BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

## I. ÉTUDES

# NOTIONS LIÉES A LA STRUCTURE D'UN ESPACE MÉTRIQUE *

par Gustave CHOQUET
*Professeur à la Sorbonne*

Dans sa conférence sur les espaces métriques, M. REVUZ a défini la topologie d'un espace métrique et la continuité d'une application d'un espace métrique dans un autre.

Dans une conférence précédente sur la droite numérique, j'avais montré qu'à côté de la continuité existe une continuité uniforme ; nous allons voir que cette notion conserve un sens dans les espaces métriques quelconques ; plus généralement, nous étudierons les conséquences du fait que, dans les espaces métriques, on peut parler de la petitesse d'un ensemble.

Rappelons qu'un espace métrique est un ensemble E muni d'une distance $d(x, y)$ (définie comme application de $E^2$ dans $R_+$), telle que :

1) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$ ; $\quad d(x, y) = 0$ si $x = y$.
2) $d(x, y) = d(y, x)$.
3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

DÉFINITION 1 : *On appelle* diamètre *d'un sous-ensemble* A *d'un espace métrique, la borne supérieure* $\delta(A)$ *de l'ensemble des distances* $d(x, y)$ *où* $x, y \in A$.

C'est un nombre $\geqslant 0$, fini ou infini.

Par exemple, le diamètre d'un disque plan est la longueur des diamètres au sens élémentaire ; le diamètre d'un triangle équilatéral est la longueur de ses côtés ; le diamètre d'un intervalle de droite $]a, b[$ est $(b-a)$.

On a toujours $\delta(A) = \delta(\overline{A})$ (1) ; on n'a $\delta(A) = 0$ que si A est vide ou réduit à un seul point.

On dit que A est *borné* si son diamètre est fini.

---

* Conférence prononcée le 6 décembre 1956, à l'Institut Henri-Poincaré, troisième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

(1) $\overline{A}$ désigne la fermeture de A (Cf. *Bulletin 183*, p. 168).

## 1. Continuité uniforme

Soit $f$ une application de E métrique dans F métrique. La continuité de $f$ dans E peut s'exprimer en termes de distances de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in E, \quad \exists \eta > 0$$

tel que $[d(x, y) < \eta]$ entraîne $[d(f(x), f(y)) < \varepsilon]$.

Le nombre $\eta$ dépend de $\varepsilon$ et de $x$ ; lorsqu'il existe un tel $\eta$ qui ne dépende pas de $x$, on dit que $f$ est uniformément continue ; ou plus simplement :

Définition 2 : *On dit que $f$ est* uniformément continue *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $A \subset E$, la condition $\delta(A) < \eta$ entraîne $\delta(f(A)) < \varepsilon$.*

Si l'on appelle *oscillation de $f$ sur* A le diamètre $\delta(f(A))$, la continuité uniforme de $f$ se traduit encore en disant que l'oscillation de $f$ sur A est petite lorsque le diamètre de A est petit. On peut préciser cette interprétation grâce à un *module de continuité :* Soit $\varphi$ une fonction numérique croissante définie sur $[0, \infty[$ ; on dit que $f$ admet $\varphi$ pour module de continuité si, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x, y)).$$

On vérifiera que la continuité uniforme de $f$ équivaut à l'existence d'un module de continuité $\varphi$ tel que $\varphi(u) \to 0$ quand $u \to 0$.

Les modules de continuité les plus utilisés sont les fonctions linéaires : $\varphi(u) = ku$ ; lorsque $f$ admet un tel module de continuité, on dit que $f$ est *lipschitzienne de rapport $k$*. Cette condition s'écrit donc :

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y).$$

*Exemples :* 1) Si $f$ est une fonction numérique dérivable sur R, à dérivée $f'$ telle que $|f'| \leqslant k$, $f$ est lipschitzienne de rapport $k$ (utiliser le théorème des accroissements finis).

2) Soit A un sous-ensemble de E, et soit $x \in E$ ; appelons *distance de $x$ à* A le nombre $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ (2).

L'application $x \to d(x, A)$ de E dans R est lipschitzienne de rapport 1.

C'est en particulier le cas pour l'application $x \to |x|$ de R dans R.

3) L'application $(x, y) \to x + y$ de $R^2$ dans R est lipschitzienne. Il n'en est pas de même de l'application $(x, y) \to xy$ ; par contre, elle le devient si l'on impose à $x$ ou à $y$ de rester dans une partie bornée de R.

