ESPACES EUCLIDIENS et ESPACES MÉTRIQUES NOTIONS MÉTRIQUES et NOTIONS TOPOLOGIQUES *

par André Revuz

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Poitiers

I. Retour sur la droite réelle

Dans la précédente conférence, M. Choquet a rappelé les propriétés algébriques de la droite réelle R et a défini les applications continues de R dans R, en se fondant sur la structure d'ordre de R. L'intervalle $]a, b[$ étant l'ensemble des nombres réels x vérifiant $a < x < b$, l'application f de R dans R est continue en x_0, si, pour tout intervalle $]\alpha, \beta[$ auquel appartient $f(x_0)$, il existe un intervalle $]a, b[$ tel que $x \in]a, b[$ implique $f(x) \in]\alpha, \beta[$, ou encore, en utilisant l'application réciproque f^{-1} (A étant un sous-ensemble de R, $f^{-1}(A)$ est l'ensemble défini par

$$x \in f^{-1}(A) \iff f(x) \in (A) :$$

f est continue en x_0, si, pour tout intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant $f(x_0)$, $f^{-1}(]\alpha, \beta[)$ contient un intervalle auquel x_0 appartient. Si l'on désigne par ensemble ouvert (ou plus rapidement par « ouvert »), toute réunion d'intervalles, on en déduit qu'une application de R dans R est continue en tout point si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert (l'ensemble vide est considéré comme ouvert).

Notre premier propos sera de définir la continuité des applications de R dans R, en utilisant une autre structure de la droite réelle : désignant par distance de deux nombres réels la valeur absolue de leur différence, on pourra donner de la continuité de f au point x_0 les trois définitions équivalentes suivantes :

1° Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que $|x - x_0| < \eta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2° La distance de $f(x)$ à $f(x_0)$ tend vers 0, lorsque tend vers 0 la distance de x à x_0.

3° Pour tout intervalle I de centre $f(x_0)$, $f^{-1}(I)$ contient un intervalle de centre x_0.

De l'énoncé 3°, et du fait que tout intervalle contenant un point contient un intervalle ayant ce point pour centre, on déduit l'identité entre cette définition de la continuité et celle qui est fondée sur la structure d'ordre de R et on peut donner des ouverts de R la définition suivante : est ouvert tout ensemble O tel que $x \in$ O implique l'existence d'un intervalle I de centre x inclus en O.

Cette dernière définition de la continuité a le mérite de s'appliquer à tout espace sur lequel a été définie une distance.

(*) Conférence prononcée le jeudi 15 novembre 1956, à l'Institut Henri-Poincaré, seconde conférence du cycle sur la topologie organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

II. Définition de la distance

E étant un ensemble dont les éléments seront désignés par x, y... une distance sur E est une application de $E \times E$ dans $R+$ (ensemble des réels positifs ou nul) vérifiant les propriétés suivantes :

1° $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

2° $d(x, y) = d(y, x)$ Symétrie.

3° $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ Inégalité triangulaire.

E muni de cette distance sera dit un *espace métrique* (ou distancié). Il est immédiat que l'application $x, y \to |x - y|$ est bien une distance sur R.

Si E et F sont deux espaces métriques, on peut appliquer telle quelle la définition 2° ci-dessus de la continuité. L'équivalent de 1° est, si d est la distance sur E et δ la distance sur F : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, x_0) < \eta \Longrightarrow \delta [f(x), f(x_0)] < \varepsilon$. L'équivalent de 3° s'obtient en introduisant la notion de boule : la boule ouverte (resp. fermée) de centre x_0 et de rayon r (*strictement positif*) est l'ensemble des points x vérifiant $d(x_0 x) < r$. (resp. $\leqslant r$). Il prend alors la forme : l'image réciproque d'une boule de centre $f(x_0)$ contient une boule de centre x_0.

