ESPACES COMPACTS ET LOCALEMENT COMPACTS *

par Ch. PISOT
Professeur à la Sorbonne

La notion de limite dans les espaces fonctionnels conduit à donner une importance particulière aux espaces tels que toute famille infinie possède au moins une fonction limite. Cette propriété, c'est celle des ensembles infinis bornés de nombres réels, exprimée par le théorème de Bolzano-Weierstrass. L'importance de cette propriété dans la théorie des fonctions de variables complexes a été mise en relief par la théorie des « familles normales » de M. Montel. Mentionnons également le calcul des variations qui a puissamment contribué à l'élaboration de la topologie générale.

Il est cependant apparu que le théorème de Bolzano-Weierstrass n'était pas toujours la formulation la plus adaptée aux problèmes qui se posaient dans les espaces fonctionnels. Une propriété plus satisfaisante, équivalente à Bolzano-Weierstrass pour l'espace numérique R, est fournie par le théorème de Borel-Lebesgue, et c'est ce dernier qui va nous permettre de définir des espaces extrêmement utiles.

ESPACE COMPACT. — Un espace E est dit *compact* s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

1° E *est séparé.*

2° *De tout recouvrement de* E *par des ouverts, on peut extraire un recouvrement formé par un nombre fini de ces ouverts.*

Ainsi, tout intervalle borné de R est compact, mais R tout entier ne l'est pas.

La définition d'un espace compact peut, par dualité, être donnée sous la forme suivante : E est compact si E est séparé et si toute famille Φ de fermés de E, telle que toute sous-famille finie ait une intersection non vide, possède la propriété que l'intersection complète de Φ est non vide. Cette dernière définition montre immédiatement que, si, dans un espace compact, on a une famille de fermés Φ ordonnés par inclusion, c'est-à-dire $\Phi_{i+1} \subset \Phi_i$, l'intersection complète de tous les Φ_i est non vide. Le théorème de Bolzano-Weierstrass en résulte pour tout espace compact E. En effet, soit une famille infinie d'éléments a_n de E, soit A_n l'ensemble des a_i avec $i \geq n$, $\overline{A}_n$ la fermeture de A_n, alors $\overline{A_{n+1}} \subset \overline{A}_n$; l'intersection complète des $\overline{A}_n$ n'est donc pas vide et chacun de ses éléments est une valeur d'accumulation de l'ensemble des a_n.

Remarquons ici que la réciproque, à savoir un espace séparé possédant la propriété énoncée par le théorème de Bolzano-Weierstrass, est

* Conférence prononcée le 14 mars 1957, sixième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

un espace compact, n'est pas vraie en général ; nous verrons cependant qu'elle l'est pour les espaces métriques.

On voit facilement qu'un sous-espace d'un espace compact est compact, de même qu'une réunion ou une intersection d'un nombre fini. Un produit d'un nombre fini d'espaces compacts (au sens de produit d'espaces topologiques) est compact ; ainsi, le tore à n dimensions T^n est compact, car la circonférence l'est.

CONTINUITÉ ET COMPACITÉ. — On a le théorème suivant : *Une application continue f d'un espace compact* E *dans un espace séparé* F *transforme* E *en un espace f(E) compact.*

En effet : 1° L'espace f(E) est séparé, comme sous-espace de l'espace séparé F.

2° Soit un recouvrement de l'espace f(E) par des ouverts ω_i de f(E) ; ces ouverts sont tels que $\omega_i = f(E) \cap \Omega_i$, où Ω_i est un ouvert de F. Il résulte de la continuité de f que les ensembles $f^{-1}(\omega_i) = f^{-1}(\Omega_i)$ sont des ouverts de E et ils forment un recouvrement de E. Comme E est compact, on peut en extraire un recouvrement fini, qui, par l'application f, donne un recouvrement fini de f(E), extrait des ouverts ω_i ; donc f(E) est compact.