Il est immédiat que la continuité uniforme d'une fonction $f$ entraîne sa continuité en tout point. La réciproque est fausse ; par exemple, la fonction numérique $x \to x^2$ est continue, mais la relation :

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

montre qu'aucune condition $|x - y| < \eta$ n'entraîne de majoration pour $|x^2 - y^2|$.

---

(2) Inf $d(xy)$ désigne la borne inférieure de la fraction $d(x, y)$ $y \in A$ lorsque $y$ décrit A.

On construira de nombreux exemples analogues à partir de la propriété suivante que nous proposons comme exercice :

Soit $f$ une fonction numérique uniformément continue définie dans $E = R^n$, ou plus généralement dans un ensemble convexe E de $R^n$. Il existe alors deux constantes $a$ et $b \geqslant 0$ telles que $|f(x)| \leqslant a\|x\| + b$ pour tout $x \in E$.

*Composition de fonctions uniformément continues.*

1) La composée $g \circ f$ de deux fonctions uniformément continues l'est aussi.

2) Si $f$ et $g$ sont lipschitziennes de rapports $k_1$ et $k_2$, $g \circ f$ est lipschitzienne de rapport $k_1 k_2$.

*Applications :* Soit $f$ une fonction numérique dans E ; si $f$ est uniformément continue (resp. lipschitzienne de rapport $k$), $|f|$ l'est aussi. A partir de là, on montrera aisément que si $f$ et $g$ sont uniformément continues (resp. lipschitziennes), il en est de même de $(f + g)$, de sup $(f, g)$, de inf $(f, g)$, et de $fg$ lorsqu'une au moins des fonctions $f$ ou $g$ est bornée dans E.

*Isomorphisme de deux espaces métriques.*

On sait que la topologie d'un espace est entièrement déterminée par ses ensembles ouverts et qu'à cette notion est associée une notion d'isomorphisme de deux espaces E et F. Une application biunivoque $f$ de E sur F est appelée isomorphisme topologique (on dit plus couramment une homéomorphie) si $f$ échange les ouverts de E et ceux de F ; ou, ce qui revient au même, si $f$ et $f^{-1}$ sont continues.

De même, à la notion de continuité uniforme sur un espace métrique, est associée une notion d'isomorphisme :

Définition 3 : *Une application biunivoque $f$ d'un espace métrique* E *sur un autre* F *est dite un isomorphisme de leurs structures uniformes si $f$ et $f^{-1}$ sont uniformément continues.*

Un isomorphisme topologique n'est pas nécessairement uniforme ; par exemple, l'application $x \to x^3$ de R sur R est une homéomorphie ; mais ce n'est pas un isomorphisme uniforme.

Deux distances $d_1$ et $d_2$ sur un même ensemble E peuvent donc définir sur E la même topologie sans définir la même « structure uniforme ». Pour que $d_1$ et $d_2$ définissent la même structure uniforme sur E, il faut et il suffit que $d_2(x, y)$ soit petit quand $d_1(x, y)$ l'est, et inversement. Par exemple, si $d$ est une distance sur E, elle est équivalente (pour la structure uniforme) aux distances $\dfrac{d}{1+d}$ et $d^\alpha\ (0 < \alpha \leqslant 1)$ ; dans $R^2$, on utilise couramment les distances associées aux normes :

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad |x_1| + |x_2| \quad \text{ou} \quad \sup(|x_1|, |x_2|)$$

(où $x_1$ et $x_2$ sont les coordonnées de $x$) ; ces diverses distances sont équivalentes.

De même que la continuité d'une application de E dans F ne dépend que des topologies de E et F, la continuité uniforme de $f$ ne dépend que des structures uniformes de E et F.

*Applications continues définies dans un espace compact.*

Nous avons vu qu'il existe des fonctions continues non uniformément continues : par exemple l'application $x \to x^2$ de R dans R ; ici, les espaces E et F ne sont pas bornés ; mais il existe des exemples analogues où E et F sont bornés : par exemple, l'application $x \to \sin 1/x$ de $]0, 1]$ dans $[-1, +1]$ est continue, mais non uniformément continue.

Par contre, on ne peut trouver de pareil contre-exemple où E soit compact : c'est là un théorème fondamental dont voici l'énoncé :

THÉORÈME 1 : *Toute application continue $f$ d'un espace métrique compact* E *dans un espace métrique quelconque est uniformément continue.*

La démonstration en sera donnée dans la conférence consacrée aux espaces compacts.