Avant de poursuivre l'étude de la continuité définie à partir de la distance, étudions un peu celle-ci en elle-même. Les axiomes de la distance, qui sont satisfaits par les distances « concrètes » sur la droite, dans le plan (R^2) dans l'espace à trois dimensions (R^3), apparaissent par là comme « naturels ». Il n'est cependant pas mauvais d'examiner le sens de chacun d'eux et de déterminer dans quelle mesure l'absence d'un des axiomes est rédhibitoire pour l'utilisation de la distance correspondante.

Le premier axiome signifie que tout élément est à distance nulle de lui-même et à distance positive de tout autre élément. Que se passerait-il si l'on avait une « distance » satisfaisant 2° et 3°, mais seulement 1 *bis* : $x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0$ et pour laquelle il existe des couples d'éléments différents à distance non nulle l'un de l'autre ? (Une telle distance est appelée un écart). De deux choses l'une : ou bien cela résulte d'un choix maladroit de la distance et il faut en chercher une autre ; ou bien ce sont, en quelque sorte, les éléments différents dont la distance est nulle, qui ont tort d'être différents, car ils jouent le même rôle dans la question traitée. Dans ce cas, on remarquera que : 1° la relation $x \varrho y$ définie par $d(x, y) = 0$ est une relation d'équivalence ; 2° que les distances d'un élément x à deux éléments y et z appartenant à une même classe d'équivalence sont égales, car $d(z, y) = 0$ entraîne

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) = d(x, y),$$

et

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) = d(x, z)$$

et que, par suite, on peut adopter comme distance de deux classes modulo ϱ celle d'un élément quelconque de la première à un élément quelconque de la seconde. L'espace quotient E/ϱ est un espace métrique. Il est déduit de E par identification des éléments à distance nulle les uns des autres. Un exemple simple de cette situation est fourni par l'écart suivant : valeur absolue de la différence des abscisses pour les points

du plan. Les classes d'équivalence sont les droites $x = c^{te}$. L'espace E/ρ est isométrique (voir plus loin) à la droite réelle.

Le deuxième axiome, sur la symétrie de la distance, pour naturel qu'il paraisse, n'est pas vérifié par une distance concrète : la distance mesurée en heures de marche que l'on utilise en montagne et qui est plus grande à la montée qu'à la descente. Le cas d'une distance dissymétrique n'est pas très dramatique cependant, car en posant

$$\delta(x, y) = \sup. [d(x, y), d(y, x)],$$

on obtient avec δ une distance satisfaisant les trois axiomes (si d satisfaisait 1° et 3°).

Le troisième axiome a pour mérite de garantir, pour employer un langage intuitif, que « le voisin du voisin est voisin ». D'autres inégalités auraient le même effet. Toute inégalité de la forme

$$d(x, y) \leqslant \varphi [d(x, z), d(z, y)]$$

où φ est une fonction réelle, positive, nulle et continue au point (0, 0) assurerait au moins, pour employer le même langage intuitif, que « le très voisin du très voisin est très voisin ».

L'inégalité triangulaire sous sa forme classique a deux mérites :

1° sa simplicité ;

2° son très grand domaine d'application. Tous les espaces étudiés de la Quatrième du Lycée au Certificat de Calcul différentiel et intégral peuvent être pourvus d'une structure métrique — utilisée effectivement et non imposée pour les besoins de la cause !

Exemples de distances (1).

Remarquons que l'on peut définir sur tout ensemble au moins une distance en posant $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. (C'est celle que pourrait obtenir un arpenteur avec un mètre infiniment élastique !). C'est évidemment un cas extrême qui ne peut guère avoir d'autre rôle que celui de garde-fou, en fournissant un contre-exemple éventuel à un théorème conjecturé sur les espaces métriques.

Dans l'espace R^n on peut définir une première distance $d_1(x, y)$ (distance euclidienne) pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en posant $d_1(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$.

Les axiomes 1° et 2° sont évidemment satisfaits. Pour établir l'inégalité triangulaire, posons :

$x_i - z_i = a_i$ et $z_i - y_i = b_i$; on a $x_i - y_i = a_i + b_i$.

