36e Année — N° 184 Mars 1957

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDE

ÉTUDE DE CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS ET DE DIFFÉRENTS MODES DE CONVERGENCE (*)

par J. DIXMIER

Maître de Conférences à la Sorbonne

Dans les conférences précédentes relatives aux espaces topologiques, on est parti d'un exemple (l'ensemble des nombres réels) pour s'élever à des axiomes généraux. Historiquement, il a fallu analyser d'autres exemples que celui des nombres réels avant d'élaborer la théorie abstraite. Des exemples très importants ont été fournis par les espaces fonctionnels, c'est-à-dire les espaces dont les éléments sont des fonctions. L'étude approfondie des espaces fonctionnels a commencé à la fin du XIXe siècle.

Dans cet exposé, on va uniquement donner des *exemples* d'espaces fonctionnels, et expliciter, sur ces exemples, certaines des notions générales des précédentes conférences. On ne donnera aucun théorème général sur les espaces fonctionnels.

PREMIER EXEMPLE

Nous désignerons par C l'ensemble des fonctions $f(x)$, à valeurs réelles, définies et continues pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. Si $f \in C$ et $g \in C$, on posera (1) :

$$d(f, g) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)|.$$

Montrons que d est une distance sur C. Il faut vérifier les propriétés suivantes :

1) $0 \leqslant d(f, g) < +\infty$ quelles que soient f et g.
2) $d(f, g) = 0$ si et seulement si $f = g$.
3) $d(f, g) = d(g, f)$ quelles que soient f et g.
4) $d(f, h) \leqslant d(f, g) + d(g, h)$ quelles que soient f, g, h.

(*) Conférence prononcée le 17 janvier 1957, à l'Institut Henri-Poincaré, quatrième conférence du cycle sur la topologie organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs. Le texte de la troisième conférence ne nous étant pas parvenu en temps utile sera publié dans le Bulletin 185.

(1) On rappelle qu'une fonction telle que $\varphi(x) = |f(x) - g(x)|$ a dans un intervalle une borne supérieure que l'on note sup $\varphi(x)$.

Les propriétés 1, 2, 3 sont immédiates. D'autre part, soient $f \in C$, $g \in C$, $h \in C$. On a, quel que soit $x \in [0, 1]$:

$$|f(x) - h(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leqslant \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)| + \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |g(x) - h(x)| = d(f, g) + d(g, h).$$

Ainsi, $d(f, g) + d(g, h)$ majore $|f(x) - h(x)|$ quel que soit x, et par suite majore $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - h(x)| = d(f, h)$. Ceci prouve la propriété 4.

Toutes les notions développées à propos des espaces métriques sont donc applicables à l'espace C. Dire qu'une suite de fonctions f_n de C tend vers $f \in C$ signifie que $d(f_n, f) \to 0$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que la relation $n \geqslant N$ entraîne $d(f_n, f) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. On reconnaît la définition de la convergence uniforme de f_n vers f.

Soit (f_n) une suite de fonctions de C. Un théorème classique de calcul différentiel donne une condition nécessaire et suffisante, appelée critère de Cauchy, pour que f_n converge uniformément. Cette condition est la suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que les relations $m \geqslant N$, $n \geqslant N$ entraînent $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ quel que soit $x \in [0, 1]$ (autrement dit, entraînent $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $d(f_m, f_n) \leqslant \varepsilon$). La condition en question peut donc s'exprimer en disant que la suite (f_n) est une suite de Cauchy dans l'espace C. D'autre part, un autre théorème classique dit qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Donc, l'espace C est complet.

Qu'est-ce qu'une fonction à valeurs réelles sur l'espace C ? C'est une fonction A(f) qui, à toute $f \in C$, associe un nombre réel A(f). Dire que cette fonction A est continue sur C signifie que, lorsque f_n converge uniformément vers f, le nombre A(f_n) tend vers A(f) au sens ordinaire.

Exemples : 1) Posons $A(f) = \int_0^1 f(x)dx$. Alors, A est une fonction continue sur C d'après un théorème classique. 2) Posons $A(f) = f(1)$. Alors, il est évident que A est une fonction continue sur C.