## 2. SUITES DE CAUCHY ; ESPACES COMPLETS ; MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

La définition d'une suite convergente de points d'un espace métrique E fait intervenir le point limite de la suite. Or, il est souvent intéressant de savoir si une suite est convergente sans qu'on ait besoin de sa limite. C'est CAUCHY qui, le premier, a dégagé, pour les suites de nombres réels, un critère de convergence indépendant des valeurs limites.

DÉFINITION 4 : *Soit* E *un espace métrique ; soit $(x_n)$ une suite de points de* E. *On dit que cette suite est une* suite de Cauchy *si $d(x_p, x_q) \to 0$ lorsque $p$ et $q \to \infty$, autrement dit si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0$ tel que les relations $p$ et $q \geqslant n_0$ entraînent $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.*

Cette condition peut encore s'interpréter autrement : désignons par $X_n$ l'ensemble $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ ; alors $(x_n)$ est une suite de Cauchy si $\delta(X_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Il est immédiat que toute suite qui converge est une suite de Cauchy ; la réciproque est en général fausse ; par exemple la suite (1 ; 1,4 ; 1,41 ; ...), formée par des fractions décimales qui convergent vers $\sqrt{2}$, est une suite de Cauchy dans l'ensemble Q des nombres rationnels ; mais elle ne converge pas dans Q.

Or, il est très important de disposer d'espaces métriques dans lesquels les suites de Cauchy convergent ; d'où la définition :

DÉFINITION 5 : *On dit qu'un espace métrique* E *est* complet *si toute suite de Cauchy de points de* E *est convergente.*

Nous venons de voir que l'espace Q des nombres rationnels n'est

pas complet ; par contre, nous avons vu dans une précédente conférence que R était complet.

*Exemples de suites de Cauchy de* R : 1) Les sommes partielles $S_n$ de toute série alternée $a_1 - a_2 + a_3 \ldots\ldots$ telle que $a_n$ tende vers 0 en décroissant.

2) Les sommes partielles $S_n$ de toute série $b_1 + b_2 + \ldots\ldots$ telle que la série $|b_1| + |b_2| + \ldots\ldots$ soit convergente.

*Exemples d'espaces complets et d'espaces non complets :* 1) Tout intervalle fermé de R est complet ; tout ensemble ouvert de R est *non* complet (sauf R lui-même).

2) L'espace euclidien $R^n$ est complet ; en effet, toute suite de Cauchy de $R^n$ a une projection sur chacun des axes qui est aussi une suite de Cauchy puisque la projection diminue les distances ; donc, chacune des $n$ suites projetées convergent, d'où aussi la suite donnée.

3) Tout espace métrique compact est complet.

*Invariance des espaces complets par isomorphisme.*

L'application $x \to \frac{x}{1+|x|}$ de R sur $]-1, +1[$ est une homéomorphie ; or, elle transforme l'espace métrique complet R en l'espace métrique non complet $]-1, +1[$ ; donc, la notion d'espace complet n'est pas une notion topologique ; ceci tient à ce qu'une homéomorphie ne transforme pas toujours toute suite de Cauchy en une suite de Cauchy.

Par contre, toute application uniformément continue $f$ de E dans F transforme toute suite de Cauchy de E en une suite de Cauchy sur F ; donc, tout isomorphisme uniforme entre deux espaces E et F échange leurs suites de Cauchy ; en particulier, si l'un est complet, l'autre l'est aussi.

Donc, le fait pour un espace métrique d'être complet est invariant par les isomorphismes uniformes ; c'est une propriété de sa structure uniforme.

Voici quelques propriétés utiles et dont nous proposons la démonstration comme exercices :

1) Dans E complet, toute suite décroissante d'ensembles fermés $F_n$ dont les diamètres tendent vers 0 a une intersection non vide et réduite à un point ; tout voisinage de ce point contient un ensemble de la suite.

2) Tout sous-ensemble fermé d'un espace complet est un espace complet.

3) Tout sous-espace complet d'un espace métrique est fermé dans cet espace.

4) Dans un espace métrique, la réunion et l'intersection de deux sous-espaces complets est un sous-espace complet.

*Prolongement d'une fonction uniformément continue.*

L'analyse pose souvent le problème de prolonger continuement, à tout un ensemble E, une fonction définie sur un sous-ensemble A partout dense de E (c'est-à-dire tel que tout ouvert de E contienne des

points de A). L'existence d'un tel prolongement est souvent une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME 2 : *Soit* E *métrique, soit* A *un sous-ensemble partout dense de* E. *Soit* $f$ *une application* uniformément continue *de* A *dans un espace métrique* complet F.

