II. ESSAIS

TENDANCES DES MATHÉMATIQUES MODERNES*

par Laurent SCHWARTZ
Professeur à la Sorbonne

Les Mathématiques sont la plus abstraite des sciences et en même temps la plus indépendante du monde extérieur et de la vie courante ; aussi est-il pratiquement impossible de parler des Mathématiques modernes à des non-mathématiciens. Il n'y a pas d'ouvrages de vulgarisation mathématique comme il y en a pour la physique, la chimie, la biologie ; les livres d'histoire des Mathématiques portent avant tout sur les Mathématiques de l'Antiquité. Il est toutefois possible, et c'est ce que j'essaierai de faire ici, d'indiquer certaines tendances générales de la Mathématique actuelle.

Les fondements des Mathématiques

Tout d'abord, les Mathématiques se sont émancipées, de façon, semble-t-il, définitive, de l'espèce de « physique expérimentale » qu'elles constituaient autrefois. Des générations de géomètres, depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours, ont étudié la géométrie plane, en croyant être rigoureux, alors qu'ils n'avaient jamais défini la droite, le plan, les distances, les angles, l'égalité des figures, l'orientation, etc... Il est pourtant évident que si l'on définit la droite comme une ligne dont un fil tendu donne une bonne image, on fait de la physique et non des Mathématiques, et qu'on ne peut pas espérer raisonnablement démontrer une propriété quelconque de cette droite. Le mot « droite » rendait d'ailleurs possibles toutes les illusions : une figure qu'on a eu l'imprudence d'appeler « droite » ne peut plus « raisonnablement » ne pas posséder toutes les propriétés que nous voyons aux lignes droites dans notre univers, et il deviendra impossible de savoir ce qu'il faut ou ne faut pas démontrer, ce qui est démontrable et ne l'est pas, etc... Ce point de vue de physicien est aujourd'hui complètement abandonné. Le physicien doit trouver les lois de notre monde par l'expérience, le mathématicien doit poser en principe un certain nombre d'*axiomes* qui sont, en quelque sorte, les règles du jeu qu'il va utiliser ; de ces axiomes il déduira des théorèmes, par des démonstrations rigoureuses. Ainsi le joueur d'échec pose au départ les règles du jeu d'échec, parfaitement arbitraires et indémontrables ; ces règles posées, il pourra jouer correctement la partie ; de même, le géomètre dira que le plan est un ensemble dont les éléments sont appelés points dans lequel il y a des sous-ensembles appelés droites vérifiant certaines propriétés (parmi lesquelles : par deux points distincts passe une droite et une seule), etc... L'énoncé des axiomes de la géométrie est assez long ; plusieurs de ces axiomes sont couramment considérés dans l'Enseignement Secondaire comme des théorèmes qu'il faut démontrer et pour cela on « découpe » un triangle avec des « ciseaux » pour le porter ailleurs, on « plie » la feuille de papier en deux, alors que les Mathématiques ne connaissent évidemment ni ciseau, ni papier ; l'un de ces axiomes est celui d'Euclide, sur les parallèles, qui ne mérite pas plus que les autres une place à part, de même qu'aux échecs les mouvements du cheval ne méritent pas plus une place à part que ceux du fou ou de la tour. On peut poser l'axiome d'Euclide et obtenir une géométrie eucli-

(*) Article publié dans le n° 107 (mai 1957) de *L'Ecole du Grand Paris*, organe du Syndicat de l'Enseignement de la Région Parisienne (F.E.N.) et reproduit ici avec l'aimable autorisation de l'auteur et des responsables du S.E.R.P.

dienne, ou poser son contraire, et obtenir des géométries non euclidiennes (comme on peut, avec les mêmes cartes et des règles différentes, jouer à la belote ou à la manille), mais tous les autres axiomes laissent de pareils choix et il existe une infinité de géométries possibles et d'ailleurs dignes d'intérêt ; il faut seulement que les axiomes ne soient pas contradictoires, c'est-à-dire qu'on ne puisse pas, à partir d'eux, démontrer à la fois une proposition et son contraire.