En particulier, si f est une fonction numérique, donc F = R, alors le théorème précédent s'applique. Il s'ensuit que l'image continue d'un compact E dans R est compacte ; en particulier, f(E) est alors borné et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure pour des éléments particuliers de E.

ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS. — Tout espace métrique est séparé ; *pour qu'un espace métrique soit compact, il faut et il suffit que le théorème de Borel-Lebesgue soit vrai.* S'il est compact, il en résulte, comme on a vu, le théorème de Bolzano-Weierstrass. Mais, réciproquement, pour de tels espaces, ce dernier théorème entraîne la compacité.

En effet, considérons un recouvrement d'un espace métrique E par des ouverts ω_i. Pour tout élément x de E, soit $\rho(x, i) \geq 0$, le rayon de la plus grande boule ouverte, de centre x, contenue dans ω_i, et soit $\rho(x) = \sup \rho(x, i)$ pour tous les ouverts ω_i. Si $d(x, x')$ désigne la distance entre x et x', on a :

$$|\rho(x, i) - \rho(x', i)| \leq d(x, x'),$$

donc $|\rho(x) - \rho(x')| \leq d(x, x')$; par suite, $\rho(x)$ est une fonction continue sur E. Comme $\rho(x) > 0$, pour tout x de E, car x est contenu dans au moins un ω_i, on voit facilement que Bolzano-Weierstrass entraîne que la borne inférieure $\rho = \inf \rho(x)$ sur E vérifie $\rho > 0$. Pour tout x, il y a donc un indice i_x tel que $\rho(x, i_x) > \frac{\rho}{2}$. Si x_1 est alors un élément tel que $\omega_1 = \omega_{i_{x_1}}$ ne recouvre pas E, on prend un élément x_2, non contenu dans ω_1, et ainsi de suite. La suite $x_1, x_2, \ldots$ ne peut avoir de valeur d'accumulation, car la distance mutuelle de deux de ses éléments dépasse $\frac{\rho}{2}$; si donc le théorème de Bolzano-Weierstrass est vrai dans E,

la suite est finie et nous avons extrait de la famille des ω_i un nombre fini recouvrant E.

CONTINUITÉ UNIFORME. — Soit E un espace métrique, f une application continue de E dans un espace métrique F. Si E est compact, l'application f est « uniformément continue ». En effet, à tout x de E et à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $\eta_x > 0$ tel que $d_E(x, y) < \eta_x$ entraîne $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Or, l'ensemble des y vérifiant $d_E(x, y) < \frac{1}{2}\eta_x$ est une boule ouverte B_x de E, et l'ensemble des B_x forme un recouvrement de E. Si E est compact, on peut en extraire un recouvrement fini B_{x_i}.

Soit alors $\eta = \min \frac{1}{2}\eta_{x_i}$; considérons un élément x de E, il est contenu dans l'une des B_{x_i}, soit B_{x_1}. Soit y un autre élément de E tel que $d(x, y) < \eta$, alors $d(y, x_1) \leqq d(y, x) + d(x, x_1) < \eta + \frac{1}{2}\eta_{x_1} \leqq \eta_{x_1}$, donc y est aussi contenu dans B_{x_1} et on a :

$$d_F(f(x), f(y)) \leqq d_F(f(x), f(x_1)) + d_F(f(x_1), f(y)) < 2\varepsilon.$$

Un espace métrique E est appelé *bien enchaîné* si, à deux éléments a et b quelconques de E et à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une *chaîne* $a = a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = b$ d'un nombre fini d'éléments de E (pouvant dépendre de ε), tels que $d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$. Ainsi, un intervalle borné et fermé de R est bien enchaîné, de même un intervalle borné et fermé de Q.

Si E est un espace métrique compact bien enchaîné, et f une application continue sur un espace métrique F, alors f(E) est compact, f est uniformément continue et par suite f(E) est bien enchaîné.