*On peut prolonger* $f$ *d'une façon et d'une seule en une application continue de* E *dans* F. *Ce prolongement est encore uniformément continu (et a les mêmes modules de continuité que* $f$*).*

Voici le schéma de la démonstration :

Pour tout $x \in E$ et tout entier $n$, soit $B(x, \frac{1}{n})$ la *boule fermée* de E, de centre $x$ et de rayon $\frac{1}{n}$. Les ensembles $V_n = \overline{f(A \cap B(x, \frac{1}{n}))}$ forment une suite décroissante de fermés dont les diamètres tendent vers 0 (continuité uniforme de $f$) ; ils ont donc en commun un point et un seul qu'on désignera par $g(x)$.

On a $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. D'autre part, $g(X) \subset \overline{g(A \cap X)}$ pour tout $X \subset E$ ; il en résulte que $\delta(g(X)) \to 0$ avec $\delta(X)$. Donc, $g$ est uniformément continue.

*Exemples :* 1) Prolongement à R de $a^x$ définie sur l'ensemble Q des rationnels.

2) Soit $f$ une fonction numérique dérivable définie sur $]0, 1]$, et telle que $|f'| < k$ ; $f$ est alors lipschitzienne, donc uniformément continue ; on peut donc la prolonger en une fonction continue définie sur $[0, 1]$.

*Méthode des approximations successives.*

Il s'agit d'une méthode puissante utilisée dans de nombreux domaines de l'analyse (équations numériques, équations différentielles, équations intégrales), et dont l'intérêt a d'abord été souligné par les travaux de E. PICARD ; elle peut être schématisée très simplement de la façon suivante :

Disons d'abord qu'une application $f$ d'un espace métrique E dans un autre F est *contractante* (de rapport $\lambda$, où $0 \leqslant \lambda < 1$) si, pour tout couple de points $x_1$, $x_2$ de E, on a :

$$d_F(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda d_E(x_1, x_2).$$

Ce n'est autre qu'une application lipschitzienne de rapport $\lambda < 1$.

*Exemple :* E est l'espace euclidien $R^n$ et $f$ est une similitude de rapport $\lambda < 1$.

THÉORÈME 3 : *Soit* E *un espace métrique complet et soit* $f$ *une application contractante de* E *dans lui-même.*

*L'équation* $x = f(x)$ *a une solution et une seule* a. *Pour tout* $x_0 \in E$, *la suite des transformés successifs* $x_n = f^n(x_0)$ *du point* $x_0$ *converge vers* $x_0$.

*Démonstration :* De la relation $x_{p+1} = f(x_p)$ résulte que, pour tout $n$, le transformé du couple $(x_{n-1}, x_n)$ est le couple $(x_n, x_{n+1})$.

On a donc $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \lambda d(x_{n-1}, x_n)$. On tire des $n$ premières relations de cette forme que :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \lambda^n d(x_0, x_1).$$

D'où :

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant d(x_0, x_1) \sum_{n}^{\infty} \lambda^p$$

Comme $0 \leqslant \lambda < 1$, la suite des $x_n$ est donc une suite de Cauchy.

Si $a$ est son point limite, comme $f$ est continue, on a :

$$f(a) = \lim f(x_n) \ ;$$

d'autre part, $x_{n+1} = f(x_n)$, d'où à la limite : $a = f(a)$.

Cette solution $a$ est la seule de l'équation $x = f(x)$, car si $a'$ en est une autre solution, on a :

$d(a, a') = d(f(a), f(a')) \leqslant \lambda d(a, a')$ d'où $d(a, a') = 0$ donc $a = a'$.

Remarquons que la méthode utilisée fournit un procédé de calcul approché de la solution $a$, puisque la série de terme général $d(x_n, x_{n+1})$ converge plus vite qu'une série géométrique de raison $\lambda$. Plus précisément, on a :

$$d(x_n, a) = \lim_{p \to \infty} d(x_n, x_{n+p}) \leqslant d(x_0, x_1) \cdot \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}$$

Il peut arriver que la convergence soit encore plus rapide, par exemple lorsque la restriction de $f$ à un voisinage V de $a$ est contractante d'ordre $\lambda(V)$, et que $\lambda(V)$ tend vers 0 avec le diamètre de V.