Considérons maintenant une application de C dans C, c'est-à-dire une transformation $g = T(f)$ qui, à toute $f \in C$, fait correspondre une $g \in C$. Dire que T est continue signifie que, lorsque f_n converge uniformément vers f, $T(f_n)$ converge uniformément vers $T(f)$. Exemples : 1) $T(f) = f_0 f$, où f_0 est une fonction continue fixe. Il est clair que T est continue. 2) $T(f)$ est la fonction continue g définie par :

$$g(x) = \int_0^1 e^{xy} f(y)dy.$$

Montrons que T est continue. Soit $f_n \in C$ une suite convergeant uniformément vers $f \in C$. Soient $g_n = T(f_n)$, $g = T(f)$. On a :

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \int_0^1 e^{xy} f_n(y)dy - \int_0^1 e^{xy} f(y)dy \right| \leqslant \int_0^1 e^{xy} |f_n(y) - f(y)|dy$$
$$\leqslant e \sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} |f_n(y) - f(y)| = ed(f_n, f).$$

Donc $d(g_n, g) \leqslant ed(f_n, f)$, ce qui prouve bien que g_n converge uniformément vers g.

Deuxième exemple

Reprenons l'ensemble C précédent. Pour $f \in C$ et $g \in C$, posons :

$$d'(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Montrons que d' est une distance sur C. Les propriétés 1, 2, 3 du premier exemple sont immédiates. L'inégalité triangulaire est facile : puisqu'on a $|f(x) - h(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$ pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\int_0^1 |f(x) - h(x)|dx \leqslant \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)|dx,$$

c'est-à-dire $d(f, h) \leqslant d(f, g) + d(g, h)$.

Ainsi, le même ensemble C de fonctions est muni d'une deuxième structure d'espace métrique. Pour éviter des confusions, nous désignerons par C′ ce nouvel espace métrique. La convergence au sens de C′ s'appelle la convergence en moyenne. Si une suite f_n de fonctions continues converge vers une fonction continue f au sens de C, c'est-à-dire uniformément, f_n converge vers f au sens de C′, car $|f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 uniformément, donc $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx$ tend vers 0. Mais la réciproque est inexacte, comme le montre l'exemple suivant : soient $f_n(x) = x^n$, et $f(x) = 0$; alors :

$$d'(f_n, f) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

quand $n \to +\infty$, donc f_n tend vers f au sens de C′ ; mais f_n ne tend pas vers f uniformément puisque $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} x^n = 1$.

Il existe donc sur C deux notions naturelles de convergence (et d'ailleurs une infinité d'autres dont nous ne parlerons pas). Ce phénomène est très courant dans les espaces fonctionnels.

Montrons que C′ n'est *pas* complet. Définissons une fonction continue f_n de la manière suivante :

$f_n(x) = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

$f_n(x) = 1$ pour $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1$.

$f_n(x)$ est linéaire dans $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]$.

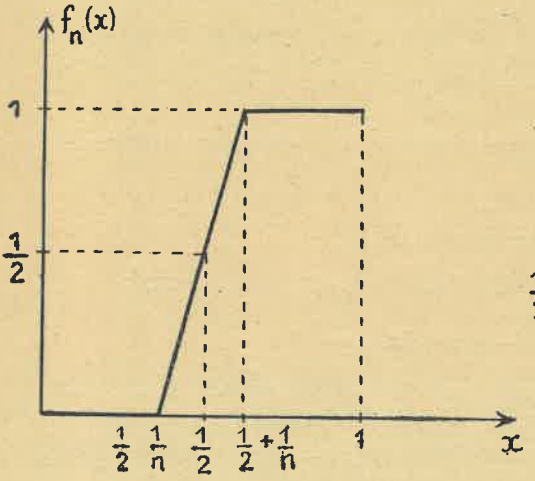


FIG. 1

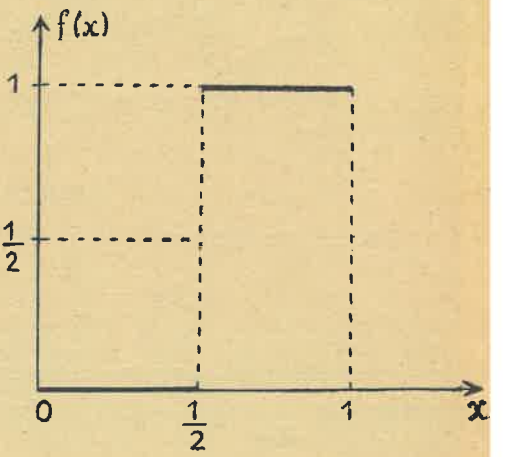


FIG. 2

Soit f la fonction égale à 0 pour $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, à $\frac{1}{2}$ pour $x = \frac{1}{2}$, à 1 pour $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$. Alors, $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx = \frac{1}{2n} \to 0$. Donc :

$$d'(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|dx \leqslant \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx + \int_0^1 |f(x) - f_m(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \to 0$$

Donc, la suite (f_n) est une suite de Cauchy. Supposons qu'il existe une fonction continue g telle que $d'(f_n, g) \to 0$. L'inégalité :

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx \leqslant \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|dx + \int_0^1 |f_n(x) - g(x)|dx$$

où le deuxième membre tend vers 0 quand $n \to +\infty$, prouve que $\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = 0$. Or, $f(x) - g(x)$ est continue, sauf au point $x = \frac{1}{2}$. Donc, f et g ne peuvent différer que pour $x = \frac{1}{2}$. Donc, $g(x) = 0$ pour $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ et $g(x) = 1$ pour $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$. Ceci contredit la continuité de g pour $x = \frac{1}{2}$.

