes à (h) en α et β se coupent en ϱ , les tangentes à (h_1) en α_1 et β_1 , respectivement parallèles aux précédentes, se coupent en ϱ_1 . ϱ appartient à la polaire de σ par rapport à (h) et ϱ_1 à la polaire de σ par rapport à (h_1) , polaires toutes deux perpendiculaires à hh_1 .

Ces quatre tangentes délimitent un parallélogramme $\varrho\tau\varrho_1\theta$ dont $\varrho\varrho_1$ est une diagonale et $\tau\theta$ l'autre : τ est supposé commun à $\alpha\alpha_1$ et $\beta_1\varrho_1$, θ commun à $\beta\varrho$ et $\alpha_1\varrho_1$, $\varrho\alpha = \varrho\beta$ donc le triangle $\alpha\varrho\beta$ est isocèle et il en est de même des triangles dont les côtés possèdent les directions de ceux de $\alpha\varrho\beta$; ainsi $\tau\beta_1 = \tau\alpha$ et $\theta_1\beta = \theta_1\alpha_1$. Chaque des points τ et θ a des puissances égales par rapport aux cercles (h) et (h_1) : la diagonale $\tau\theta$ du parallélogramme est l'axe radical de ces cercles ; $\varrho\varrho_1$ a son milieu, centre du parallélogramme, sur $\tau\theta$ et les polaires de σ par rapport à (h) et (h_1) , parallèles à l'axe radical, en sont situées à égale distance. Ainsi l'axe radical de (h) et (h_1) est équidistant des deux polaires de σ par rapport à (h) et (h_1) , les trois droites étant parallèles.

3° Regardons comme fixe un point H de (Σ) [essentiellement non situé sur (A)] et comme variable un point H₁ qui décrit une courbe quelconque (Γ) tracée sur (Σ) et passant par H. Supposons que la courbe (Γ) ait une tangente en H, cette tangente coupe (P) en un point T (à distance finie ou à l'infini).

Quand H₁ tend vers H sur (Γ), la droite HH₁ tend, par définition, vers HT, et la trace σ de HH₁ sur (P), mobile, tend vers T (ou s'éloigne à l'infini dans la direction de la tangente HT si T est à l'infini). La polaire de σ par rapport à (h) et la polaire de σ par rapport à (h₁) [cercle mobile dont la position limite est (h)] ont toutes deux comme position limite la polaire de T par rapport à (h) : l'axe radical de (h) et (h₁), parallèle à ces polaires et intérieur à leur bande, d'après la propriété précédente, a nécessairement comme position limite cette même polaire.

(h) et (h₁) sont deux cercles orthogonaux à (A), donc le centre O de ce cercle a même puissance par rapport à (h) et (h₁) : leur axe radical passe par le point fixe O et sa position limite doit passer par O.

Donc la polaire de T par rapport à (h) passe par O ; il en résulte que T est situé sur la polaire de O par rapport à (h), soit sur la droite (Δ). La tangente HT à (Γ) en H est nécessairement contenue dans le plan H Δ , c'est-à-dire dans le plan (Q) relatif au point H.

Quelle que soit la courbe (Γ) appartenant à (Σ) passant par H, sa tangente en H appartient à ce plan, indépendamment de (Γ). Par définition, la surface (Σ) admet au point H un plan tangent qui n'est autre que (Q).

On s'explique maintenant pourquoi (Q) contient les deux droites (D) passant par H et la tangente à l'hyperbole méridienne située dans le plan $\mathcal{S}'\mathcal{Z}$ H.

Remarque : Le résultat n'a été établi qu'en supposant H, non sur (A). Dans le cas où l'on prend pour H un point t de (A), il subsiste, mais s'établit de manière différente. Le lecteur vérifiera qu'en supposant la tangente à (Γ) en t non perpendiculaire à (P) et formant donc avec (P) un angle aigu θ , en appelant h₁t₁ et h₁t'₁ les tangentes à (A) issues de h₁, projection sur (P) du point H₁, qui tend vers t sur (Γ), on a :

$$\lim \frac{t_1 h_1}{t h_1} = \frac{t_g \theta}{t_g \alpha} \text{ (finie).}$$

Dans le triangle t₁th₁, on peut remplacer le rapport de deux côtés par celui des sinus des angles opposés : l'angle $\widehat{t_1 t h_1}$ tend vers zéro (où π), son sinus tend vers zéro. Il en résulte que $\sin \widehat{t_1 t h_1}$ tend aussi vers zéro, t₁t tend vers la tangente à (A) en t, et th₁ tend aussi, obligatoirement vers cette tangente. Ceci établit que la tangente en t à (Γ) est dans le plan Q_t relatif au point t.

Demandons-nous si tout plan (R), passant par une droite (D) de (Σ), soit (D₀), est un plan tangent à (Σ) : la trace de (D₀) sur (P) est un point t₀ de (A), la trace de (R) sur (P) est une droite passant par t₀. En général elle recoupe (A) en un point t₁ distinct de t₀ : le cercle (h) orthogonal à (A) en t₀ et t₁ fournit un point H correspondant situé sur (D₀) et le plan (R) considéré est plan tangent à (Σ) en H.

Mais ce raisonnement suppose que t₁ et t₀ ne soient pas diamétralement opposés sur (A), auquel cas il ne correspond plus à ce couple de points de véritable cercle (h). Le plan (R) considéré passe en somme par (D) et par O : il n'est plus tangent à (Σ) en un point à distance finie.

Si t₀ et t₁ coïncident, le plan (R) donné coïncide avec le plan (Q_{t₀}) que nous avons encore établi être le plan tangent à (Σ) en t₀ [Voir remarque ci-dessus]. En résumé : tout plan passant par une droite (D) est un plan tangent à la surface (Σ), hors le plan déterminé par cette droite et le point O. O est évidemment centre de symétrie de (Σ). Ce plan exceptionnel a en commun avec (Σ) la symétrie de (D)

par rapport à O et la droite (D) elle-même : ces deux droites sont parallèles et n'ont pas, à strictement parler, de point commun.

Considérons maintenant l'intersection avec un plan (Q) tangent à (Σ) en H d'un parallèle quelconque de (Σ) ; *a priori* elle comporte deux points, communs aux deux droites (D) situées dans le plan (Q) et au plan de ce parallèle, car ces points appartenant à ces droites, appartiennent à (Σ) et sont donc sur le parallèle. Elle ne comporte pas d'autres points, car un cercle ne peut couper un plan en plus de deux points s'il n'y est contenu.

Si j et j' sont ces deux points respectivement situés sur chacune des droites (D) , le segment jj' est une *corde* du parallèle et les points de ce segment sont intérieurs au parallèle, donc dans la région intérieure de (Σ) .

En projection sur (P) , les deux génératrices de H sont projetées suivant ht et ht' et les projections des segments considérés, parallèles à (Δ) , remplissent les angles, opposés par le sommet, des projections ht et ht' , qui contiennent la droite indéfinie Oh . Les points de (Q) intérieurs à (Σ) sont projetés dans l'intérieur de l'angle sail-

lant tht' ou de son opposé par le sommet.

Cette règle n'est plus valable quand H est sur (A) ; la projection sur (P) ne pouvant être utilisée dans ce cas puisque (Q) est perpendiculaire à (P) .

III

Les données sont ici, outre la surface (Σ) , un point S de l'espace, non situé sur (Σ) , ni sur (P) , ni sur $z'z$.