Lorsque l'espace E est borné, l'existence et l'unicité de $a$ sont plus évidentes encore, car la suite $f^n(E)$ est décroissante et le diamètre de $f^n(E)$ est $\leqslant \lambda^n \delta(E)$.

*Exemples :* 1) $E = R^n$ et $f$ est une similitude de rapport $\lambda < 1$ ; le point $a$ n'est autre que le centre de la similitude, dont on démontre ainsi l'existence.

2) Soit $y = f(x)$ une fonction numérique dérivable définie sur un intervalle fermé borné $E = [a, b]$, telle que l'ensemble de ses valeurs soit également contenu dans $[a, b]$, et telle que $|f'(x)| \leqslant \lambda$, où $\lambda < 1$.

L'application $f$ de $[a, b]$ dans lui-même est contractante de rapport $\lambda$ et la méthode s'applique.

Nous ne pouvons pas indiquer ici les applications de cette méthode aux équations différentielles.

*Complétion d'un espace métrique.*

Cette étude des espaces complets montre l'intérêt de disposer d'un espace complet. Aussi, lorsqu'une théorie mathématique conduit à l'introduction d'un espace métrique qui n'est pas complet, essaie-t-on presque toujours de lui ajouter de nouveaux éléments pour qu'il devienne complet. Théoriquement, cette complétion est toujours possible ; elle est même, en un certain sens, possible d'une façon et d'une seule ; plus précisément, on démontre, en utilisant les suites de Cauchy de l'espace

donné E, qu'il existe un espace complet $\widehat{E}$, unique (à une isométrie près), contenant un sous-ensemble partout dense isométrique à E (et qu'il est commode d'identifier à E).

Mais cette complétion abstraite n'aurait en général aucun intérêt si l'on ne savait pas interpréter les nouveaux éléments ajoutés à E ; le véritable travail de complétion consiste dans cette interprétation, parfois difficile, mais très souvent fructueuse, car elle montre quel est le cadre naturel dans lequel doit se développer la théorie.

*Exemples :* 1) Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur [0, 1] muni de la distance associée à la norme :

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Cet espace métrique n'est pas complet. Les éléments de l'espace complété $\widehat{E}$ sont les fonctions intégrables au sens de LEBESGUE sur [0, 1] (avec la convention qu'on identifie deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle).

On a un exemple analogue en remplaçant la norme précédente par celle ainsi définie :

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)dt.$$

Les nouvelles fonctions sont ici les fonctions mesurables dont le carré est intégrable.

2) Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques définies dans $R^2$, nulles en dehors d'un compact, et continuement dérivables. La norme définie par :

$$\|f\|^2 = \int\int \left(\frac{\delta t}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta t}{\delta y}\right)^2 dxdy$$

fournit une distance sur E ; l'espace métrique E n'est pas complet ; les éléments à ajouter à E pour le compléter sont de nouvelles fonctions aux propriétés intéressantes.

### 3. TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE UNIFORME

Nous avons jusqu'ici étudié le comportement d'*une* fonction ; on peut faire un pas de plus en étudiant le comportement des familles de fonctions. L'aspect le plus élémentaire d'une telle étude est la notion de convergence simple d'une suite de fonctions.

DÉFINITION 6 : *Soit* $f_n$ *une suite d'applications d'un ensemble* E *dans un espace topologique* F. *On dit que cette suite* converge simplement *vers* $f$ (*application de* E *dans* F), *si, pour tout* $x \in$ E, $f_n(x) \to f(x)$.

Bien que ce mode de convergence ait eu une grande importance en Mathématiques et y ait encore une place honorable, de nombreux autres modes de convergence ont été introduits et sont utilisés suivant les besoins (voir les exemples ci-dessus).

En fait, si l'on étudie les graphes d'une suite de fonctions qui converge simplement, on s'aperçoit que la convergence simple traduit mal notre notion intuitive de convergence :

Soit par exemple $f_n$ la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = n^2x(1 - nx) \qquad \text{sur } [0, \frac{1}{n}],$$

$$f_n(x) = 0 \text{ ailleurs.}$$

La suite $(f_n)$ converge simplement vers la fonction $f = 0$ ; or, les graphes des fonctions $f_n$ ne convergent pas vers celui de $f$. On est donc conduit à introduire un nouveau mode de convergence :

DÉFINITION 7 : *Soit $f_n$ une suite d'applications d'un* ensemble E *dans un* espace métrique F. *On dit que cette suite converge* uniformément *vers $f$ (application de* E *dans* F), *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0$ tel que, pour tout $x \in E$, et pour tout $n > n_0$,* on *ait* $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$.

