36e Année — N° 183 Janvier 1957

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

LA DROITE NUMÉRIQUE; PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES FONDAMENTALES (*)

par Gustave CHOQUET
Professeur à la Sorbonne

1. Introduction

La topologie générale est née le jour où l'on s'est intéressé à d'autres fonctions que celles données par une expression analytique, et où l'on a senti le besoin de donner une définition précise des fonctions continues. Aujourd'hui encore, on peut dire que la topologie générale est l'étude des notions de convergence et de continuité.

Le premier ensemble sur lequel on a défini ces notions, et qui maintenant encore reste le plus important, aussi bien dans les recherches théoriques que dans les applications, est l'ensemble R des nombres réels.

C'est à la définition de R et à sa topologie que je consacrerai cette conférence.

2. L'ensemble R défini comme groupe commutatif, totalement ordonné, et continu

Avant de parler de la topologie de R, j'en rappellerai d'abord les propriétés essentielles ; plus précisément, je définirai R comme ensemble muni d'une structure algébrique et d'une structure d'ordre, aux propriétés caractéristiques.

DÉFINITION 1 : *On dit qu'un ensemble* G *est un groupe commutatif totalement ordonné si :*

1) G *est muni d'une opération interne notée* $+$ *pour laquelle* G *est un groupe commutatif.*

2) G *est muni d'une structure d'ordre total, noté* $\leqslant$.

3) *Cette addition et cet ordre sont compatibles en ce sens que :* $a \leqslant b$ *entraîne* $a + x \leqslant b + x$ *pour tout* x.

Il est immédiat alors que la relation $a \leqslant b$ équivaut à $0 \leqslant (b - a)$.

(*) Conférence prononcée le jeudi 25 octobre 1956, à l'Institut Henri-Poincaré, première conférence du cycle sur la topologie organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

Exemples : L'ensemble Z des entiers de signe quelconque ; l'ensemble Q des nombres rationnels ; l'ensemble P des polynômes $p(x)$ à coefficients réels, où l'on pose $p_1 < p_2$ si le terme de plus bas degré de $(p_2 - p_1)$ a un coefficient > 0.

DÉFINITION 2 : *On dit qu'un ensemble totalement ordonné* E *est* continu *si :*

1) *Tout intervalle ouvert* $]a, b[$ *de* E *contient au moins un point (donc aussi une infinité de points).*

2) *Tout sous-ensemble* X *de* E *qui est majoré* (1) *admet une borne supérieure* (1).

L'ensemble Z des entiers vérifie la propriété 2, mais pas la propriété 1 ; pour l'ensemble Q des rationnels, c'est l'inverse.

Quand R sera défini, on pourra montrer que tout sous-intervalle de R est continu. De même, soit E l'ensemble des couples (a, b) où $a \in [0,1]$ et $b \in [0,1]$; si on l'ordonne par la relation :

$$(a, b) \leqslant (a', b') \quad \text{si } a < a' \quad \text{ou si } a = a' \text{ et } b \leqslant b',$$

l'ensemble ordonné E est continu.

Il est immédiat que si E est continu, toute partie minorée X de E admet une borne inférieure, qui n'est autre que la borne supérieure de l'ensemble des minorants de X.

Nous allons voir que les définitions 1 et 2 conduisent à un ensemble structuré unique, à une isomorphie près. De façon plus précise :

THÉORÈME 1 : *Soient* G *et* G' *deux groupes commutatifs totalement ordonnés et continus, et contenant chacun plus d'un élément. Quels que soient* $a \in G$ *et* $a' \in G'$ *avec* $a > 0$ *et* $a' \geqslant 0$, *il existe une représentation croissante* (2) *et une seule* f *de* G *dans* G' *telle que* $f(a) = a'$. *Lorsque* $a' \neq 0$, f *est une isomorphie ; lorsque* $a' = 0$, *on a* $f(x) = 0$ *pour tout* x.

On a un énoncé analogue pour $a' \leqslant 0$ *en remplaçant le mot « croissante » par « décroissante ».*

La démonstration de ce théorème est calquée sur la démonstration élémentaire classique établissant l'existence de l'exponentielle :

On montre d'abord que tout intervalle de G (resp. G') possède un milieu, ce qui permet de définir l'ensemble A des éléments $(p/2^r)a$ de G ; l'ensemble A est partout dense (3) sur E et on définit f sur A par la relation $f(\frac{p}{2^r} a) = \frac{p}{2^r} f(a)$. On prolonge ensuite f à G tout entier.