Il s'agit de vérifier

$$\sqrt{\sum (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}$$

(1) Il n'est peut-être pas sans intérêt de citer, à côté des exemples mathématiques, quelques-unes des distances de notre vie quotidienne, auxquelles on n'a pas l'habitude de donner ce nom, mais qui en ont pourtant en général les propriétés mathématiques : prix d'une unité de conversation téléphonique, durée d'un voyage, son coût...

inégalité équivalente à

$$\sum(a_i + b_i)^2 \leqslant \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}$$

elle-même équivalente à

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}$$

qui est vérifiée si $\Sigma\, a_i b_i \leqslant 0$, et qui pour $\Sigma\, a_i b_i > 0$ résulte de l'inégalité de Schwarz :

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

qui exprime que le trinôme $\sum (a_i + b_i\lambda)^2$ est toujours positif ou nul, et est toujours vérifiée.

Remarquons que l'égalité ne peut avoir lieu que si $\frac{a_i}{b_i} = -\lambda$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, c'est-à-dire si

$$\frac{x_1 - z_1}{y_1 - z_1} = \ldots = \frac{x_i - z_i}{y_i - z_i} = \ldots = \frac{x_n - z_n}{y_n - z_n}$$

c'est-à-dire si les trois points x, y, z sont alignés.

Une autre distance possible dans R^n est

$$d_2(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|.$$

Une troisième est $d_3(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$.

Si les coordonnées x_i sont considérées comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires, les boules de d_1 sont limitées par des cercles dans R^2, par des sphères dans R^3. (On aurait des ellipses et des ellipsoïdes avec des coordonnées obliques). Avec des coordonnées rectangulaires, les boules de d_2 sont limitées par des carrés de côtés parallèles aux axes dans R^2 (cubes dans R^3), et les boules de d_3 sont limitées par des carrés de côtés parallèles aux bissectrices des axes dans R^2 (octaèdres réguliers dans R^3).

Si d est une distance sur un espace, et f une fonction réelle définie sur R^+, positive et vérifiant $f(0) = 0$ et $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $f(d)$ est une distance admettant les mêmes boules que d [chaque boule ayant, en général, des rayons différents pour d et $f(d)$]. On peut, en particulier, prendre pour f une fonction croissante concave. Par exemple, si d est une distance, $\frac{d}{1+d}$ en est une autre, qui admet les mêmes boules que la première et qui est bornée.

Si plusieurs distances $d_1, d_2, \ldots, d_p$ sont définies sur un même espace, on vérifie sans peine que

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \ldots\ldots + d_p^2}$$

en est une autre (conséquence de l'inégalité de Schwarz), ainsi que $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_p$ et $d = \sup_i d_i$. (Dans ce dernier cas, la boule de

centre m et de rayon r pour d est l'intersection des boules de mêmes centre et rayon pour les distances d_i).

Notons enfin que, si une suite de distances a été définie sur un espace, on peut en déduire une nouvelle en posant

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n}{1 + d_n}$$

Distance géodésique.

Etant donné un espace métrique E et un sous-ensemble F de E, la restriction à $F \times F$ de l'application d de $E \times E$ dans R^+ est évidemment une distance pour F, dite induite par celle de E. Par exemple, si E est R^3 et F une sphère S, la distance euclidienne de R^3 donne une distance sur S (longueur de la corde) que l'on pourra appeler aussi distance de plongement de S dans R^3. Mais on peut, à partir de celle-là, en définir une autre : la distance géodésique.

Supposons qu'il existe sur F au moins un chemin continu liant un point donné a à un point donné b. Par un tel chemin, nous entendons une application continue f du segment $[0, 1]$ dans F vérifiant $f(0) = a$, $f(1) = b$. A toute suite finie $\{t_i\}$: $t_0 = 0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b$ correspondent les points $a, \ldots, m_i = f(t_i), \ldots, b$ et le nombre réel positif $L(\{t_i\}) = d(a, m_1) + \ldots + d(m_i, m_{i+1}) + \ldots + d(m_{n-1}, b)$. Si l'ensemble de ces nombres pour toutes les suites finies t_i est borné supérieurement, le chemin est dit rectifiable et $\sup L(\{t_i\}) = L(f)$ est la longueur du chemin.