Un espace compact métrique bien enchaîné est *connexe*, c'est-à-dire ne peut pas être décomposé en deux ensembles fermés disjoints non vides. En effet, dans le cas contraire, soient E′ et E″ ces deux fermés non vides disjoints. On a $\inf d(x', x'') \neq 0$ pour $x' \in E'$, $x'' \in E''$, sinon il y aurait $x'_0 \in E$ et $x''_0 \in E''$ avec $d(x'_0, x''_0) = 0$, donc $x'_0 = x''_0$, et E′ et E″ ne seraient pas disjoints.

En particulier, *sur* R, *tout compact bien enchaîné est un intervalle fermé*. Par suite, toute fonction continue numérique f sur un compact métrique E prend toute valeur entre $\sup f$(E) et $\inf f$(E).

ESPACE LOCALEMENT COMPACT. — L'espace R n'est pas compact, cependant, au voisinage de chaque point ; il se comporte comme un espace compact. De façon précise, nous dirons qu'un espace E est *localement compact* si E est séparé et si tout point de E possède un voisinage compact. Ainsi, R est localement compact.

Un espace localement compact peut être complété par l'adjonction d'un seul élément, dit *point à l'infini*, de sorte que le nouvel espace obtenu soit compact. Pour cela, considérons les complémentaires dans E des ensembles de E dont la fermeture est compacte. Ces complémentaires forment une famille V d'ensembles vérifiant les propriétés suivantes : tout ensemble contenant un ensemble de V appartient à V ; toute inter-

section finie d'ensembles de V appartient à V. Ces propriétés font partie de celles qui définissent les voisinages d'un élément en topologie. On définira alors un élément ω supplémentaire, en posant comme définition que la famille V constitue la famille des voisinages de ω. L'ensemble $E + \omega$ est alors compact, car soit un recouvrement de $E + \omega$, considérons un ouvert Ω contenant ω, le complémentaire de cet ouvert est alors un compact et peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts Ω_i. Les ouverts Ω_i et Ω forment ainsi un recouvrement fini de $E + \omega$.

ESPACE MÉTRIQUE COMPLET. — Un espace métrique est dit *complet* si toute « suite de Cauchy » est convergente. L'ensemble R des nombres réels est complet, tandis qu'il n'en est pas ainsi de l'ensemble Q des nombres rationnels. On a la proposition suivante :

Tout espace métrique compact est complet.

En effet, soit a_n une suite de Cauchy, c'est-à-dire à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer n tel que $d(a_h, a_k) < \varepsilon$ pour tout $h \geq n$, $k \geq n$. Soit A_m l'ensemble des a_i avec $i \geq m$ et $\overline{A}_m$ la fermeture de A_m. On a $\overline{A}_{m+1} \subset \overline{A}_m$. Si a' et a'' sont deux éléments de $\overline{A}_n$, on a :

$$d(a', a'') \leq d(a', a_h) + d(a_h, a_k) + d(a_k, a''),$$

avec $h \geq n$, $k \geq n$; à tout $\varepsilon' > 0$, on peut associer h et k tels que $d(a', a_h) < \varepsilon'$ et $d(a_k, a'') < \varepsilon'$, donc $d(a', a'') \leq d(a_h, a_k) \leq \varepsilon$, car la suite a_n est une suite de Cauchy. Soit A l'intersection complète de tous les $\overline{A}_n$. Comme l'espace est compact, A n'est pas vide. Si a et b sont deux éléments de A, ils appartiennent à tout $\overline{A}_n$, donc $d(a, b) \leq \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$, et par suite $d(a, b) = 0$, $b = a$, et A est formé du seul élément a. La suite de Cauchy a donc une seule valeur d'accumulation, c'est une suite convergente.

ESPACE DE BANACH. — Nous définirons plus loin la notion de valeur absolue dans un corps K. Soit alors E un espace vectoriel sur un corps K dans lequel est définie une valeur absolue, notée $|\alpha|$ pour $\alpha \in K$. On appelle *norme* une application $x \to \|x\|$ de E sur les nombres réels positifs vérifiant les propriétés suivantes :

1° $\|x\| > 0$ *si* $x \neq 0$ *et* $\|0\| = 0$.
2° $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *pour tout* α K.
3° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

L'espace E s'appelle alors *espace vectoriel normé*.