Remarque : Soient f et g deux représentations monotones de G dans G' ; soit h l'application définie par $h(x) = f(x) + g(x)$. Il est immédiat que h est une représentation. D'autre part, si, par exemple,

---

(1) On dit que l'élément a de E *majore* X si $x \leqslant a$ pour tout $x \in$ X. Si, parmi l'ensemble de tous les majorants de X, il en existe un qui soit plus petit que tous les autres, on l'appelle *borne supérieure* de X. On définit de même les notions de *minorant* et de *borne inférieure.*

(2) C'est-à-dire que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et que $(x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \leqslant f(y))$.

(3) C'est-à-dire que tout intervalle ouvert de G contient des points de A.

$h(a) \geqslant 0$, $(a > 0)$, on a aussi $h(x) \geqslant 0$ pour tout élément $x \geqslant 0$ de A ; ceci s'étend alors à tout $x \geqslant 0$.

On peut donc dire que la somme de deux représentations monotones de G dans G' en est une ; plus précisément, ces représentations constituent un groupe, d'ailleurs isomorphe à G'.

Existence de ces groupes.

Le théorème 1 est fondamental puisqu'il montre l'unicité, à une isomorphie près, des groupes étudiés. Il n'en établit pas l'existence ; celle-ci pourra s'établir de diverses façons.

Par exemple, G sera l'ensemble des développements décimaux illimités, muni de l'addition ordinaire ; le défaut de ce procédé est la nécessité d'éliminer les développements ne comprenant que des 9 à partir d'un certain rang. Remarque analogue pour les développements dyadiques.

Plus classiquement, on peut partir du groupe commutatif ordonné Q des nombres rationnels ou des nombres rationnels dyadiques, et le compléter en utilisant, soit le procédé des suites de Cauchy, soit le procédé des coupures.

Nous signalerons ici une variante commode du procédé des coupures, qui supprime les inconvénients dus à l'existence de trois sortes de coupures :

Appelons *section commençante* du groupe ordonné Q toute partie non vide s de Q telle que :

1) Si $x < y$ et si $y \in s$, on ait aussi $x \in s$.

2) s n'ait pas de plus grand élément, et $s \neq Q$.

Par exemple, pour tout $a \in Q$, l'ensemble s_a des $x < a$ est une section commençante.

Soit S l'ensemle des sections commençantes ; la relation d'inclusion définit dans S un ordre total dont on vérifie qu'il est continu, en utilisant le fait que toute réunion de sections commençantes en est une, ou bien est égale à Q.

On définit sur Q une addition en posant :

$$s_1 + s_2 = \text{ensemble des } (x_1 + x_2), \text{ où } x_1 \in s_1 \text{ et } x_2 \in s_2.$$

Alors S muni de cette addition et de cet ordre est un groupe commutatif totalement ordonné continu, et il contient un sous-groupe partout dense isomorphe à Q dans l'isomorphie $a \to s_a$ $(a \in Q)$; on identifie en général ce sous-groupe à Q.

C'est de préférence à cet ensemble que nous donnerons le nom de droite réelle R.

3. Structure de corps sur R

Sur la droite réelle R telle que nous venons de la définir, on n'a jusqu'ici qu'une seule opération, l'addition ; on peut en outre y définir une multiplication. Pour cela, il suffirait de prolonger à R la multiplication

déjà définie sur son sous-ensemble partout dense Q ; cette construction est classique.

Mais nous allons utiliser une autre méthode, basée sur le théorème 1, qui a l'intérêt de souligner les propriétés caractéristiques de la multiplication, et d'être plus proche des méthodes élémentaires qui considèrent la multiplication comme un opérateur.

DÉFINITION 3 : *On appelle* corps commutatif totalement ordonné *tout ensemble* K *muni d'une structure de corps commutatif et d'un ordre total (noté* $\leqslant$*) compatible avec la structure algébrique de* K, *en ce sens que :*

1) $a \leqslant b$ *entraîne* $a + x \leqslant b + x$ *pour tout* x.

2) $0 \leqslant a$ et $0 \leqslant b$ *entraînent* $0 \leqslant ab$.

On désigne par K_+ (*resp.* K_+^*) *l'ensemble des éléments* $x \geqslant 0$ (*resp.* $x > 0$).

THÉORÈME 2 (*existence et unicité*) :

Soit G *un groupe commutatif totalement ordonné continu* (*et noté additivement*).

Pour tout élément $e > 0$ *de* G, *il existe sur* G *une structure de corps et une seule telle que son addition soit celle de* G, *que son unité soit* e, *et telle que :*

(1) $\qquad 0 \leqslant a$ et $0 \leqslant b$ *entraînent* $0 \leqslant ab$.

Ce corps est commutatif.

Nous avons supposé $e > 0$ parce que, dans un corps totalement ordonné, tout carré x^2 est $\geqslant 0$; si donc e est l'unité, on a : $e = e^2 > 0$.