(En agrandissant C' par l'adjonction de nouvelles fonctions, et par exemple de la fonction f ci-dessus, on peut obtenir un espace complet. C'est un des procédés d'introduction des fonctions intégrables au sens de LEBESGUE).

Reprenons la fonction $A(f) = f(1)$ considérée dans le premier exem-

ple. Cette fonction n'est pas continue sur C'. En effet, soit $f_n(x) = x^n$. On a vu que $f_n \to 0$ dans C'. Pourtant, $A(f_n) = f_n(1) = 1$ ne tend pas vers $A(0) = 0$. Par contre, la fonction $A(f) = \int_0^1 f(x)dx$ est continue sur C'. Car, si f_n converge en moyenne vers f, on a :

$$|A(f_n) - A(f)| = |\int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)\,dx| \leqslant \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx$$
$$= d'(f_n, f) \to 0,$$

d'où notre assertion.

Troisième exemple

Nous désignerons par D l'ensemble des fonctions $f(x)$, à valeurs réelles, définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, admettant une dérivée continue pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ (il s'agit de dérivée à droite pour $x = 0$, de dérivée à gauche pour $x = 1$). Si $f \in D$ et $g \in D$, on posera :

$$\delta(f, g) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)| + \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x) - g'(x)|.$$

On vérifie aussitôt les trois premières propriétés d'une distance. L'inégalité triangulaire résulte des relations suivantes :

$$|f(x) - h(x)| + |f'(x) - h'(x)| \leqslant$$
$$|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| + |f'(x) - g'(x)| + |g'(x) - h'(x)| \leqslant$$
$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)| + \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x) - g'(x)|$$
$$+ \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |g(x) - h(x)| + \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |g'(x) - h'(x)| =$$
$$\delta(f,g) + \delta(g,h)$$

Donc, D est un espace métrique.

Dire qu'une suite de fonctions $f_n \in D$ tend vers une fonction $f \in D$ signifie que f_n tend uniformément vers f et que f'_n tend uniformément vers f' [d'après la définition de $\delta(f_n, f)$].

L'espace D est complet. Car soit (f_n) une suite de Cauchy dans D. Les suites (f_n) et (f'_n) vérifient le critère de Cauchy, donc convergent uniformément vers des fonctions f et g, et un théorème classique dit que $g = f'$. Donc, f_n tend vers f au sens de D.

Pour toute $f \in D$, posons $A(f) = f'\left(\frac{1}{2}\right)$. Alors, A est une fonction continue sur D. [Par contre, si une suite de fonctions f_n de D tend uniformément, sans plus, vers une fonction f de D, $A(f_n)$ ne tend pas nécessairement vers $A(f)$]. Cette fonction continue $A(f)$ sur D est ce qu'on appelle, dans la théorie des distributions de Schwartz, un doublet.

Quatrième exemple

Soit, dans le plan complexe, Δ le disque ouvert défini par l'inégalité $|z| < 1$. Soit H l'ensemble des fonctions $f(z)$ holomorphes dans Δ et

telles que $\int\int_\Delta |f(z)|d\sigma < +\infty$ ($d\sigma$ désignant l'élément d'aire dans Δ). Pour $f \in H$ et $g \in H$, posons :

$$d(f,g) = \int\int_\Delta |f(z) - g(z)|d\sigma.$$

On vérifie comme dans les exemples précédents que d est une distance. (On notera que $d(f,g) < +\infty$ parce que $\int\int_\Delta |f|d\sigma < +\infty$ et $\int\int_\Delta |g|d\sigma < +\infty$). Donc, H est une espace métrique et la convergence ainsi définie dans H s'appelle encore convergence en moyenne. On va voir que, contrairement à ce qui se passe dans l'exemple 2, H est complet.