1° Soit une droite (D) quelconque [définition donnée dans (II. 1°)] ; le plan contenant S et (D) est bien déterminé, S n'étant pas sur (Σ) . On a vu dans (II, 3°) que ce plan est, *en général*, tangent à (Σ) en un certain point H de (D) . L'objet de notre étude est la courbe (Λ) , lieu des points situés sur la surface (Σ) et tels, de plus, que le plan tangent à (Σ) en un tel point passe par S . Ce qui précède prouve qu'elle existe pour toute position de S .

On étudie *a priori* les points à l'infini de (Λ) en cherchant les directions des droites (D) telles que le plan SD soit exceptionnel, ou, comme on l'a vu, passe par O ; on sait qu'un tel plan est tangent au cône $(\mathcal{A})$ et on est ramené à mener par S un plan tangent à ce cône : s'il en existe, il coupe (Σ) selon deux droites (D) parallèles dont la direction donne un point H à l'infini de (Λ) . D'où la discussion suivante :

Si S est intérieur au cône $(\mathcal{A})$, (Λ) n'a pas de points à l'infini.

Si S est extérieur au cône $(\mathcal{A})$, on peut mener par la droite OS deux plans distincts tangents à $(\mathcal{A})$. (Λ) a deux points à l'infini. Lorsque S est situé sur le cône $(\mathcal{A})$, les plans tangents précédents [et les directions des points à l'infini de (Λ)] sont confondus.

On appelle s la projection orthogonale de S sur (P) : sS n'est pas nul, s n'est pas confondu avec O : s a donc une polaire effective (L) par rapport au cercle (A) : on appelle g le pied de (L) sur la droite Os .

Existe-t-il des points H de (Λ) sur le cercle (A) de (Σ) ?

Ils s'obtiennent en menant par S des plans tangents à (Σ) du type (Q_1) [voir (I. 1°)], c'est-à-dire des plans tangents au cylindre de révolution de section droite (A) . Cela revient, dans le plan (P) , à mener par s les tangentes à (A) : s'il en existe le point de contact avec (A) est un point cherché.

Ecartons maintenant de notre étude de tels points H de (Λ) . On considère donc un point H tel que le plan tangent (Q) à (Σ) en H , déterminé par H et la polaire (Δ) de h , par rapport au cercle (A) , contient le point S . Il faut et il suffit à cet effet que la droite HS coupe la droite (Δ) de (P) ou lui soit parallèle.

Si HS coupe (Δ) , c'est au point de rencontre de sa projection hs avec (Δ) , soit q ,

et l'homothétie de centre φ transformant H en S transforme aussi h en s , son rapport $\frac{\overline{\varphi s}}{\overline{\varphi h}}$ est aussi égal à $\frac{\overline{sS}}{\overline{hH}}$ [ici on suppose $s's$ orienté]. Nous remplacerons $\frac{\overline{\varphi s}}{\overline{\varphi h}}$ par le rapport algébrique des distances des points s et h à la droite (Δ) , invariante dans l'homothétie.

Soit sv la perpendiculaire menée par s sur la droite Oh , sv est parallèle à (Δ) , la distance de s à (Δ) est mesurée par la longueur Kv , celle de h à (Δ) est mesurée par Kh .

D'où la relation

$$\frac{\overline{Kv}}{\overline{Kh}} = \frac{\overline{sS}}{\overline{hH}} \quad (8)$$

Le cas où la droite HS est parallèle à (P) et où nous voulons alors que HS soit parallèle à (Δ) , donne encore cette même condition, remplie parce que les deux membres sont égaux à l'unité dans (8).

Ainsi la relation (8) est nécessaire pour que (Q) passe par S ; elle est aussi suffisante, car elle exprime qu'une même homothétie (ou translation) conservant la droite (Δ) change h en s et H en S , donc que SH rencontre (Δ) ou que le plan $H(\Delta)$ contienne le point S .

2° L'énoncé désigne par $h\mu$ la perpendiculaire menée de h sur la droite Ogs . Les points μ et ν appartiennent au cercle du plan (P) décrit sur hs comme diamètre : donc $\overline{Oh} \cdot \overline{Ov} = \overline{Os} \cdot \overline{O\mu}$ (9) (on oriente ici des droites Os et Oh).

Les droites (L) et (Δ) sont les polaires respectives de s et de h par rapport à (A) , ce qui s'exprime par

$$\overline{Og} \cdot \overline{Os} = a^2 \quad \overline{OK} \cdot \overline{Oh} = a^2 \quad \text{d'où}$$

$$\overline{Oh} \cdot \overline{OK} = \overline{Os} \cdot \overline{Og} \quad (10).$$

Les relations (9) et (10) entraînent les proportions

$$\frac{\overline{Os}}{\overline{Oh}} = \frac{\overline{Ov}}{\overline{O\mu}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{Og}} = \frac{\overline{Ov} - \overline{OK}}{\overline{O\mu} - \overline{Og}} = \frac{\overline{Kv}}{\overline{g\mu}}$$

On peut aussi déduire la relation

$$\frac{\overline{Oh}}{\overline{Os}} = \frac{\overline{Kv}}{\overline{g\mu}} \quad (11)$$

qui va nous intéresser, et qui est indépendante de l'hypothèse faite sur (H) , du parallélisme des directions de droites $\nu\mu$ et gK , toutes deux antiparallèles de la direction hs par rapport aux droites Oh et Os .

Éliminons Kv entre les relations (8) et (11), par multiplication membre à membre, ce qui donne

$$\frac{\overline{Os}}{\overline{Oh} \cdot \overline{Kh}} = \frac{\overline{sS}}{\overline{hH} \cdot \overline{g\mu}}$$

D'après la définition de H , le rayon du cercle (h) est d'une part $\frac{hH}{tg \alpha}$, d'autre

part, c'est $ht = ht' = \sqrt{\overline{hO} \cdot \overline{hK}}$, d'où la relation

$$\overline{hO} \cdot \overline{hK} = \frac{hH^2}{tg^2 \alpha} \quad (12).$$

Le résultat de l'élimination devient

$$\frac{\overline{Ostg^2\alpha}}{hH} = \frac{\overline{sS}}{g\mu} \quad (hH \text{ est } \neq 0),$$

soit encore $\frac{\overline{g\mu}}{hH} = \frac{\overline{sS}}{\overline{Ostg^2\alpha}}$ (13), équivalente à (8) moyennant (11).

Ainsi, quand H varie sur la courbe (A), le rapport $\frac{\overline{g\mu}}{hH}$ reste constant, ou bien

la cote $\overline{hH}$ de H par rapport à (P) varie proportionnellement à la distance de h à (L), $g\mu$, en effet, mesure la distance de h à (L).

Désignons par M la projection orthogonale de H sur le plan fixe $s'sS$; $\overrightarrow{\mu M} = \overrightarrow{hH}$, la droite μM est perpendiculaire à Os dans ce plan.

La relation $\frac{\overline{g\mu}}{\mu M} = C^{\text{te}}$ signifie que le rapport (algébrique) des coordonnées de M par rapport à deux axes rectangulaires fixes du plan $s'sS$ reste constant : leurs orientations sont celles de $s's$ et de Os et ces axes se coupent en g. M reste donc sur une droite fixe passant par g. H reste situé dans un plan fixe (ϖ) passant par la droite (L) perpendiculaire à $s'sS$ en g.