Unicité : Supposons que G possède une structure de corps satisfaisant à la condition (1) et notons xy le produit de x et y.

Soit a un élément > 0 de G. L'application f définie par $x \to ax$ est une isomorphie du groupe G sur lui-même, et l'inégalité (1) montre que f est croissante ; or $f(e) = a$, donc, d'après le théorème 1, cette application f est entièrement déterminée par la donnée de a, e, et de la structure de groupe de G.

De même si $a < 0$, comme on a dans tout corps $ax = -(-a)x$, le produit ax est déterminé par la donnée de a, e, G (et x).

Autrement dit, s'il existe sur G une structure de corps satisfaisant à la condition (1), elle est entièrement déterminée par le choix de l'élément unité.

Existence : Il nous reste à montrer qu'il existe bien sur G une telle structure de corps, et qu'un tel corps est commutatif.

Ce qui précède nous guide en nous montrant qu'on peut essayer de définir le produit ax comme transformé de x dans la représentation f_a croissante ou décroissante, qui transforme e en a.

Plus précisément, posons : $ax = f_a(x)$.

Nous voulons montrer que, muni de cette multiplication, G devient un corps commutatif ordonné :

1) $f_a \circ f_b$ est une représentation monotone.

Comme $f_a(f_b(e)) = f_a(b) = ab$, on a donc : $f_a \circ f_b = f_{ab}$.

Il en résulte que $f_a(f_b(c)) = f_{ab}(c)$, d'où : $a(bc) = (ab)c$; autrement dit, le produit est *associatif*.

2) Comme f_e est l'application identique, on a $eb = b$ pour tout b ; d'autre part $be = b$. Donc e est un élément unité.

3) Pour tout $a \neq 0$, f_a est un isomorphisme de G sur G ; donc il existe un élément a' tel que $f_a(a') = e$; on a $aa' = e$; ceci entraîne $a'a = e$; car si $a'a = u$, on a $aa'a = au$ ou $a = au$, d'où $u = e$ puisque f_a est biunivoque.

Autrement dit, a possède un inverse.

4) La relation $f_a(x + y) = f_a(x) + f_a(y)$ s'écrit :

$$a(x + y) = ax + ay.$$

On va voir que l'on a aussi $(a + a')x = ax + a'x$.

En effet, l'application $x \to (a + a')x$ n'est autre que $f_{a+a'}$; l'application $x \to ax + a'x$ est la somme des deux représentations monotones f_a, $f_{a'}$; d'après une remarque précédente, c'est une représentation monotone qu'on notera g. Comme les applications $f_{a+a'}$ et g prennent la même valeur au point e, elles sont identiques.

Nous venons donc de démontrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Les propriétés de la multiplication démontrées jusqu'ici prouvent qu'elle détermine sur G une structure de corps. On va voir que ce corps est commutatif.

5) Il suffit pour cela de montrer l'identité des applications $x \to ax$ et $x \to xa$. Supposons par exemple $a > 0$.

La première application est f_a ; soit φ_a la seconde. Nous venons de montrer que $(x + y)a = xa + ya$; d'autre part $xa \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$; donc φ_a est une représentation monotone. Comme $\varphi_a(e) = f_a(e)$, on a bien $\varphi_a = f_a$.

6) Si l'on remarque enfin que les relations $0 \leqslant a$ et $0 \leqslant x$ entraînent $0 \leqslant ax$, on voit que le théorème est entièrement démontré.

COROLLAIRE : *Soient* K *et* K' *deux corps commutatifs totalement ordonnés continus. Il existe un isomorphisme croissant et un seul du corps* K *sur le corps* K'.

Cet isomorphisme n'est autre que l'isomorphisme du *groupe* additif ordonné K sur le *groupe* additif ordonné K', qui transforme l'unité de K en l'unité de K'.

Le corps R : D'après le corollaire précédent, on pourrait appeler corps des réels n'importe lequel des corps commutatifs totalement ordonnés continus. Mais nous réserverons ce nom au corps obtenu en munissant le groupe additif R de la multiplication associée à l'unité $e = 1$.

Exponentielles et logarithmes : L'ensemble R_+^* est un groupe totalement ordonné continu pour la multiplication. Il est donc isomorphe au groupe additif R d'après le théorème 1.

L'isomorphisme monotone f de R sur R_+^* tel que $f(1) = a$ s'ap-

pelle l'*exponentielle* de base a. L'application inverse f^{-1} est le logarithme de base a ; ces applications sont croissantes lorsque $a > 1$, décroissantes lorsque $a < 1$.