On vérifie alors que $\delta(a, b) = \inf L(f)$ (inf étant calculé pour l'ensemble de tous les chemins continus reliant a à b) est une distance. En effet :

1° $\delta(a, b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$ est évident, car si $a = b$, il y a un chemin de longueur nulle reliant a à b ($f(t) = a$ pour tout $t \in [0, 1]$) et si $a \neq b$ tout chemin a une longueur au moins égale à $d(a, b) > 0$.

2° La symétrie est évidente.

3° $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe des chemins f_{ac} et f_{cb} tels que

$$L(f_{ac}) < \delta(a, c) + \varepsilon \qquad L(f_{cb}) < \delta(b, c) + \varepsilon.$$

Or, on peut définir de manière évidente la somme de deux chemins (C'est l'application φ définie par

$$\varphi(t) = f_{ac}(2t) \qquad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1/2,$$

$$\varphi(t) = f_{cb}(2t - 1) \quad \text{pour } 1/2 \leqslant t \leqslant 1)$$

et la longueur du chemin somme est la somme des chemins. Mais φ est un chemin reliant a à b, on a donc

$$\delta(a, b) \leqslant L(\varphi) = L(f_{ac}) + L(f_{cb}) \leqslant \delta(a, c) + \delta(b, c) + 2\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, il en résulte l'inégalité triangulaire. On peut démontrer élémentairement, en appliquant la définition ci-dessus, que la distance géodésique définie sur la sphère S_2 à partir de la distance euclidienne de R^3 est la longueur du plus petit des deux arcs de grand cercle joignant deux points.

III. Isométries

Une application biunivoque f d'un espace métrique E (distance d) sur un espace métrique F (distance δ) est une isométrie si

$$d(a, b) = \delta [f(a), f(b)]$$

pour tous les couples d'éléments de E.

C'est le cas des transformations de la géométrie élémentaire, fâcheusement nommées déplacements et symétries (et qu'il vaudrait mieux appeler isométries directes ou inverses) (1).

Il est clair que si E' est un sous-espace de E, la restriction de f à E' est une isométrie de E' sur f(E'). Mais ce qui n'est pas toujours vrai et fera par conséquent l'objet de théorèmes, c'est la possibilité d'étendre aux espaces entiers une isométrie existant entre deux sous-espaces de E et F.

Par exemple, si $E = F = R^2$, l'isométrie entre deux sous-ensembles composés de trois points non alignés s'étend de manière unique aux espaces entiers : c'est la forme épurée du troisième cas d'égalité des triangles. Il est encore vrai si E et F sont deux sphères de même rayon, que la distance soit la distance de plongement ou la distance géodésique correspondante. Avec ces mêmes distances, il est faux sur deux sphères de rayons différents. (Ces exemples montrent combien sont « lourdes d'axiomes inexprimés » les démonstrations usuelles des cas d'égalité !).

IV. Continuité

Reprenons la troisième définition de la continuité d'une application f d'un espace métrique E dans un espace métrique F : dire que f est continue au point x_0, c'est dire que l'image réciproque de toute boule de centre $f(x_0)$ contient une boule de centre x_0. Ceci amène à introduire la notion suivante :

Définition : On appelle voisinage d'un point x tout ensemble contenant une boule de centre x.

On peut alors énoncer : « f est continue au point x_0 si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0. » Enoncé simple et général qui a le mérite de conserver tout le contenu intuitif de la notion de continuité.

Supposons que f soit continue en tout point de E. On va pouvoir énoncer ce fait très simplement en faisant intervenir les ouverts de E et de F.

Définition : Un ensemble ouvert d'un espace métrique est une réunion (quelconque) de boules ouvertes.