(ϖ) ne dépend que de la surface (Σ) et du point S. L'angle γ qu'il fait avec (P) (angle aigu) est donné par la relation

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{hH}{g\mu} = \frac{\overline{Ostg^2\alpha}}{sS} \quad (14).$$

3° Dans ce paragraphe et les suivants, on suppose que le point S appartienne à la région intérieure à (Σ).

S étant, par hypothèse, dans le plan tangent en H à (Σ), d'après le 3° de (II), sa projection s sur (P) est telle que la droite hs soit intérieure à l'angle saillant des tangentes ht, ht' et à son opposé par le sommet. Autrement dit, le point ϕ de rencontre de hs avec (Δ) est intérieur au segment tt', ou encore hs est sécante au cercle (A).

Soit I le pôle de la droite hs par rapport à (A) : il est donc extérieur à (A) : ce point I (à distance finie ou à l'infini) est le point d'intersection des polaires (L) et (Δ) des points s et h. Raisonnons en le supposant (cas général) à distance finie.

I est d'égale puissance positive par rapport au cercle (h) et par rapport au cercle (A) ; d'autre part, comme I est sur (L), cette puissance est encore celle de I par rapport à tous les cercles d'un faisceau ($\mathcal{F}$) ayant (L) comme axe radical et contenant le cercle (A), faisceau bien déterminé et indépendant de H sur (A). L'axe radical d'un cercle quelconque de ($\mathcal{F}$) avec le cercle (h) passe par I.

Pour que ce cercle de ($\mathcal{F}$) devienne tangent à (h), il faut et il suffit que cet axe radical devienne tangent à (h) ; de I, on peut mener deux tangentes à (h), de points de contact j et j' : les cercles du faisceau ($\mathcal{F}$) passant par j ou j' sont tangents à (h) en ces points. Il peut se produire que l'un des points j ou j' soit sur (L), auquel cas l'un des deux cercles considérés (U) et (U') dégénère en la droite (L) : cela ne peut arriver que pour un seul des cercles (U) et (U'), car une seule des tangentes menées de I à (h) peut être confondue avec (L).

Ces considérations ne seraient pas en défaut si I était rejeté à l'infini (lorsque h est sur Os), il pourrait, semble-t-il, arriver dans ce cas, lorsque ($\mathcal{F}$) est un faisceau à points limites [la discussion de la nature de ($\mathcal{F}$) importe peu ici], que l'un des cercles (U) soit de rayon nul : ceci nécessiterait que (h) passe par un des points limites de ($\mathcal{F}$), et par conséquent par l'autre, puisque (h) est orthogonal à (A), mais

alors h serait sur (L). C'est impossible, car on aurait alors $Hh = 0$, cas exclus [H n'est pas sur (A) et en même temps sur Os].

Cette définition des « cercles » (au sens large) (U) et (U') semble les faire dépendre du cercle (h), c'est-à-dire du point H que l'on considère sur (A). Ce point va être discuté au paragraphe suivant.

4° H et H_1 désignent ici deux points quelconques de la courbe (A) ; (h) et (h_1) sont les cercles du plan (P) correspondants. Ces cercles sont non-tangents, sinon ils se toucheraient en un point de (A), cercle orthogonal commun à (h) et (h_1) et les points H et H_1 appartiendraient à une même droite (D), ce qui est impossible [un seul point H au plus sur chaque droite (D)]. La droite HH_1 appartient au plan (π) et rencontre la trace (L) de π sur (P) en un point σ , en général à distance finie. On sait que σ est centre d'homothétie des cercles (h) et (h_1). σ est aussi le pôle d'une inversion échangeant ces deux cercles (*non tangents*). Cette inversion (J) laisse invariante la droite (L) passant par σ et échange (h) et (h_1). Si σ était à l'infini, rien ne serait changé à cette conclusion en substituant à (J) une symétrie par rapport à une droite perpendiculaire à (L).

Rappelons ici pourquoi une inversion qui échange deux cercles (C) et (C') laisse invariants tous les cercles (Γ) orthogonaux à (C) et (C') : soit m un point commun à (C) et (Γ), non situé sur (C') ; m' son inverse sur (C'), le cercle (Γ_1) passant par m et m' et orthogonal en m à (C) est déterminé, invariant dans l'inversion et orthogonal à (C') en m' . Les cercles (Γ) et (Γ_1) ont en commun le point m et la tangente en m et sont tous deux orthogonaux au cercle (C') : ils sont nécessairement confondus comme répondant à un problème qui n'a qu'une solution. Donc (Γ) est invariant dans l'inversion.

Ici l'inversion (J) qui échange (h) et (h_1) laisse donc invariant le cercle (A) orthogonal à la fois à (h) et (h_1). Cette inversion transforme en eux-mêmes, dans le faisceau ($\mathcal{F}$), d'une part la droite (L), d'autre part le cercle (A). Elle laisse invariants, plus généralement, chaque cercle du faisceau (Φ) : car le point σ a même puissance par rapport à tous les cercles de (Φ), égale à sa puissance par rapport à (A), qui est la puissance d'inversion de (J).

En particulier (J) conserve les cercles (U) et (U'). Ces cercles, par construction, sont tangents à (h) que l'inversion (J) transforme en (h_1). Donc, ces cercles (U) et (U') sont également tangents à (h_1).

Il en résulte que les cercles (U) et (U') sont fixes, quel que soit H sur (A).

5° Il a été signalé en (III, 4°) que l'un des cercles (U) ou (U') peut être une droite, qui est alors (L). Il en est ainsi quand le cercle (h) est tangent à (L), c'est-à-dire quand (L) est tangent au cône de sommet H et de directrice (h), ou que le plan (π) est tangent à ce cône. Il faut et il suffit à cet effet que l'angle aigu γ du plan (P) et du plan (π) soit égal à α . On a calculé cet angle par

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{Os \operatorname{tg}^2 \alpha}{Ss} \quad (14).$$

La condition $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha$ équivaut à $\frac{Ss}{Os} = \operatorname{tg} \alpha$; ou encore au fait que la droite

OS forme avec $s's$ un angle aigu égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Ainsi, pour que l'un des cercles (U),

(U') soit une droite, il faut et il suffit que le point S appartienne au cône (A).

Revenons au cas général. L'un des cercles (U), (U'), n'est pas une droite, soit (U) celui-là, u son centre, η le point de contact de (U) et de (h). L'homothétie de centre η , qui transforme h en u , transforme H en un point U situé sur la perpendiculaire à (P) en u .

$$\frac{uU}{u\eta} = \frac{hH}{h\eta} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ donc } uU = u\eta \operatorname{tg} \alpha = C''.$$

Ceci ne démontre pas sans ambiguïté que U soit fixe.

Mais considérons à nouveau un autre point quelconque H_1 de (Δ) et le cercle correspondant (h_1) , que (U) touche en η_1 ; on a vu que les points η et η_1 sont inverses dans une inversion (J) de pôle σ (mêmes notations que plus haut). Le théorème de Ménélaüs donne, η , η_1 , σ étant alignés sur les trois côtés du triangle uhh_1 :

$$\frac{\overline{\eta u}}{\overline{\eta h}} \times \frac{\overline{\sigma h}}{\overline{\sigma h_1}} \times \frac{\overline{\eta_1 h_1}}{\overline{\eta_1 u}} = +1$$

$$\text{Or } \frac{\overline{\eta u}}{\overline{\eta h}} = \frac{\overline{uU}}{\overline{hH}}, \quad \frac{\overline{\sigma h}}{\overline{\sigma h_1}} = \frac{\overline{hH}}{\overline{h_1 H_1}} \quad \text{d'où } \frac{\overline{\eta_1 u}}{\overline{\eta_1 h_1}} = \frac{\overline{uU}}{\overline{h_1 H_1}}$$

Le point transformé de H_1 par l'homothétie de centre η_1 et qui transforme h_1 en u est donc le point U . La définition de U ne change pas quand on substitue le cercle (h_1) au cercle (h) . Le point U est donc *fixe* quand H varie sur (Δ) .