De l'isomorphisme entre R et R* résulte par exemple que tout élément de R_+^* est un carré. Ceci permet de préciser le corollaire précédent. En effet, soit f une représentation *algébrique* (4) de K dans K' ; pour tout $x \geqslant 0$, on a $x = y^2$, donc $f(x) = f(y^2) = (f(y))^2 \geqslant 0$. Donc f est une représentation *croissante ;* c'est un isomorphisme croissant, sauf si $f(x) = 0$ pour tout x.

En particulier, pour toute représentation algébrique f du corps R dans lui-même, on a $f(x) = x$ pour tout x, ou bien $f(x) = 0$ pour tout x.

4. Ouverts ; fermés ; voisinages d'un point

Le développement que je viens de donner aux relations entre la structure algébrique de R et sa structure d'ordre pourrait faire croire que la connaissance de ces relations est indispensable pour définir et étudier la *topologie* de R. Nous allons voir qu'il n'en est rien, et que la topologie de R peut se définir à partir de la seule relation d'ordre ; ceci laisse deviner qu'un procédé analogue permettrait de définir une topologie sur tout ensemble totalement ordonné ; on pourra vérifier aisément qu'il en est bien ainsi.

Rappelons que dans R, on appelle intervalle ouvert tout ensemble de la forme $]a, b[$ (où $a < b$), ou $]-\infty, a[$, ou $]a, +\infty[$, ou R ou $\emptyset$. Leurs définitions sont bien connues et n'utilisent que l'existence d'un ordre sur R.

Il est immédiat que l'intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

DÉFINITION 4 : *Un sous-ensemble* A *de* R *est dit* ouvert *si c'est la réunion d'une famille (finie ou infinie) d'intervalles ouverts.*

Il revient au même de dire que A est ouvert si pour tout $x \in A$, il existe un intervalle ouvert contenu dans A et contenant x.

Les propriétés suivantes en résultent aussitôt :

O_1 : Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte.

O_2 : Toute intersection finie d'ouverts est ouverte.

O_3 : R et $\emptyset$ sont des ouverts.

Les propriétés O_1 et O_3 sont immédiates ; et O_2 résulte de ce que toute intersection finie d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

Il résulte aussi de la définition que tout intervalle ouvert est un ouvert.

Remarque : Il est faux que l'intersection d'une infinité d'ouverts soit toujours un ouvert : par exemple l'intersection des intervalles ouverts $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ où $n = 1, 2, \ldots$ est l'ensemble réduit au point O, et celui-ci n'est pas ouvert.

---

(4) C'est-à-dire qu'on n'impose pas *a priori* à f d'être croissante.

DÉFINITION 5 : *Un sous-ensemble* A *de* R *est dit* fermé *lorsque son complémentaire est ouvert.*

De chacune des propriétés O_1, O_2, O_3 va résulter aussitôt une propriété duale pour les fermés, en utilisant les formules suivantes de dualité :

$$\complement\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcap_i \left(\complement A_i\right) \quad ; \quad \complement\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcup_i \left(\complement A_i\right)$$

F_1 : Toute intersection de fermés est fermée.

F_2 : Toute réunion finie de fermés est fermée.

F_3 : $\emptyset$ et R sont fermés.

Exemples de fermés : 1) Tout intervalle fermé $[a, b]$; en effet, son complémentaire est la réunion des intervalles ouverts $]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$.

2) Toute réunion finie d'intervalles fermés (donc en particulier tout ensemble fini).

3) Un exemple célèbre d'ensemble fermé est l'*ensemble triadique de Cantor.* Définissons par récurrence les ensembles A_n : $A_1 = [0,1]$; $A_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$; A_{n+1} s'obtient en enlevant de chacun des intervalles fermés qui constituent A_n le tiers médian ouvert. Chacun des A_n est fermé ; l'ensemble cherché A est l'intersection de ces A_n.

On montre aisément que A n'est autre que l'ensemble des points de [0,1] qui, dans le système de numération de base 3, ont un développement constitué uniquement de chiffres 0 et 2.

Nous donnerons plus loin une caractérisation intéressante des fermés au moyen de la notion de point d'accumulation.

DÉFINITION 6 (*des voisinages*) : *On appelle* voisinage *d'un point* x *de* R *tout sous-ensemble* V *de* R *contenant un ouvert contenant* x.

Autrement dit, V est voisinage de x si V contient un intervalle ouvert contenant x.

Par exemple, tout ensemble ouvert A est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, tout ensemble A qui est voisinage de chacun de ses points est une réunion d'intervalles ouverts, donc est ouvert. Les notions d'ensemble ouvert et de voisinage sont donc réductibles l'une à l'autre.

Voici des propriétés simples des voisinages des points de R :

V_1 : Tout voisinage de x contient x.

V_2 : Tout ensemble contenant un voisinage de x en est un autre.

V_3 : L'intersection de deux voisinages de x en est un autre.

V_4 : Tout voisinage V de x contient un autre voisinage W de x tel que tout point de W admette V comme voisinage.