Cette axiomatisation de la géométrie date déjà du XIX^{e} siècle. Mais l'algèbre a suivi le même trajet ; les nombres réels (c'est-à-dire rationnels et irrationnels) ne sont plus des « données *a priori* », on les construit par déduction rigoureuse à partir des nombres rationnels, qui, eux-mêmes, se construisent à partir des nombres entiers. Les nombres entiers, eux-mêmes, ne sont plus des données de la nature, nécessaires au berger pour compter ses moutons, on les construit à partir des axiomes de la théorie des ensembles, c'est-à-dire des règles de la logique. Et ces règles de la logique enfin ne sont plus des absolus. Nous posons au début des Mathématiques les règles logiques dont nous nous servirons, ce sont les axiomes des Mathématiques en général. Nous aurions pu en poser d'autres : les Mathématiques, fondées sur d'autres règles de logique, ne seraient pas erronées, elles ont les mêmes droits à l'existence ; nous ne nous y intéressons que médiocrement, car elles sont trop loin de notre monde physique, mais c'est leur seul titre d'infériorité. Une école mathématique, dite intuitionniste, fait des Mathématiques où la règle du *tiers exclu* n'est pas utilisée : ils supposent que l'on n'a pas nécessairement une propriété ou sa négation, c'est-à-dire que la négation de la négation n'est pas nécessairement l'affirmation : pour eux, un nombre qui n'est pas irrationnel, n'est pas nécessairement rationnel. La Mathématique ainsi construite est extrêmement compliquée ; elle n'a, semble-t-il, que l'intérêt historique et démonstratif de donner un exemple d'une Mathématique cohérente fondée sur d'autres principes logiques que ceux de la vie courante.

La classification en Mathématiques. — Les structures

Les animaux et végétaux ont été autrefois classés d'après de vagues ressemblances extérieures. La baleine était un poisson puisqu'elle vivait dans l'eau, la chauve-souris un oiseau puisqu'elle volait. La classification zoologique et botanique repose aujourd'hui sur de toutes autres bases que l'habitat ou la couleur ; elle cherche un certain nombre de caractères fondamentaux, qui permettent de classer les êtres vivants, d'abord en embranchements, puis chaque embranchement en classes, chaque classe en ordres, puis ensuite en familles, genres, espèces. Un naturaliste même ignare trouvera tout de suite que telle plante exotique qu'il voit pour la première fois, fait partie de telle famille, voire de tel genre ; l'examen de quelques traits caractéristiques lui suffira.

De même, l'ancienne distinction en Mathématiques, entre algèbre, géométrie, analyse, arithmétique, a perdu beaucoup de sa valeur ou, tout au moins, beaucoup changé. Ce qui distingue l'ensemble des nombres entiers, dont l'étude a pu s'appeler l'arithmétique, de l'ensemble des points d'un plan, dont l'étude s'est appelée la géométrie, ce sont les *structures* que portent ces ensembles. Il y a un grand nombre de structures possibles, mais un nombre très limité de types de structures utilisables dans les Mathématiques courantes.

On dit qu'on a défini sur un ensemble E une *structure algébrique* si l'on a défini une *loi de composition* qui, à deux éléments quelconques x, y, de E, en fait correspondre un troisième noté $f(x, y)$. Si cette loi est associative [c'est-à-dire si

$$f(f(x, y) = f(x, f(y))],$$

s'il existe un *élément neutre* e de E tel que $f(e, x) = f(x, e) = x$ pour tout x de E, et si tout élément x de E a un symétrique noté $s(x)$, tel que

$$f(x, s(x)) = f(s(x), x) = e,$$

on dit que E, muni de cette loi, est un groupe.

Par exemple, si E est l'ensemble R des nombres réels $\neq$ O, et si la loi de composition est la multiplication, $f(x, y) = xy$, E est un groupe ; ici $e = 1$, et

$$s(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

est l'inverse de x (on peut prendre comme loi la multiplication si E est l'ensemble de tous les nombres réels, y compris O, mais alors O n'a pas d'inverse et E n'est pas un groupe).

Si maintenant E est l'ensemble de tous les nombres réels, et si la loi de composition est l'addition, $f(x, y) = x + y$, E est un groupe, avec $e = 0$, et $s(x) = -x$, opposé de x.

Si alors nous considérons l'ensemble R des nombres réels, nous voyons qu'il y a une structure assez complexe ; il est muni d'une première loi de composition, l'addition, pour laquelle il est un groupe ; il est aussi muni d'une loi de multiplication, pour laquelle il n'est pas un groupe, mais si on lui retire o, élément neutre de l'addition, il devient un groupe pour la multiplication ; en outre, cette addition et cette multiplication ne sont pas arbitraires, elles sont commutatives, et reliées entre elles par certaines conditions (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $(x + y)\, z = xz + yz$) ; ces propriétés permettent de dire que l'ensemble R, muni de ces deux lois, est un *corps*. Les structures algébriques sont celles qui ne font intervenir que des lois de composition. Mais comme un même ensemble peut porter diverses lois de composition, agencées les unes aux autres de façon plus ou moins compliquée, on obtient des structures de plus en plus riches, dont il est possible de faire une classification détaillée, et qui portent des noms tels que groupe, anneau, module, corps, espace vectoriel. algèbre, algèbre de Lie, et parmi les anneaux, anneaux d'Artin, anneaux noethériens, etc... Le mathématicien qui, étudiant un anneau déterminé, reconnaîtra un anneau noethérien, en connaîtra tout de suite les propriétés fondamentales, et saura le type de méthodes à utiliser pour démontrer les théorèmes qui le préoccupent.