Le point H est sur la droite variable $U\eta$, qui est génératrice du cône de sommet U et de directrice (U) , cône de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$. H appartient à la section par le plan (π) de ce cône fixe de révolution.

La courbe (Δ) est donc portée par une conique du plan (π) .

Il est aisé de discuter sa nature, connaissant l'angle γ du plan (π) avec le plan (P) d'un parallèle du cône de révolution, ou $\frac{\pi}{2} - \gamma$ de (π) avec l'axe.

Cette conique est une ellipse si $\frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} - \gamma$ ou $\text{tg } \gamma < \text{tg } \alpha$,

une hyperbole si $\frac{\pi}{2} - \alpha > \frac{\pi}{2} - \gamma$ ou $\text{tg } \gamma > \text{tg } \alpha$.

une parabole si $\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$ ou $\text{tg } \gamma = \text{tg } \alpha$.

La dernière condition, étudiée au début de (III, 5°), exprime que S est sur le cône $(\mathcal{A})$ [c'est possible, car $(\mathcal{A})$ est entièrement situé dans la région intérieure de (Σ)].

De même $\text{tg } \gamma < \text{tg } \alpha$ s'écrit $\frac{Os \text{ tg }^2 \alpha}{Ss} < \text{tg } \alpha$, soit $\frac{Ss}{Os} > \text{tg } \alpha$: ceci exprime que l'angle de OS avec (P) est supérieur à α , c'est-à-dire que S est intérieur au cône $(\mathcal{A})$.

En résumé, la conique qui porte (Δ) est une ellipse, une hyperbole, une parabole selon que le point S est intérieur au cône $(\mathcal{A})$, situé dans la région extérieure de $(\mathcal{A})$ [c'est-à-dire entre ce cône et (Σ)], ou enfin sur le cône $(\mathcal{A})$.

On contrôle ces résultats par l'étude des points à l'infini de (Δ) [voir III, 1°] faite *a priori*.

On peut objecter que (Δ) n'est une conique qu'autant que (π) ne passe pas par le sommet U du cône de révolution. Si ceci arrivait, ou bien (Δ) n'aurait pas de points réels autres que U , ou serait décomposée en droites. Ces circonstances sont inadmissibles : la seconde donnerait pour la famille des cercles (h) un faisceau de cercles et deux de ces cercles devraient avoir un centre d'homothétie sur (L) , fixe. Le faisceau des cercles (h) ne pourrait être qu'un faisceau de cercles tangents en un point, situé à la fois sur (Δ) et sur (L) , l'un de ces cercles aurait son centre en s ; mais alors le point S serait sur (Σ) , cas qui a été écarté dans l'énoncé.

La tangente à (Δ) en H doit être située, d'une part, sur le plan (Q) tangent à (Σ) en H , d'autre part sur le plan (π) . Sa trace sur (P) est donc le point I d'intersection des traces (Δ) et (L) de ces deux plans. La tangente cherchée est donc HI .

Dans le plan (Q), qui contient aussi HS et les droites Ht et Ht', remarquons que HS coupe (Δ) au point φ d'intersection de (Δ) avec hs, qui est conjugué de I par rapport au cercle (A), puisque hs est la polaire de I ; φ et I sont donc conjugués harmoniques par rapport à t et t' ; donc HI et HS sont conjuguées harmoniques, dans le plan (Q) par rapport aux deux droites (D) de la surface (Σ) qui passent par H et qui ne sont autres que Ht et Ht'.

Remarque : On ne demandait pas d'établir l'identité du lieu (Δ) avec la conique à laquelle tous ses points appartiennent. Voici un moyen de procéder à cet effet.

Soit H₀ un point de la conique : prenons un point arbitraire H du lieu (Δ) il est sur la conique, donc dans le plan (π) ; la droite H₀H de ce plan coupe (L) en un point σ₀. Appelons (h₀) et (h) les cercles d'intersection avec (P) des cônes de révolution d'axes parallèles à ε'ε et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$; (h₀) et (h) sont homothétiques par rapport à σ₀.

H₀ et H appartenant au cône de sommet U, (h) et (h₀) sont tangents à (U) en des points η et η₀.

Les droites UH et UH₀ coupent (P) en η et η₀. Le point σ₀ appartient au plan (P) et au plan HH₀U, il est donc sur leur intersection qui est la droite ηη₀. Ainsi η et η₀ sont alignés avec σ₀.

Une inversion (J₀) de pôle σ₀ échange les cercles (h) et (h₀) ; elle laisse invariant le cercle (U), parce qu'il est tangent à (h) et (h₀) aux points η, η₀, non homothétiques évidemment et alignés avec σ₀.

La puissance de cette inversion est la puissance de σ₀ par rapport à U, qui est la même que la puissance de σ₀ par rapport à (A), puisque (L) est axe radical de (A) et du cercle (U) du faisceau (ℱ).

Donc, l'inversion (J₀) conserve (A).

H appartenant à (Δ), donc à (Σ), le cercle (h) est orthogonal au cercle (A).

(h₀) transformé de (h) par J₀ est donc aussi orthogonal au cercle (A). Le point H₀ est donc sur (Σ). Dire qu'il est aussi dans (π), c'est dire que le plan (Q) tangent à (Σ) en H₀ passe par S, car la relation (13) est une condition suffisante, comme (8), qu'elle entraîne, pour que (Q) passe par S. Donc le point H₀ appartient au lieu (L).

La méthode suivie ici pour qualifier la courbe (Δ), courbe de contact du cône circonscrit de sommet S à la surface (Σ), ne serait plus valable si le point S, au lieu d'être (début de 3^e) situé dans la région intérieure de (Σ), était situé dans la région extérieure.

RESULTATS DE L'ÉPREUVE

L'impression d'ensemble éprouvée par le jury de correction est satisfaisante. Il semble que les élèves possèdent leur cours et savent l'utiliser. Une certaine aisance dans les calculs est à remarquer.

Dans une copie bien présentée et bien rédigée le problème est traité en entier. Dans une dizaine, l'ensemble est compris, quelques points délicats sont admis.

Il y a, certes, des copies faibles en grand nombre, ce qui s'explique par la longueur du sujet, d'où une cohérence insuffisante dans la vision des paragraphes de chaque partie.

Pas mal de concurrents, sans se laisser décourager par un échec relatif dans la partie I, ont constaté qu'il leur était possible d'aborder la suite.

Passons en revue et par ordre ces différentes parties.

On a été surpris de constater, lors de la surveillance des épreuves, que la plupart des candidats passaient beaucoup de temps à démontrer la première question de I.

Celle-ci contient des précisions sur des cas particuliers, demandées parce que, dans la suite, on devait avoir à s'y référer fréquemment, ou exclure ces cas particuliers faute de temps. Ainsi on aura à supposer constamment que h n'est pas situé sur le cercle (A) parce que la méthode constamment employée est un procédé de projection orthogonale sur le plan (P) et que le plan (Q) devient perpendiculaire à (P) lorsque h est sur (A).