V_5 : Deux points distincts a et a' de R admettent deux voisinages V et V' disjoints.

Les propriétés V_1, V_2, V_3 sont immédiates. Pour montrer V_4, il suffit de prendre pour W un ouvert contenu dans V et contenant x.

Pour montrer V_5, supposons $a < a'$ et soit b entre a et a' ; il suffit

alors de prendre $V =]-\infty, b[$ et $V' =]b, +\infty[$. C'est la propriété V_5 qu'on utilise pour démontrer qu'une suite de points de la droite peut converger vers un point au plus.

Point adhérent à un ensemble et point d'accumulation d'un ensemble.

Soit A une partie de R et $x \in R$.

On dit que x est *adhérent* à A si tout voisinage de x contient au moins un point de A.

On dit que x est *point d'accumulation* de A si tout voisinage de x contient au moins un point de A autre que x.

Autrement dit, dire que x est adhérent à A équivaut à dire que $x \in A$ ou bien que x est point d'accumulation de A.

On vérifie aisément que si x est point d'accumulation de A, tout voisinage de x contient une infinité de points de A.

Un point de A qui n'est pas point d'accumulation de A est appelé point *isolé* de A.

Exemples : 1) L'ensemble Z des entiers n'a aucun point d'accumulation.

2) L'ensemble A des points $\frac{1}{n}$ $(n \in Z^*)$ a pour seul point d'accumulation le point O. Tous les points de A sont isolés.

3) L'ensemble Q des rationnels n'a aucun point isolé. Tout point de R est point d'accumulation de Q.

Adhérence ; fermeture.

On appelle adhérence *de* A *l'ensemble des points adhérents à* A.

On appelle fermeture *de* A *l'intersection des ensembles fermés contenant* A ; *c'est donc le plus petit fermé contenant* A.

On vérifiera aisément que ces deux ensembles sont identiques ; on les note $\bar{A}$ et l'on emploie indifféremment les deux termes.

Par exemple, dire que A est fermé équivaut à dire que $A = \bar{A}$.

Borne supérieure des ensembles fermés majorés.

Il résulte de la définition de R que toute partie majorée A de R a une borne supérieure a, notée sup. A.

On peut caractériser a par le fait que $]a, +\infty[$ ne contient aucun point de A, et que tout voisinage de a contient au moins un point de A. En particulier, a est adhérent à A ; donc, ou bien $a \in A$, ou bien a est point d'accumulation de A.

Lorsque A est fermé, $A = \bar{A}$, donc $a \in A$; autrement dit, tout ensemble fermé majoré contient sa borne supérieure.

5. Compacité des intervalles fermés bornés

Une des propriétés les plus importantes des intervalles fermés bornés s'exprime par le théorème de Borel-Lebesgue, qui permet de ramener l'étude des recouvrements ouverts à celle des sous-recouvrements ouverts

finis, et d'obtenir ainsi des propriétés globales à partir de propriétés locales.

THÉORÈME 3 (*de Borel-Lebesgue*) : *Soit* $(\omega_i)_{i \in I}$ *une famille d'ouverts de* R *dont la réunion contient l'intervalle fermé borné* $[a, b]$ *; il existe alors une sous-famille finie* $(\omega_i)_{i \in J}$ *qui possède la même propriété.*

Pour le montrer, on désigne par A l'ensemble des points x de $[a, b]$ tels que l'intervalle $[a, x]$ puisse être recouvert par une sous-famille finie des ω_i ; et on montre aisément que A contient sa borne supérieure, et que cette borne supérieure ne peut être que b. Or, la relation $b \in A$ équivaut à l'énoncé du théorème.

THÉORÈME 4 (*de Bolzano-Weierstrass*) : *Tout sous-ensemble infini* X *d'un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *a au moins un point d'accumulation sur* $[a, b]$.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent :

Si aucun point x de $[a, b]$ n'est point d'accumulation de X, tout x possède un voisinage ouvert $V(x)$ contenant au plus un point de X, à savoir x lui-même. Ces $V(x)$ constituent un recouvrement ouvert de $[a, b]$; d'après le théorème 3, il existe une famille finie de ces $V(x)$, disons $(V(x_p))$ $(p = 1, 2, ..., n)$, qui recouvre $[a, b]$. Donc, X contient au plus les n points x_p.

A partir de ces deux théorèmes, on établit aisément les théorèmes analogues obtenus en remplaçant $[a, b]$ par n'importe quel sous-ensemble fermé de $[a, b]$.

6. Fonctions continues. Limite d'une suite

En un sens vague, dire qu'une fonction f est continue en un point x_0, c'est dire que lorsque x est assez voisin de x_0, $f(x)$ est voisin de $f(x_0)$. On peut donc espérer que la notion de voisinage va nous fournir une définition commode de la continuité.