Un tel espace est un espace métrique lorsque l'on pose :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Un corps K peut toujours être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même. On appelle alors *valeur absolue* d'un élément $\alpha \in K$, notée $|\alpha|$, une norme sur cet espace vectoriel.

DÉFINITION : Un espace vectoriel sur un corps possédant une valeur absolue est appelé *espace de Banach* s'il est *normé et complet*.

COMPLÉTION D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ. — Tout espace vectoriel E possédant les propriétés précédentes, mais sans être complet, peut toujours être plongé dans un espace $\widehat{E}$ de Banach.

En effet, soit $X = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ une suite de Cauchy dans E, c'est-à-dire, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer n tel que $\|x_h - x_k\| < \varepsilon$ pour tout $h \geq n$, $k \geq n$. Soit $Y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ une autre suite de Cauchy.
On pose $\alpha X = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n, \ldots)$ pour $\alpha \in K$,
et $X + Y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$.
On voit immédiatement que αX et $X + Y$ sont des suites de Cauchy, celles-ci forment donc un nouvel espace vectoriel sur K.

On a $\|x_h\| = \|x_h - x_k + x_k\| \leq \|x_h - x_k\| + \|x_k\|$,
donc $\|x_h\| - \|x_k\| \leq \|x_h - x_k\| < \varepsilon$ si $h \geq n$, $k \geq n$.
De même, en échangeant x_h et x_k, on a :

$$\|x_k\| - \|x_h\| \leq \|x_k - x_h\| < \varepsilon.$$

La suite de nombres réels $\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|, \ldots$ est donc une suite de Cauchy, c'est-à-dire elle converge vers un nombre réel ≥ 0.
Nous posons $\|X\| = \lim_{n=\infty} \|x_n\|$.
On aura $\|\alpha X\| = \lim_{n=\infty} \|\alpha x_n\| = |\alpha| \, \|X\|$
et $\|X + Y\| = \lim_{n=\infty} \|x_n + y_n\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

Par contre, $\|X\| = 0$ n'entraîne pas $X = 0 = (0, \ldots, 0, \ldots)$, donc $\|X\|$ n'est pas une norme. En effet, soit ζ l'ensemble de toutes les suites $Z = (Z_1, \ldots, Z_n, \ldots)$, pour lesquelles $\lim_{n=\infty} \|Z_n\| = 0$. Ces suites sont des suites de Cauchy et si $Z \in \zeta$ et $Z' \in \zeta$, on a $\alpha Z \in \zeta$ et $Z + Z' \in \zeta$; pour toutes ces suites, $\|Z\| = 0$. La relation $X' \backsim X$ si $X' - X \in \zeta$ est une relation d'équivalence. Soit ξ la classe d'équivalence de X et η celle de Y. On posera $\alpha\xi =$ classe de αX et $\xi + \eta =$ classe de $X + Y$; ces opérations sont définies ainsi pour les classes et l'ensemble de ces classes constitue un espace vectoriel $\widehat{E}$. La classe ζ est l'élément 0 de $\widehat{E}$.

Si $X' \backsim X$, on a $X' = X + Z$, donc $\|X'\| \leq \|X\|$, car $\|Z\| = 0$, de même $\|X\| \leq \|X'\|$, donc $\|X'\| = \|X\|$. Nous posons $\|\xi\| = \|X\| = \|X'\|$; $\|\xi\|$ est alors une norme ; en effet, les propriétés 2 et 3 sont vérifiées et 1 également, car, si $\|\xi\| = 0$, on a $\|X\| = 0$, donc $\lim_{n=\infty} x_n = 0$ et $X \in \zeta$, donc $\xi = \zeta$.