La phrase : « Etendre la définition du plan (Q) au cas particulier où h est sur (A) » n'apparaît pas avoir été bien comprise. Il y a cependant des extensions de définitions dans le programme : points conjugués par rapport à un cercle, cas particuliers de coniques englobant deux droites, et aussi en trigonométrie, des extensions

de définition des fonctions avec l'exemple de la vraie valeur de $\frac{\sin x}{x}$ pour $x = 0$, qui n'est autre qu'une limite. Sans doute les élèves ne classent pas nettement, dans leur esprit, s'ils n'y sont aidés, l'apparement de ces idées touchant des extensions possibles des définitions primitives.

En substance, ils avaient à chercher la position limite de H' quand h , extérieur au cercle (A), s'en rapproche indéfiniment. Toujours est-il que les correcteurs ont relevé des phrases ahurissantes sur ce que peut devenir un cône de révolution varia-

ble, mais de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$ constant : le cône devient « filiforme », il « dégénère en cylindre », « l'angle α devient droit » !

Le cas où h est rejeté à l'infini sur un diamètre du cercle (A) est nettement mieux traité, mais trop probablement parce que l'énoncé indiquait le résultat à obtenir !

La mentalité des élèves de cette classe, qui se révèle ainsi, est que le fin du fin, pour eux, est de deviner les choses plus vite que le voisin ; mais si on pouvait toujours deviner sans recherche les résultats, les Mathématiques ne seraient qu'une tautologie, alors qu'elles servent à *élucider* des points délicats.

Des élèves ignorent encore la définition de l'angle d'une droite et d'un plan ; la question relative à l'angle du plan (Q) et de la sphère (N) fut une des plus mal traitées. Seule la meilleure copie a correctement établi les résultats angulaires visés par le 2° de I. Heureusement, comme nous l'avons dit déjà, ces résultats n'intervenaient pas dans la suite.

Si l'égalité des rapports $\frac{F'H}{F'H'}$ et $\frac{FH}{FH'}$ a été généralement démontrée, on a plus rarement établi que leur valeur commune est $\cos \alpha$. La considération d'une sphère comme lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés est constant et de valeur k , n'est pas familière à beaucoup de candidats. Ceux qui se rappelaient que le rapport des distances du centre de la sphère à ces mêmes points est de valeur k^2 ont été plus heureux, car cette remarque conduisait à la solution très simplement.

On serait heureux de constater que des résultats de ce genre et d'autres encore attestent l'érudition des concurrents, mais on a regretté par contre d'en voir faire un étalage intempestif. On a parlé de droites focales d'un cercle, de génératrices d'une quadrique, alors que les exposés systématiques de ces théories ne se trouvent nulle part en somme dans les livres destinés à cette classe. Au rebours, le problème pouvait constituer une initiation à ces questions pouvant rivaliser avec ces exposés, en admettant qu'ils fussent classiques.

Peut-être cette information, portant sur des mots plus que sur des choses, ne procède-t-elle que d'une tendance assez enfantine. Une autre a consisté à forger des mots, par analogie, pour les notions rencontrées dans le problème : un élève appelle la surface (Σ) « cône à génératrice hyperbolique ». Cette fois, l'*extension*, car c'en est une, tombait à faux. (Σ) est aussi baptisé « hyperboloïde à deux nappes » par un autre.

Dans le 1^{er} de la II^e partie, certains candidats, dans un zèle louable, se sont demandé s'il n'existait pas, en plus des droites trouvées, d'autres droites situées tout entières sur (Σ) . L'énoncé, si telle eût été notre pensée, l'aurait dit plus nettement. Reconnaissons qu'il eût été préférable de définir les droites appelées (D) d'après leur construction, demandée, deux lignes plus haut ; mais c'eût été donner à la fois dans l'énoncé une question et sa réponse.

L'un des candidats a parfaitement conduit son raisonnement jusqu'au bout, trouvant en somme toutes les droites de (Σ) et il lui en a été tenu compte, bien entendu.

Le (II) présentait moins de difficulté que le (I), mais abordait un domaine nouveau pour l'intuition : l'idée du plan tangent, chez ces élèves, ne s'est pas évadée volontiers des images offertes par le plan tangent à la sphère ou au cône ; on cesse d'y voir clair quand on trouve que la surface (Σ) a *plus d'une droite* commune avec son plan tangent. L'un des concurrents renonce à faire le régionnement demandé à la fin de (I, 3^e) en affirmant qu'une surface ne peut couper son plan tangent. Et le fait qu'un plan tangent tourne autour de (D) quand son point de contact varie sur (D) devait aussi faire scandale.

La démonstration de l'existence du plan tangent à la surface (Σ) en un de ses points H, par le passage à la limite que suggérait l'énoncé, n'est pas généralement mise au point de façon correcte ; les candidats ne prennent aucune précaution et n'analysent pas assez la figure initiale *avant* d'en trouver les propriétés se conservant à la limite. Que dire d'affirmations comme les suivantes : quand (h_1) se confond avec (h) , leur axe radical est rejeté à l'infini, ou encore passe par le centre (h) ? on s'explique ces illusions parce qu'on peut dire, qu'au passé, les cercles (h) et (h_1) sont devenus concentriques, ou sont devenus de même rayon. Il semble que les passages à la limite devraient être envisagés, en quelque sorte, sous le point de vue de prévisions relatives au futur.

Tout cela est très instructif : mais comme nous le recommandait M. le Haut-Commissaire PERRIN, n'incriminons pas chez nos élèves le défaut de rigueur, car la rigueur est relative. On aura remarqué, en lisant notre solution, qu'elle fait intervenir des positions limites de droites : passe encore quand la droite mobile passe par un point fixe, ou garde une direction fixe ; mais généralement il n'en est pas ainsi. Nous nous sommes toujours étonné qu'on ne se préoccupe pas davantage, même en Spéciales, d'élucider cette notion de position limite (droite, cercle, etc...) : sans doute cela va-t-il trop loin, et nous nous refusons à admettre comme réponse qu'on considère ce que devient à la limite l'équation de la ligne variable considérée ! Il semble bien pourtant que seule l'analyse soit susceptible de suppléer le microscope qu'il faudrait employer pour lire une figure comportant des éléments infiniment voisins.

Avec la dernière partie III, on aborde le lot des copies retenues pour un examen ultérieur après la première lecture. Faut-il que toutes les phrases de l'énoncé commencent par le refrain : « démontrer que... » ? On le croirait, car, sauf dans la meilleure copie, le texte : « Sur une droite (D) de (Σ) il existe (en général) un point H tel que le plan tangent en H à (Σ) passe par S », n'a été considéré que comme l'affirmation d'une vérité première.

Les calculs tendant à prouver la fixité du plan de H et de (L) sont certes un peu lourds, et avaient été mis en balance, lors de l'élaboration du problème, avec des méthodes bien différentes : ils ont l'avantage de se rattacher à une figure plane assez familière : un candidat a très bien vu, et l'a signalé, que l'on démontre, en somme, sans le citer, un théorème de Salmon relatif à deux points et leur polaires par rapport à un cercle.

Quant à la valeur (constante) du rapport $\frac{g}{hH}$, elle ne se trouve que dans deux

ou trois copies, et cela, probablement, parce que cette valeur n'était pas donnée dans le texte.

L'existence du plan fixe (π) contenant (Δ) n'est pas nettement définie par la majorité des candidats, leur raisonnement laissant le choix entre l'un ou l'autre de deux plans fixes symétriques par rapport à (P).