Nous considérerons seulement ici des fonctions définies sur une partie X de R et à valeurs dans R, c'est-à-dire des fonctions numériques sur X.

DÉFINITION 7 : *Soit* f *une application d'une partie* X *de* R *dans* R, *et soit* $x_0 \in X$.

On dit que f *est continue en* x_0 *si, pour tout voisinage* W *de* $f(x_0)$, *il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que :*

$$(x \in V \cap X) \quad \Longrightarrow \quad (f(x) \in W)$$

Si l'on convient d'appeler voisinage de x_0 relativement à X toute partie de X de la forme $(V \cap X)$ où V est un voisinage de x_0 dans R, la condition énoncée équivaut à dire que pour tout W, l'ensemble $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 relativement à X.

Supposons maintenant pour simplifier que $X = R$, c'est-à-dire que f est une application de R dans R.

Si f est continue en tout point, pour tout ouvert ω de R l'ensemble $f^{-1}(\omega)$ est voisinage de chacun de ses points d'après ce qu'on vient

de voir, donc est un ouvert. Inversement, si f est une application possédant cette propriété quel que soit ω, on vérifiera que f est continue en tout point. C'est là une caractérisation commode des fonctions continues.

Elle permet par exemple de montrer immédiatement que si f et g sont deux applications continues de R dans R, leur composée $f \circ g = f(g)$ est aussi continue (transitivité de la continuité).

Une caractérisation équivalente est la suivante :

L'application f de R *dans* R *est continue si, pour tout fermé* F *de* R, $f^{-1}(F)$ *est fermé.*

La démonstration est immédiate à partir de la formule :

$$f^{-1}\left(\bigcup_A\right) = \bigcup\left(f^{-1}(A)\right)$$

Limite d'une suite.

DÉFINITION 8 : *On dit qu'une suite* (x_n) *de points de* R *converge vers un point l de* R, *ou encore a pour limite ce point, si, pour tout voisinage* V *de l, on a* $x_n \in V$, *sauf pour un nombre fini de valeurs de n.*

Si l'on pose $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, la condition précédente revient à dire que, pour au moins un n, on a $X_n \subset \mathbf{V}$.

A partir de l'axiome V_5, on démontre aisément qu'une suite a au plus une limite.

On démontrera aisément les énoncés suivants :

1) Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) a une limite.

2) Soit f une application de X dans R, continue au point a de X ; pour toute suite (x_n) de points de X qui converge vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Valeurs d'adhérence d'une suite.

La suite de nombres réels $a_n = (\frac{1}{n} - 1)^n$ n'est pas convergente ; toutefois, les nombres $\frac{1}{e}$ et $-\frac{1}{e}$ apparaissent comme limites en un sens large. L'analyse de cette notion conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 9 : *Soit* (a_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ *une suite de points de* R. *On dit qu'un point* a *de* E *est une* valeur d'adhérence *de cette suite si, pour tout voisinage* V *de* a, *il existe des indices n arbitrairement grands tels que* $a_n \in V$.

Si l'on désigne par A_n l'ensemble $\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$, on peut dire encore que a est valeur d'adhérence de la suite lorsque, pour tout x, le point a appartient à l'adhérence de A_n.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est donc $A = \bigcap_1^\infty \bar{A}_n$.

Cet ensemble est fermé ; il peut être vide, par exemple si $a_n = n$. Mais on démontrera aisément, en utilisant la compacité des intervalles

fermés bornés, que toute suite bornée a au moins une valeur d'adhérence.

Lorsque la suite (a_n) converge vers l, la seule valeur d'adhérence est l. Mais la *réciproque est fausse ;* par exemple, la suite :

$$\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \ldots, \frac{1}{n}, n, \ldots\right)$$

a pour seule valeur d'adhérence 0 et cependant cette suite ne converge pas vers 0. Par contre, on montrera aisément que si une suite *bornée* a une seule valeur d'adhérence a, elle converge vers a ; ceci tient essentiellement à la compacité des intervalles fermés bornés.

Bases dénombrables de R ; *applications.*

Toutes les propriétés topologiques que nous avons étudiées jusqu'ici n'ont utilisé que la structure d'ordre de R et seraient valables pour tout ensemble totalement ordonné dans lequel toute partie majorée admet une borne supérieure.

En utilisant le fait que R contient un sous-ensemble dénombrable partout dense (à savoir Q), on obtient de nouvelles propriétés liées à ce caractère dénombrable. Nous allons en énumérer quelques-unes, dont les démonstrations sont aisées :

1) Il existe une famille dénombrable (ω_n) d'ouverts de R telle que tout ouvert de R soit la réunion d'une sous-famille de ces ouverts (prendre pour ouverts ω_n les intervalles $]a, b[$ où $a, b \in$ Q. Une telle famille (ω_n) est appelée *base dénombrable* de R.