Si $x \in E$, posons $\widehat{x} =$ classe de $(x, x, \ldots, x, \ldots)$, alors $\widehat{\alpha x} = \alpha \widehat{x}$ et $\widehat{x + y} = \widehat{x} + \widehat{y}$, il y a donc isomorphie de E avec un sous-espace de $\widehat{E}$; on identifie ce dernier sous-espace de $\widehat{E}$ avec E, de sorte que $\widehat{E}$ est un espace vectoriel normé contenant E.

Le procédé appliqué au corps K donne un espace vectoriel $\widehat{K}$ et on montre que $\widehat{K}$ est lui-même un corps. Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ est une suite de

Cauchy pour la valeur absolue de K, sa classe α est dans $\widehat{K}$. D'autre part, la suite $(\alpha_1 x, \ldots, \alpha_n x, \ldots)$ est alors une suite de Cauchy de E, donc sa classe appartient à $\widehat{E}$; on la notera $\alpha.\widehat{x}$. On en déduit sans peine que $\widehat{E}$ est un espace vectoriel sur $\widehat{K}$.

L'espace vectoriel $\widehat{E}$ est *complet*. En effet, soit $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ une suite de Cauchy de $\widehat{E}$, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que :

$$\|\xi_h - \xi_k\| < \varepsilon \quad \text{si } h \geq n \text{ et } k \geq n.$$

Soit $\xi_m =$ classe de X_m, avec $X_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,p}, \ldots)$

On a $\|\xi_m - \widehat{x_{m,p}}\| = \lim_{q=\infty} \|x_{m,q} - x_{m,p}\| \leq \varepsilon$ si $p \geq N_m$. Associons à ξ_m l'élément $\widehat{y_m}$ tel que $y_m = x_{m,N_m}$, alors on aura $\|\xi_m - \widehat{y_m}\| \leq \varepsilon$ et, par suite :

$$\|\widehat{y_h} - \widehat{y_k}\| \leq \|\widehat{y_h} - \xi_h\| + \|\xi_h - \xi_k\| + \|\xi_k - \widehat{y_k}\| < 3\varepsilon$$

pour $h \geq n$, $k \geq n$. Or $\|\widehat{y_h} - \widehat{y_k}\| = \|y_h - y_k\|$,
la suite $Y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ est donc une suite de Cauchy de E, et si $\eta =$ classe de Y, on a :

$$\|\eta - \xi_m\| \leq \|\eta - \widehat{y_m}\| + \|\widehat{y_m} - \xi_m\|.$$

Mais $\|\eta - \widehat{y_m}\| = \lim_{p=\infty} \|y_p - y_m\| \leq 3\varepsilon$ si $m \geq n$,

et $\|\widehat{y_m} - \xi_m\| \leq \varepsilon$, donc $\|\eta - \xi_m\| \leq 4\varepsilon$ si $m \geq n$;

ainsi, $\xi_m \to \eta$ et l'espace $\widehat{E}$ est complet.

Application : Considérons le corps Q des nombres rationnels. En cherchant toutes les valeurs absolues possibles sur Q, on trouve, d'une part la valeur absolue ordinaire, d'autre part la valeur absolue suivante : Soit $p \geq 2$ un nombre premier fixe. Soit $r = \frac{u}{v}$ un nombre rationnel. On peut mettre $\frac{u}{v}$ sous la forme $p^n \frac{u'}{v'}$, où u' et v' ne sont plus divisibles par p et où n est un exposant entier positif, nul ou négatif. On pose $|r|_p = \frac{1}{p^n}$ et on vérifie sans peine que l'on a bien une valeur absolue. En complétant Q par rapport à la valeur absolue ordinaire, on obtient R. En complétant Q par rapport à la valeur absolue $|r|_p$, on définit un nouveau corps complet R_p sur lequel on peut construire une analyse qui permet d'atteindre des résultats impossibles à obtenir par l'analyse sur les nombres réels.

C. P.