Une structure topologique est de nature tout à fait différente. Elle est introduite pour définir les suites convergentes. Une suite d'éléments $x_1, x_2 \ldots, x_n \ldots$ de E sera dite convergente de limite x, si, quel que soit le voisinage V de x, il existe un entier N (V) tel que x soit dans V pour $n > N(V)$, autrement dit si, à partir d'une certaine valeur de n tous les x_n sont dans V. Mais qu'entendons-nous par *voisinage* V *de x ?* Toute tentative de définir de tels voisinages *a priori* est vouée à l'échec, et précisément on dit que E est un *espace topologique* ou qu'il est muni d'une *structure topologique* si, pour chaque élément x de E, on s'est donné une collection de sous-ensembles de E, contenant x, appelés les voisinages de x ; ces collections ne sont pas arbitraires, mais presque, elles ne sont astreintes qu'à quelques conditions très simples (par exemple : l'intersection de deux voisinages de x doit être un voisinage de x). Il y a sur un ensemble E une infinité de topologies possibles, comme il y a une infinité de structures algébriques.

Sur l'ensemble R des nombres réels, on peut définir une topologie comme suit : un voisinage de x est un ensemble contenant au moins un intervalle non nul de centre x ; avec cette topologie, la convergence des suites est celle que tout le monde connaît en analyse classique. L'étude des structures topologiques permet aussi de classer les espaces suivant les propriétés de leur topologie : il y a des espaces discrets, compacts, localement compacts, connexes, localement connexes, simplement connexes, métrisables, etc... Sur l'ensemble R des nombres réels, nous avons à la fois une structure algébrique de corps, et une structure topologique ; ces deux structures sont reliées entre elles de façon très particulière, puisque la loi d'addition et la loi de multiplication sont continues pour la topologie (la limite d'une somme est la somme des limites la limite d'un produit le produit des limites) ; on dit que R est un *corps topologique*. En combinant ainsi des structures algébriques et topologiques et d'autres

encore, on obtient un grand nombre de structures qu'on peut encore classer par des noms tels que : espace vectoriel topologique, espace de Hilbert, variété différentiable, variété analytique, espace fibré, etc... Une équipe de mathématiciens, sous le nom de Nicolas Bourbaki, a entrepris une publication des Mathématiques à partir du début, suivant cette classification par structures. Il y a déjà dix-neuf fascicules parus, groupés en livres (Livre I : Théorie des ensembles ; Livre II : Algèbre ; Livre III : Topologie générale ; Livre IV : Fonctions d'une variable réelle ; Livre V : Espaces vectoriels topologiques ; Livre VI : Intégration, etc...). L'étude des nombres réels, utilisant à la fois les structures algébriques et topologiques, ne vient qu'au Livre III, après neuf fascicules, alors qu'autrefois la théorie des ensembles était intimement mêlée aux nombres réels. Par contre, le théorème de Pythagore et le développement d'une fonction périodique en série de Fourier sont reliés aux mêmes propriétés des espaces de Hilbert. Naturellement, une telle architecture des Mathématiques ne tient absolument pas compte de la pédagogie ; mais un traité de zoologie étudiera d'abord les êtres unicellulaires, puis les êtres de plus en plus compliqués depuis les éponges jusqu'à l'homme qui, lui aussi, viendra tard parce que sa structure est très compliquée. Devant un problème quelconque, le mathématicien un peu averti verra immédiatement de quelles structures il s'agit, où se place son problème dans l'architecture des Mathématiques, quelles méthodes sont utiles pour le résoudre. Naturellement tous les problèmes ne sont pas pour cela résolus mais bien simplifiés. Les Mathématiques modernes sont devenues très abstraites, les physiciens ne s'y reconnaissent plus, on ne s'y reconnaît plus toujours d'une génération à la suivante, mais les jeunes générations y sont très à leur aise. Et surtout les Mathématiques ont acquis une unité qu'elles n'avaient pas avant.

L. S.