Plus loin les candidats ont admis que le faisceau ($\mathcal{F}$) a des points fixes réels, alors qu'il peut très bien, dans les conditions fixées par l'énoncé, être aussi bien à points limites réels.

La fixité des cercles (U) et (U') n'a été démontrée vraiment que dans la meilleure composition. Celle-ci domine par la conscience et la sûreté de méthode de son auteur ; en particulier, il a traité la question de la tangente à (Δ) en un point courant H , d'une manière excellente, à l'aide d'une petite épure.

Tout le problème d'ailleurs se rattachait à une conception annexe de notre « géométrie cotée », qui associerait, pour la représentation des points de l'espace, un cercle orienté à un tel point, dans le plan P de projection, son rayon étant proportionnel à la cote du point et son centre situé en sa projection.

Critiques de détail.

On dénonce avec vigueur les candidats qui tentent d'abuser les correcteurs, ou paraissent le faire, en ne transcrivant pas sur leur copie des calculs intermédiaires et affirment qu'on arrive au résultat. On regrette aussi le manque de figures partielles dans de nombreuses copies, où l'accumulation des constructions sur une même figure générale la rend à peu près illisible. Les figures devraient d'ailleurs être tracées sur une feuille à part et numérotées.

On regrette aussi l'emploi abusif de la notation vectorielle quand il ne s'agit en fait que de mesures algébriques de vecteurs ; ainsi on découvre des formules telles

$$\text{que } \vec{u} \times \vec{v} = k \text{ d'où on déduit } \vec{u} = \frac{k}{v} !$$

Il y a lieu de signaler qu'un candidat s'est vu priver du huitième accessit, auquel il aurait pu prétendre, à cause de la répétition exagérée d'affirmations fausses, mêlées avec des résultats exacts ; on a estimé que ce fait dénote un fâcheux manque de sûreté dans le jugement. Un autre, qui n'avait traité, par contre, que les parties I et II, mais presque parfaitement, a eu un septième accessit.

Palmarès de l'épreuve.

180 concurrents ont pris part à l'épreuve (30 de plus qu'en 1955). Les seize meilleures copies ont été retenues pour une seconde lecture, par tous les correcteurs.

Le jury a décerné deux prix (moyennes sur 20 : 19 et 15) et sept accessits, peu différenciés, avec des notes variant de 13 à 12 ; il y a trois seconds accessits (*ex-æquo*) et, de même, deux cinquièmes accessits.

Le premier prix du concours de 1956 avait eu un troisième prix au concours de 1955, dans la classe de Première ; le second prix avait remporté le premier prix en Première ; le premier accessit de 1956 avait eu le second prix en Première.

Le jury a regretté qu'il y ait une tendance marquée à rapprocher la date des épreuves du Concours général du début, plutôt que de la fin, du dernier trimestre scolaire ; en 1956, l'épreuve, pour la classe de Mathématiques, prit place à onze jours du dimanche de Quasimodo.

Certes, la tâche du Bureau ministériel chargé des concours s'alourdit de plus en plus avec la multiplication des sessions de nos concours de recrutement des maîtres. Cette multiplication est provisoire, affirme-t-on, mais bouleverse dans les classes toutes les traditions secondaires. Si la période de vacances ne comporte plus, désormais, de purgatoire pour les non-reçus au Baccalauréat, puisqu'on envisage de supprimer la seconde session, que tout le monde fasse effort pour assurer à l'année scolaire la plénitude d'emploi désirable.

L'Inspecteur général, président du Jury,

P. ROBERT.

Instructions relatives à l'enseignement des Mathématiques.

L'Institut Pédagogique National vient de publier une brochure (n° 133, E-P/Sd, janvier 1957 ; prix 150 F, franco 180 F) et contenant de nouvelles instructions (complétant celles de 1947) sur l'enseignement des mathématiques, des sciences physiques et naturelles, de l'histoire et de la géographie. On y a joint les anciennes circulaires sur les buts et les méthodes de l'Enseignement du Second Degré, sur la documentation et sur la coordination.

V. LA VIE DE L'ASSOCIATION

Lettre à M. le Ministre de l'E.N.

A la suite de l'arrêté du 23 novembre 1956, modifiant les programmes, nous avons adressé au Ministre la lettre suivante ; elle est restée sans réponse.

MONSIEUR LE MINISTRE,

J'ai l'honneur de porter à votre connaissance la protestation suivante présentée au nom de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, par son Bureau, à propos des modifications de programmes dans les classes préparant au Baccalauréat (Arrêté du 23 novembre 1956).

Le Bureau de l'A.P.M.E.P. déplore que des modifications de programme interviennent en cours d'année scolaire. Les Conseils d'Enseignement et le Conseil Supérieur de l'Education Nationale avaient d'ailleurs souligné les inconvénients d'une telle mesure. Ces inconvénients sont particulièrement ressentis par les professeurs de Mathématiques soucieux de donner à leur enseignement le plus de cohérence possible et le maximum d'efficacité pédagogique. Le développement d'un cours de Mathématiques a ses propres nécessités ; des circonstances extérieures à la logique interne des Mathématiques ne peuvent que diminuer la valeur culturelle de leur enseignement aussi bien que l'efficacité pratique de celui-ci dans la formation scientifique des élèves.

A ces graves objections de forme ou de circonstance, s'ajoutent des raisons de fond contre la méthode employée. L'allègement réel des programmes est possible et souhaitable ; mais, pour cela, il faut refondre les programmes dans un ensemble plus cohérent, à la lumière de l'expérience pédagogique qui augmente toujours et du progrès de la science qui ne s'arrête jamais. Supprimer purement et simplement quelques paragraphes des programmes anciens, c'est rester dans le cadre partiellement vieilli de ces textes.

Au reste, il est regrettable d'ajouter des difficultés nouvelles à l'enseignement des Mathématiques, contribution essentielle à la formation scientifique de la jeunesse, alors que tous les grands services économiques du pays et les personnalités les plus qualifiées dénoncent justement l'insuffisance de notre enseignement qui ne peut former tous les travailleurs scientifiques et tous les techniciens dont la société a besoin.

C'est pourquoi, Monsieur le Ministre, nous avons l'honneur de protester contre les décisions de votre Arrêté du 23 novembre 1956. Nous entendons déclinier toute responsabilité dans les conséquences fâcheuses qu'elles pourront avoir, malgré notre désir de les limiter.

Veuillez agréer, Monsieur le Ministre, l'hommage de notre respectueux dévouement.

G. W.

Le bloc-notes de L'A.P.M.

● **Candidatures pour le renouvellement du Comité.** — Les Collègues désirant poser leur candidature au prochain renouvellement partiel du Comité sont priés de se faire connaître en écrivant à G. Walusinski, dès la réception de ce Bulletin et avant le 7 mars, dernier délai, de telle façon que leur candidature puisse être effectivement signalée dans le Bulletin 184, à paraître fin mars.

● **Les Bulletins.** — Les *Bulletins* 180 et 183 ont paru ou paraissent avec un important retard. Nous prions les Collègues de nous en excuser et les assurons que nous faisons et ferons tous nos efforts pour revenir aux dates normales de publication.

La question du *Bulletin* fera d'ailleurs l'objet d'une discussion approfondie lors de la prochaine Assemblée générale. Dès ce numéro, la nécessité de limiter le nombre de pages, nos moyens financiers étant limités, nous oblige à laisser « sur le marbre » plusieurs articles et à déséquilibrer quelque peu le sommaire de ce numéro.