2) De tout recouvrement ouvert d'une partie X de R, on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini ou dénombrable.

En particulier, toute famille d'ouverts disjoints deux à deux est finie ou dénombrable ; on peut déduire de là que tout ouvert ω de R est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux ; ces intervalles sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence ainsi définie sur ω : $x \mathcal{R} y$ si $[x, y] \subset \omega$.

3) Si a est un point d'accumulation de X, a est limite d'une suite de points distincts de X.

4) Si a est valeur d'adhérence d'une suite (x_n), il existe une sous-suite de la suite donnée qui converge vers a.

5) Soit f une application d'une partie X de R dans R, et soit $a \in$ X. Pour que f soit continue au point a, il faut et il suffit que, pour toute suite (x_n) de points de X qui converge vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Cet énoncé complète un énoncé donné lors de l'étude des limites de suites.

Ces cinq propriétés sont des conséquences faciles de la première.

7. Structure uniforme de R

Nous n'avons pas utilisé jusqu'ici la structure algébrique de R. Nous allons voir que sa structure de groupe additif permet de définir de nouvelles propriétés ; en effet, l'existence de translations sur R va permettre de parler de la petitesse d'un ensemble.

Rappelons que pour tout $X \subset R$ et tout $a \in R$, on désigne par $X + a$ l'ensemble des éléments $(x + a)$ où $x \in X$; on dit aussi que $X + a$ est le translaté de X par la translation a.

On pourrait alors donner la définition suivante : Etant donné un voisinage V de O et un sous-ensemble X de R, on dit que X est petit d'ordre V s'il existe un translaté de X contenu dans V.

Une telle définition aurait l'avantage de pouvoir s'étendre à tout groupe muni d'une topologie convenable. Mais on peut encore préciser cette définition en utilisant le fait que R est un groupe totalement ordonné :

Pour tout $x \in R$, on pose $|x| = \sup. \{x, -x\}$; on vérifie que $|a + b| \leqslant |a| + |b|$; puis on pose : $d(x, y) = \textit{distance}\ (x, y) = |x - y|$. On vérifie aisément que :

1) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$; et $d(x, x) = 0$.
2) $d(x, y) = d(y, x)$.
3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Ces trois propriétés sont essentielles et interviennent constamment dans l'étude de la structure uniforme de la droite.

Diamètre d'un ensemble.

Pour tout $X \subset R$, soit X' l'ensemble des nombres $|x - y|$ où $x, y \in X$. Si X' est majoré, on pose $\delta(X) = \sup. X'$; sinon, on pose $\delta(X) = +\infty$. On appelle $\delta(X)$ le diamètre de X. Il est immédiat que $\delta(X) = \delta(\overline{X})$.

Définition 8 : *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on dit que l'ensemble* X *est petit d'ordre* ε *si* $\delta(X) \leqslant \varepsilon$.

Si les ensembles X et Y sont petits d'ordre ε, et si $X \cap Y \neq \emptyset$, l'ensemble $X \cup Y$ est petit d'ordre 2ε.

Suites de Cauchy.

Soit (a_n) une suite convergente ; si on pose $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$, on voit que $\delta(A_n) \to 0$. La réciproque est une des propriétés fondamentales de la droite :

Disons qu'une suite (a_n) *est une* suite de Cauchy *si* $\delta(A_n) \to 0$ (*ce qui revient à dire que* $|a_p - a_q| \to 0$ *lorsque* p *et* $q \to \infty$).

Nous venons de remarquer que toute suite de Cauchy est convergente ; voici la réciproque bien connue :

Théorème 5 : *Toute suite de Cauchy de* R *est convergente.*

C'est une conséquence immédiate du fait qu'une telle suite est bornée, donc admet au moins une valeur d'adhérence ; et du fait qu'elle admet au plus une valeur d'adhérence.

On peut aussi le montrer, plus classiquement, en se ramenant au cas des suites monotones.

Continuité uniforme.

C'est une notion qu'il ne serait pas possible de définir à partir de

notions purement topologiques, c'est-à-dire à partir de la notion d'ouvert ou de voisinage. Elle est basée sur la structure de groupe de R, ou encore sur la notion de distance ; nous mettrons ce fait en évidence en donnant deux définitions équivalentes de la continuité uniforme :

DÉFINITION 9 : *Soit f une application d'une partie* X *de* R *dans* R. *On dit que f est uniformément continue si, pour tout voisinage* W *de* O, *il existe un voisinage* V *de* O *tel que, pour tout* A $\subset$ X *qui soit petit d'ordre* V, *son image* f(A) *soit petite d'ordre* W.