En remarquant que si $y \in B(x, r)$, on a $d(x, y) = r' < r$ et par suite

---

(1) Il semble d'ailleurs que ce soit en utilisant les notions de distance et d'isométrie que l'on puisse le plus facilement donner une axiomatique de la Géométrie élémentaire, qui soit simple et « concrète » dans la mesure où les axiomes expriment des opérations usuelles de la Géométrie (mesure de distances, pliages, etc...).

$B(y, r - r') \subset B(x, r)$ en vertu de l'inégalité triangulaire, on en déduit une autre définition des ouverts :

Un ouvert est un ensemble qui est voisinage de tous ses points. On en déduit : « f est une application continue de E dans F (c'est-à-dire continue en tout point de E) si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E. »

Remarquons la facilité avec laquelle cette définition de la continuité permet de démontrer le théorème : Si E, F, G, sont trois espaces métriques, f une application continue de E dans F, g une application continue de F dans G, l'application composée $g \circ f$ de E dans G est continue.

Si $A \subset F$, et si $\complement A$ est son complémentaire, on sait que

$$f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A),$$

si donc on appelle fermé tout ensemble dont le complémentaire est ouvert, on voit qu'une définition équivalente de la continuité s'obtient en remplaçant dans l'énoncé ci-dessus le mot ouvert par le mot fermé.

On peut donner de l'ensemble fermé une définition intrinsèque en utilisant la notion de point adhérent à un ensemble.

Définition : a est adhérent à A, si, pour tout voisinage V de a, on a $V \cap A \neq \emptyset$. (Il suffit évidemment que ceci ait lieu pour les boules de centre a). L'adhérence $\overline{A}$ d'un ensemble A est l'ensemble de ses points adhérents. On a pour tout A, $A \subset \overline{A}$.

Théorème : Un ensemble est fermé si et seulement s'il est égal à son adhérence.

En effet, A fermé veut dire $\complement A$ ouvert. Si $a \notin A$, il existe une boule $B(a, r)$ incluse en $\complement A$, donc $B(a, r) \cap A = \emptyset$, et $a \notin \overline{A}$ (1), d'où $A \subset \overline{A}$, c'est-à-dire $\overline{A} = A$. Inversement, si $A = \overline{A}$, pour tout point $a \notin A$, il existe une boule $B(a, r)$ telle que $B(a, r) \cup A = \emptyset$, d'où $B(a, r) \subset \complement A$ et $\complement A$ est ouvert.

On vérifie immédiatement qu'une boule fermée est un ensemble fermé (ce qui rassure sur la cohérence de la terminologie).

Les ensembles ouverts possèdent deux propriétés très importantes :

(O_1) : Toute réunion d'ouverts est un ouvert. C'est une conséquence immédiate de la définition.

(O_2) : Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. (L'ensemble vide compte parmi les ouverts). En effet, soient, $O_1, O_2, \ldots, O_n$, n ouverts d'intersection non vide et $a \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$. Il existe pour $i = 1, \ldots, n$

(1) Le signe $\notin$ a été utilisé à la place du signe $\in$ barré. $\notin$ signifie donc ici « n'appartient pas à ».

une boule $B(a, r_i)$ incluse en O_i. On a donc $B(a, \inf_i r_i) \subset \prod_{i=1}^{n} O_i$; ce qui établit l'assertion.

Les fermés étant des complémentaires d'ouverts possèdent les propriétés duales (que le lecteur pourra aussi démontrer directement en utilisant la définition $A = \bar{A}$ des fermés) :

(F_1) : Toute intersection de fermés est un fermé.

(F^2) : Toute réunion finie de fermés est un fermé.