Montrons d'abord que, si $f \in H$, on a, pour tout nombre complexe ζ tel que $|\zeta| \leqslant a < 1$:

$$(1) \qquad |f(\zeta)| \leqslant \frac{1}{\pi(1-a)^2} \int\int_\Delta |f(z)|d\sigma.$$

Soient Γ_r et Δ_r le cercle et le disque ouvert de centre ζ et de rayon r ; ils sont contenus dans Δ pour $r < 1 - a$; on a, en posant $z = \zeta + re^{i\theta}$

$$|2i\pi f(\zeta)| = \left| \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz \right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} |f(z)| r d\theta = \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta$$

d'où :

$$\int\int_\Delta |f(z)|d\sigma \geqslant \int\int_{\Delta_r} |f(z)|d\sigma = \int_0^r \int_0^{2\pi} |f(z)| \rho d\rho d\theta$$

$$\geqslant \int_0^r 2\pi |f(\zeta)| \rho d\rho = \pi r^2 |f(\zeta)|$$

et, comme ceci est valable quel que soit $r < 1 - a$, on en déduit (1).

Ceci posé, soit (f_n) une suite de Cauchy dans H. Pour tout nombre a tel que $0 \leqslant a < 1$, soit D_a le disque fermé de centre O et de rayon a. On a, d'après (1) :

$$d(f_m, f_n) \geqslant \pi (1-a)^2 |f_m(\zeta) - f_n(\zeta)|$$

pour tout $\zeta \in D_a$. Donc, f_n converge uniformément dans tout disque D_a, vers une fonction f qui, d'après le théorème de Weierstrass, est holomorphe dans Δ. En outre, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\int\int_{D_a} |f_m(z) - f_n(z)|d\sigma \leqslant \varepsilon$ pour $m, n \geqslant N$, quel que soit $a < 1$; donc, on a $\int\int_{D_a} |f(z) - f_n(z)|d\sigma \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, quel que soit $a < 1$; donc, on a $\int\int_\Delta |f(z) - f_n(z)|d\sigma \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$; ainsi, $d(f_n, f) \to 0$, et f_n tend vers f dans l'espace H.

Cinquième exemple

Soit B l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$, à valeurs réelles, définies sur l'intervalle $[0, 1]$. Le mode de convergence le plus élémentaire sur B est la convergence en chaque point : f tend vers g si $f(x)$ tend vers $g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Nous allons montrer qu'on ne peut pas définir une distance sur B telle que la convergence correspondante soit la convergence en chaque point. Ceci montrera que la topologie ne doit pas se limiter à l'étude des espaces métriques.

L'ensemble C des fonctions continues est contenu dans B. Soit C_1 l'ensemble des fonctions $f \in B$ qui sont limites en chaque point d'une suite de fonctions de C. Les fonctions de C_1 sont ce qu'on appelle les fonctions de première classe. On démontre, et nous admettrons ici, qu'une telle fonction admet au moins un point de continuité. Si la convergence en chaque point pouvait être définie par une distance, C_1 serait un ensemble fermé dans B, à savoir l'adhérence de C dans B. Or, nous allons construire une suite (f_n) de fonctions de C_1, convergeant en chaque point vers une fonction f qui n'appartient pas à C_1. Cette construction résulte des remarques suivantes :

a) Une fonction $f \in B$, égale partout à 0, sauf en un point où elle est égale à 1, appartient à C_1 (elle est, par exemple, limite en chaque point d'une suite de fonctions continues linéaires par morceaux).

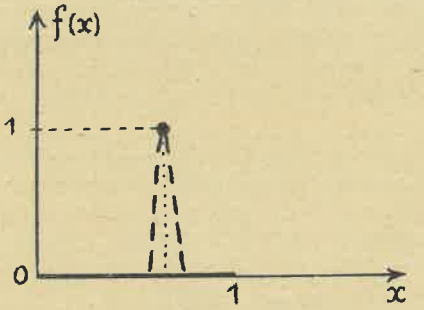


Fig. 3

b) Une fonction $f \in B$, égale partout à 0, sauf en un nombre fini de points où elle est égale à 1, appartient à C_1 (elle est somme d'un nombre fini de fonctions du type précédent).

c) Soit $(r_1, r_2, \ldots)$ l'ensemble des nombres rationnels rangés en une suite (2). Soit f_n la fonction égale à 0 partout, sauf aux points $r_1, \ldots, r_n$ où elle est égale à 1. Alors, $f_n \in C_1$ pour tout n.

d) La suite (f_n) converge en chaque point vers la fonction f telle que $f(x) = 0$ pour x irrationnel et $f(x) = 1$ pour x rationnel. Or, cette fonction n'admet aucun point de continuité. Donc, elle n'appartient pas à C_1.

On verra dans une conférence ultérieure qu'on peut définir une topologie sur B telle que la notion correspondante de convergence soit celle de la convergence en chaque point.

J. D.

---

(2) Cela est possible puisque l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1 est dénombrable.