On retrouvera dans le n° 184 les rubriques « Bibliographie » et « Vie de l'Association ».

● **Les cotisations.** — Une circulaire de rappel a été adressée à tous les Collègues qui, à la date du 15 janvier, n'avaient pas renouvelé leurs cotisations. Nous espérons qu'ils répondront au plus vite en faisant le virement des 600 F au compte de l'Association, Paris 5708-21.

Ainsi qu'il avait été précisé dans les *Bulletins* 179 et 180, les retardataires ne pourront recevoir les fascicules 181 et 182 (*Annales du Bac et du B.E.P.C.*) dont le tirage avait dû être limité à l'effectif des adhérents en règle. Nous regrettons cette impossibilité due à la limitation de nos moyens financiers. Profitons-en pour recommander à tous les Collègues de faire en sorte, à l'avenir, que ces difficultés d'administration ne se reproduisent plus.

Les professeurs qui ont payé leurs cotisations en temps voulu peuvent discrètement questionner leurs Collègues pour savoir s'ils ont bien versé leurs 600 F.

Chaque adhérent peut aussi faire connaître le travail de l'A.P.M., et en particulier son *Bulletin*, à tous ceux qui s'intéressent à l'enseignement des Mathématiques.

On peut souligner à ce propos que le montant de la cotisation est inférieur au prix de beaucoup de romans, tout en correspondant à un volume au moins égal ; il est également inférieur au tarif d'une leçon particulière.

Chacun de nous peut et doit participer à l'accroissement des effectifs de l'A.P.M. : nous contribuerons ainsi à améliorer nos publications et toutes nos réalisations ; nous accroîtrons le rayonnement de l'enseignement des Mathématiques à l'heure de la réforme.

● **Conférences.** — Le programme complet des conférences sur la topologie organisées par la Société Mathématique de France et l'A.P.M. est le suivant :

5° 14 février, M. PRISOT : Notions de topologie générale, procédés de construction d'espaces topologiques ; — 6° 14 mars, M. PRISOT : Espaces compacts et localement compacts ; — 7° 4 avril, M. GODEMENT : Compatibilité de structures algébriques et topologiques, groupes et espaces vectoriels topologiques ; — 8° 2 mai, M. CARTAN : Sur la notion de dimension d'un espace ; — 9° 23 mai, M. SERRE : Etude globale des surfaces et variétés, groupe fondamental ; — 10° 6 juin, M. SCHWARTZ : Éléments d'homologie et applications.

Rappelons que ces conférences ont lieu, aux jeudis indiqués, à 14 h. 15, amphithéâtre Hermite, Institut Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5°.

D'autre part, le *Séminaire d'Histoire des Mathématiques* tiendra les réunions suivantes : 7 février, J. ITARD : Les notations algébriques de Viète ; — 21 février :

R. TATON : Poncelet et les principes de continuité et de dualité ; — 21 mars,
J. ITARD : Les notations algébriques de Descartes. Chaque séance a lieu, au jeudi
indiqué, à l'Institut Poincaré, salle A, à 15 h. 30.

● **Journées d'études sur l'astronomie.** — Le Comité de l'A.P.M. du 27 janvier 1957 a adopté le projet d'organisation de journées d'études sur l'astronomie et son enseignement qui auront lieu à Paris les 14, 15, 16 et 17 avril 1957, sous le haut patronage de M. André DANJON, Directeur de l'Observatoire de Paris, Président de l'Union Astronomique Internationale.

Le programme de ces journées comprend : une conférence inaugurale de M. DANJON, des exposés sur les problèmes de l'enseignement de l'astronomie, les récents progrès de l'astrométrie, de l'astrophysique et de la radioastronomie, par les meilleurs spécialistes français. Les après-midi des 15, 16 et 17 avril seront employés à visiter, de façon approfondie, les Observatoires de Paris, de Meudon et de Nançay (Cher). Pour cette dernière visite du nouvel observatoire de radioastronomie un voyage collectif en autocar est prévu.

Les frais de participation à ces journées seront réduits au maximum et indiqués à tous les intéressés dès que possible. L'organisation de ces journées n'est d'ailleurs possible que si un minimum de 30 participants s'inscrivent *avant le 28 février*. Adresser toute demande de renseignement à G. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11^e, qui assume le secrétariat d'organisation de ces journées ; une circulaire, précisant le programme, les conditions d'hébergement et de déplacement, ainsi que le montant total des frais de participation, sera adressée à tous les Collègues qui le désireront.

Adresser votre inscription *sans tarder*, à l'adresse indiquée, en versant un acompte de 500 F au C.C.P. de G. WALUSINSKI, Paris 1171-64.

Il dépend de votre prompt réponse que ces journées puissent être organisées ; l'enseignement de l'astronomie et l'astronomie elle-même en profiteront. Mais vous aussi, en premier lieu.

● **Le matériel d'enseignement mathématique.** — M. le Directeur de l'Enseignement du Second Degré a chargé MM. BIGUENET et WALUSINSKI d'une enquête sur le matériel d'enseignement mathématique.

Une circulaire-questionnaire a été mise au point et porte sur les points suivants : 1^e locaux (aménagement idéal d'une classe de Mathématiques ; salle-laboratoire) ; 2^e instruments et modèles, films et clichés ; 3^e documentation pour l'enseignement des Mathématiques.

Tous les Collègues sont cordialement invités à envoyer leurs avis et suggestions à G. WALUSINSKI. Demandez la circulaire et recueillez des avis : l'enseignement des Mathématiques en profitera.

● **XI^e rencontre internationale de professeurs de Mathématiques.** — Cette XI^e rencontre, organisée par la *Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques*, aura lieu à Madrid, Institut San Isidoro, Calle de Toledo, du 21 au 27 avril 1956 et portera sur le thème : Le matériel d'enseignement mathématique.

Programme. — 21 avril : Arrivée et conférence d'ouverture, « Le rôle du concret en Mathématiques » ; discussion.

22 avril : Formation des sous-commissions du film, du film fixe et des modèles ; réunion des sous-commissions.

23 avril : Ouverture officielle de l'exposition par le Ministre de l'Education Nationale.

23 au 27 avril : Visites de l'exposition et leçons destinées à des usages divers du matériel ; groupes de travail sur : I. Evaluation des méthodes intuitives ; II. Con-

fection et usage des modèles ; III. Comment faire et utiliser un film fixe ; IV. Comment faire et utiliser un film. Ces groupes seront placés sous la direction d'experts internationaux.

27 avril : Séance de clôture et conclusions.

Prix pour la participation à la semaine : 1 250 pesetas (comprenant un hôtel de 1^{re} classe au centre de Madrid, la nourriture, le vin et deux excursions).

Voyage. — Possibilité de billet de groupe à partir de Paris, soit par chemin de fer, soit par avion (plus cher, mais plus rapide et moins fatigant). Indiquer votre préférence sur la demande d'inscription. *Passeport et visa nécessaires pour l'Espagne.*

Inscription. — Demande à envoyer DÈS QUE POSSIBLE à Jean FAÏSSE, 2, square Louis-Gentil, Paris, 12^e. La demande doit être accompagnée d'un dépôt de 3 000 F à verser au C.C.P. de M. Jean FAÏSSE : Paris 5909-08.

● **A propos de MATHESIS.** — En complément à la note de notre collègue MINOIS (cf. *Bulletin* 180) précisons que les abonnements pour la France à MATHESIS peuvent être versés à notre collègue V. THÉBAULT, à Tennie (Sarthe), C.C.P. Rennes 339-03. Abonnement 1957 : 1 500 F.