V. Notions topologiques

Etant donnés deux ensembles E et F, une distance d sur E (δ sur F) fait de E (resp. de F) un espace métrique E_d (resp. F_δ). Désignons par $\mathcal{C}(E_d, F_\delta)$ l'ensemble des applications continues de E_d dans F_δ. (C'est un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les applications de E dans F). Une question importante se pose : Peut-on modifier d, ou δ, ou les deux, sans modifier $\mathcal{C}(E_d, F_\delta)$? Nous répondrons ici à la question suivante, parente de la précédente :

d_1 étant une distance donnée sur E, que doit être la distance d_2 sur E, pour que pour tout espace métrique F_δ, on ait

$$\mathcal{C}(E_{d_2}, F_\delta) = \mathcal{C}(E_{d_1}, F_\delta)$$

Il est évidemment suffisant que la famille $\mathcal{O}_1$ des ouverts correspondant à d_1 soit identique à la famille $\mathcal{O}_2$ des ouverts correspondant à d_2. Mais c'est aussi nécessaire, car si un ensemble appartenait à $\mathcal{O}_1$ sans appartenir à $\mathcal{O}_2$, il suffirait de prendre $F_\delta = E_{d_1}$ pour constater que l'application identique de E dans lui-même appartient à $\mathcal{C}(E_{d_1}, E_{d_1})$ et non à $\mathcal{C}(E_{d_2}, E_{d_1})$.

La condition pour d_1 et d_2 de donner les mêmes ouverts est équivalente à la suivante : Pour tout $a \in E$, toute boule $B_1(a, r)$ relative à d_1 contient une boule $B_2(a, r')$ relative à d_2, et inversement.

On vérifie à partir de là que les trois distances d_1, d_2, d_3 définies plus haut sur R^n donnent les mêmes ouverts et par conséquent les mêmes ensembles $\mathcal{C}(R^n, F_\delta)$ pour tout espace métrique F_δ.

On voit donc que si la donnée d'une métrique sur E définit l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$, la donnée de cet ensemble, et même de ces ensembles pour tout F, ne définit pas la métrique de E sans ambiguïté.

La notion de distance nous a conduit à une définition de la continuité, qui, finalement, ne dépend pas de la distance elle-même, mais seulement des ouverts que l'on a définis à partir d'elle.

Si, donc, on ne s'intéresse qu'à la continuité des applications définies sur un espace E, la structure métrique est plus précise qu'il n'est nécessaire. C'est ce qui amène à définir des structures plus générales : les structures topologiques.

Etant donné un ensemble E, on dit qu'on a défini une topologie $\mathcal{T}$ sur E si l'on s'est donné une famille $\mathcal{O}$ de sous-ensembles de E vérifiant les deux axiomes suivants :

(O_1) : Toute réunion d'ensembles appartenant à $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$.

(O_2) : Toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$.

(Les conventions relatives à la réunion et à l'intersection de la partie vide de $\mathcal{O}$, entraînent que E et le sous-ensemble vide de E appartiennent à $\mathcal{O}$).

Les ensembles appartenant à $\mathcal{O}$ seront dits les ouverts de E dans la topologie $\mathcal{T}$ et E sera dit un espace topologique.

Si E et F sont deux espaces topologiques, une application f de E dans F sera continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.

Toutes les définitions données plus haut se transposent immédiatement : si on appelle fermé tout complémentaire d'ouvert, la famille $\mathcal{F}$ des fermés vérifie les axiomes (F_1) et (F_2) et on peut évidemment définir $\mathcal{T}$ par une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de E vérifiant ces deux axiomes.

De même, on appellera voisinage d'un point tout ensemble contenant un ouvert contenant le point ; point adhérent à un ensemble tout point tel que pour tout voisinage V de ce point, on ait $V \cap A \neq \emptyset$; adhérence $\overline{A}$ d'un ensemble A l'ensemble de ses points adhérents. On vérifie que les fermés sont les ensembles tels que $A = \overline{A}$.

On appellera homéomorphisme de deux espaces topologiques E et F une application biunivoque et bicontinue de E sur F.

Mais ces définitions étant acquises, une foule de problèmes se posent, par exemple :

Une topologie étant donnée sur un ensemble E, peut-elle être déduite d'une structure métrique sur E ?

Quelles restrictions y a-t-il lieu d'apporter à la généralité des structures topologiques définies plus haut pour qu'elles possèdent telle propriété particulière, de R^n par exemple ?

La tâche de la topologie, en tant que théorie, est de répondre à ce genre de questions.

A. R.