Dans l'exemple précédent, la suite $f_n$ ne converge pas uniformément vers 0. Donc, la convergence simple n'entraîne pas la convergence uniforme, même si les fonctions $f$ et $f_n$ sont continues, même si E est compact, même si les $f_n$ sont bornées.

Par contre, la convergence uniforme entraîne évidemment la convergence simple.

Notons le fait important que la définition ne suppose aucune topologie sur l'espace de départ E ; par contre, elle exige que F, espace d'arrivée, soit un espace métrique.

*Métrique et topologie de la convergence uniforme.*

On peut rendre plus intuitive et plus commode l'étude de la convergence uniforme en introduisant une distance sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F (nous supposerons pour simplifier que l'espace F est borné) :

Soient $f$ et $g$ deux applications de E dans F ; on dira que $f$ et $g$ sont $\varepsilon$-voisines si $d(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in E$ ; le plus petit de ces nombres $\varepsilon$ est appelé la distance entre $f$ et $g$ ; elle est aussi égale à $d(f, g) = \sup_{x \in E} d(f(x), g(x))$.

On vérifie aisément que $d(f, g)$ est une distance sur $\mathcal{F}(E, F)$ ; la métrique ainsi définie sur $\mathcal{F}(E, F)$ est la métrique de la convergence uniforme.

On peut maintenant interpréter commodément la convergence uniforme : dire que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ équivaut à dire que $d(f, f_n) \to 0$, autrement dit que dans $\mathcal{F}(E, F)$ la suite des points $f_n$ converge vers le point $f$.

Notons que si on remplace la métrique de F par une autre équivalente (pour la structure uniforme), les deux métriques qu'on obtient sur $\mathcal{F}(E, F)$ sont aussi équivalentes ; donc, la notion de convergence uniforme ne dépend que de la structure uniforme de F.

*Limite uniforme de fonctions continues.*

Si on suppose maintenant que l'espace de départ E est muni d'une topologie, on peut étudier l'effet de la convergence uniforme sur les fonctions continues. Voici l'énoncé essentiel, dont nous proposons la démonstration comme exercice :

THÉORÈME 4 : *Soit* E *un espace topologique,* F *un espace métrique. Si une suite d'applications continues de* E *dans* F *converge uniformément vers une application f, cette application f est continue.*

*Exemple :* Soit $(u_n)$ une suite de fonctions numériques continues sur $[0, 1]$, telles que $|u_n(x)| \leqslant a_n$ pour tout $x$, la série $\sum a_n$ étant convergente. Alors, la série $\sum u_n(x)$ est uniformément convergente (c'est-à-dire que la suite des sommes partielles $S_n(x)$ est uniformément convergente) et sa somme est une fonction continue.

C'est le cas pour la série $\sum \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$.

Notons que l'on ne peut pas énoncer un théorème analogue pour la convergence simple ; on peut construire, par exemple, une suite de fonctions continues sur R qui converge simplement vers la fonction $f$ égale à 0 pour $x = 0$ et à 1 pour $x \neq 0$.

Les espaces de fonctions continues munis de la métrique de la convergence uniforme ont une grande importance en Mathématiques. En particulier, l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ est d'un usage constant ; c'est un espace vectoriel (de dimension infinie) sur le corps R. Sa métrique de la convergence uniforme est associée à la norme $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Pour cette métrique, il est *complet* ; on montre aisément qu'il n'est pas localement compact.

## 4. CONCLUSION

Au cours de cette étude, nous avons rencontré plusieurs notions : continuité uniforme d'une fonction, suite de Cauchy, espace complet, convergence uniforme.

Ces notions ont été définies à partir de la métrique des espaces étudiés ; toutefois, nous avons remarqué qu'elles étaient invariantes par un changement de métrique qui soit un isomorphisme uniforme. On voit donc que ces notions ne sont pas des notions métriques, et on peut espérer les étendre à des espaces non-métriques.

On peut effectivement définir des notions analogues pour un groupe topologique (c'est-à-dire un groupe muni d'une topologie telle que les applications $x \to x^{-1}$ et $(x, y) \to x.y$ soient continues) ; ou plus généralement pour les espaces appelés *espaces uniformes*, qui ne sont autres que des ensembles munis d'une structure permettant de parler d'ordre de petitesse pour les sous-ensembles, avec des axiomes correspondant à ceux des espaces métriques.

G. C.