● **ERRATUM.** — Dans l'article « **Sur l'indépendance des axiomes de la demi-droite** », paru dans notre Bulletin n° 180, lire à la page 115, ligne 4 :

Axiome : 1,4. $A \in E$ et $B \in E$. Si $I \in]AB[$, alors $\dot{I}\bar{A} = -\dot{I}\bar{B}$.

CULTURE SCIENTIFIQUE

QUELQUES BONS LIVRES

DONT LA LECTURE SERA UTILE AUX PROFESSEURS
QUI LES RECOMMANDERONT A LEURS ÉLÈVES

G. GAMOW (Prix Kalinga 1956, Prix international de vulgarisation scientifique). — Un, deux, trois... l'Infini	780 F
E.-P. NORTHROP. — Fantaisies et paradoxes mathématiques	880 F
R.-W. ANDERSON. — Dansons avec les mathématiques	650 F
A. BAKST. — Amusements mathématiques	750 F
H. FRIEDEL. — A la découverte de la géométrie	480 F
J.-L. PELLETIER. — Les mathématiques utiles	650 F

En librairie et chez

DUNOD 92, Rue Bonaparte-PARIS 6^e -- C.C.P. 75-45

GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VI° — DANton 05-10

CHATTELUN (Lucien)

CALCUL VECTORIEL

Tome I : Algèbre. Algèbre Linéaire. Applications. In-8° (16-25), VIII-605 pages (1952) 4.800 F

EINSTEIN (Albert)

LETTRES A MAURICE SOLOVINE

Reproduites en fac-similé et traduites en français avec une introduction et trois photographies. In-4° (21-27), 139 pages (1956) 1.800 F

PASCAL (B.)

TRAITE DE L'EQUILIBRE DES LIQUEURS ET DE LA PESANTEUR DE LA MASSE DE L'AIR

Reproduction en fac-similé de l'édition de 1819. In-8° (14-22,5), de XXVIII-106 pages, 4 planches (1956) 800 F

Œuvres de Henri POINCARÉ

Tome XI, publié avec la collaboration de Gérard Petiau, Maître de Recherches.

MEMOIRES DIVERS HOMMAGE A HENRI POINCARÉ LIVRE DU CENTENAIRE DE HENRI POINCARÉ (1854-1954)

In-4° (23-28), 661 pages (1956). Broché 9.000 F
Cartonné 9.500 F

*Documentation envoyée sur demande
ainsi que tous renseignements sur les ouvrages scientifiques et techniques
des Autres Editeurs.*

LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN

8, Rue Férou - Paris VI^e

Nouveauté :

G. CASANOVA

*Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale) au Lycée Janson-de-Sailly*

Cours de Mathématiques spéciales I

**Nombres - Vecteurs
Algèbre linéaire**

..... **900 F**

LES APPLICATIONS TECHNIQUES DE LA LOGIQUE

PAR M. TOUCHAIS

Ingénieur-conseil, Ingénieur A. et M. et E.S.E.

XX-84 pages 16 X 25, avec 54 figures, 1956. Broché **940 F**

En vente dans toutes les bonnes librairies et chez

92, rue Bonaparte



Éditeur, Paris (6^e)

Le Gérant : G. WALUSINSKI.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 90.378. — Dépôt légal : I-1957

DELAGRAVE

COURS DE MATHÉMATIQUES F. BRACHET et J. DUMARQUÉ **AIDE-MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUES**

1^{re} A, B, C, Moderne

Un cahier de 20 pages abondamment illustrées 95 »

G. WALUSINSKI

AIDE-MÉMOIRE DE COSMOGRAPHIE

Classes de Mathématiques, Philosophie et Sciences expérimentales 190 »

COURS F. BRACHET et J. DUMARQUÉ

TABLES de LOGARITHMES

à 5 décimales. Nombres, degrés, grades.

Broché : 360 » Cartonné : 475 »

TABLES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES ET TABLES NUMÉRIQUES USUELLES

Dépliant sur papier fort 35 »

BORDAS

COLLECTION DES GUIDES PRATIQUES **MATHÉMATIQUES du B.E.P.C.**

par

ROBERT ARDRE

Professeur au lycée Chaptal

I. ALGÈBRE

256 pages : 380 F

II. GÉOMÉTRIE

272 pages : 380 F

Ces ouvrages sont conçus pour offrir aux élèves :

- un exposé complet mais largement traité du programme ; il permettra aux candidats une révision facile des notions essentielles ;
- un grand nombre d'exercices, attachés à chaque chapitre ; toutes les solutions sont données dans un chapitre spécial ;
- une série de problèmes plus complexes avec leur solution et une dernière série de problèmes à résoudre.

Rappel :

Mathématiques 1^{re} ABCMT, par J. Parrod 480 F

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

ARITHMÉTIQUE 6° (<i>Jusqu'à épuisement</i>)	220 F
ARITHMÉTIQUE 6° — Nouvelle édition mise à jour	330 »
<i>Corrigé des exercices de 6°</i>	300 »
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5°	185 »
GÉOMÉTRIE 5° et 4°	400 »
ARITHMÉTIQUE 5° — Nouvelle édition mise à jour	450 »
<i>Corrigé des exercices de 5°</i>	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4°	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3°	390 »
GÉOMÉTRIE 3°	325 »
GÉOMÉTRIE 5°, 4°, 3°	800 »
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages cartonné).	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3° MODERNE COURT.	100 »
ALGÈBRE 2° A.B.C.M.	500 »
GÉOMÉTRIE 2° A.B.C.M.	465 »
ALGÈBRE 1 ^{re} A.B.	180 »
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1 ^{re} C.M.	550 »
GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A.B.C.M.	500 »

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	390 »
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	410 »

NOUVEAUTÉ

DICTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES

par A. JOLY

Cet ouvrage est précédé de **Conseils pour la rédaction des devoirs et de Tables numériques usuelles.**

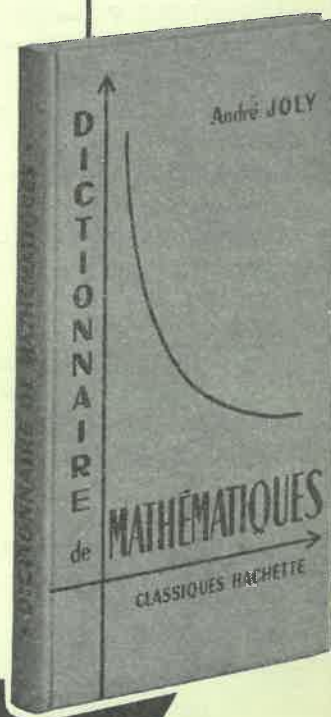
Il contient le **Répertoire alphabétique** de toutes les définitions, règles, propriétés, relations qu'un élève doit apprendre au cours de ses études en vue des examens.

C'est un « **Guide** », c'est-à-dire un ouvrage simple qui permet de retrouver un renseignement vu dans un manuel.

Un **chiffre distinctif** indique à quelle classe s'adresse chaque article.

C'est un **outil de travail** qui permettra la recherche des problèmes et la préparation aux examens. Des tableaux, des dessins, des exemples ajoutent à la clarté de l'exposé.

Un volume 11,5 x 21,5 cm de 256 pages, illustré de 460 figures, broché . . . **380 »**
cartonné **490 »**



HACHETTE