DÉFINITION 9' : *Avec les mêmes notations, f est dite uniformément continue si* $\delta(f(A))$ *tend vers* O *quand* δ(A) *tend vers* O. [*Autrement dit, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $(\delta(A) < \eta) \Rightarrow (\delta(f(A)) < \varepsilon)$].

Il est immédiat que toute fonction uniformément continue est continue ; la réciproque est fausse.

Toutefois, un théorème fondamental exprime que si X est fermé et borné, toute application continue de X dans R est uniformément continue. C'est une conséquence facile du théorème 3 ou du théorème 4, ou de leurs extensions aux ensembles fermés et bornés.

Convergence uniforme d'une suite de fonctions.

C'est une notion relative à l'espace d'arrivée. Elle ne suppose aucune structure topologique, ni uniforme sur l'espace de départ. De façon plus précise :

DÉFINITION 10 : *Soit* E *un ensemble absolument quelconque et soit* (f_n) *une suite d'applications de* E *dans* R.

On dit que cette suite converge uniformément vers l'application f de E *dans* R *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* $n(\varepsilon)$ *tel que, pour tout* $x \in$ E *et pour tout* $n \geqslant n(\varepsilon)$, *on ait :*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ ce qui équivaut à } d[f_n(x), f(x)] < \varepsilon.$$

On étudiera plus en détail cette notion dans un exposé ultérieur. Rappelons simplement que cette convergence est plus restrictive que la convergence simple. Par exemple, soit f_n la fonction numérique définie sur [0,1] par les conditions :

$$f_n(x) = n^2x\,(1 - nx) \quad \text{sur } [0, \frac{1}{n}]$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{sur } [\frac{1}{n}\, 1,]$$

Cette suite converge simplement vers la fonction $f \equiv 0$; mais la convergence n'est pas uniforme, puisque $\max |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{4}$, loin de tendre vers 0, tend vers $+\infty$.

8. Structure de corps topologique sur R

L'addition et la multiplication de R sont compatibles avec la topologie de R et aussi avec sa structure uniforme, en un sens que nous allons préciser.

THÉORÈME 6 : *Sont continues les applications suivantes :*

$x \to ax$ *de* R *dans* R ; $(x, y) \to (x + y)$ *de* R^2 *dans* R.

$x \to \frac{1}{x}$ *de* R^* *dans* R ; $(x, y) \to xy$ *de* R^2 *dans* R.

Sont uniformément continues les applications suivantes :

$x \to ax$ *de* R *dans* R ; $(x, y) \to (x + y)$ *de* R^2 *dans* R.

Il faut évidemment donner un sens à la continuité et à l'uniforme continuité d'une application de R^2 dans R. Par exemple, la continuité uniforme s'obtient en prenant comme distance de deux points de R^2 leur distance euclidienne.

Notons que les applications $x \to \frac{1}{x}$ et $(x, y) \to xy$ ne sont pas uniformément continues.

De ce théorème résultent, en utilisant la transitivité de la continuité et de la continuité uniforme, d'autres résultats connus.

Par exemple, si f et g sont deux fonctions numériques continues (resp. uniformément continues), $(f + g)$ l'est aussi.

On peut compléter le théorème 6 par un résultat lié à la structure de groupe totalement ordonné de R :

L'application $x \to |x|$ *de* R *dans* R *est uniformément continue.*

De la formule $\sup(x, y) = \frac{x + y}{2} + |x - y|$ résulte alors que l'application $(x, y) \to \sup(x, y)$ de R^2 dans R est unif. continue.

De même, si f et g sont deux fonctions numériques continues (resp. unif. continues), il en est de même de (f) et de $\sup(f, g)$.

Représentations continues du groupe R *dans* R.

Soit f une application continue de R dans R telle que :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Il en résulte aussitôt que $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$ pour toute fraction $\frac{p}{q}$.

Donc, la restriction de f à Q n'est autre que l'application $x \to ax$.

Les deux applications f et $x \to ax$ de R dans R sont continues et coïncident sur l'ensemble partout dense Q ; elles sont donc identiques (on utilise là une propriété importante, mais facile à montrer).

Donc, toute représentation continue de R *dans* R *(pour l'addition) est monotone et de la forme* $x \to ax$.

L'isomorphisme de R et du groupe multiplicatif R^* fournit aussitôt le résultat parallèle pour les applications g de R_+^* dans R_+^* telles que $g(xy) = g(x)g(y)$.

Sous-groupes de R.

Nous terminerons cette étude par un résultat simple et souvent utilisé.

THÉORÈME 7 : *Tout sous-groupe additif de* R *est partout dense, ou bien est de la forme* aZ *(ensemble des points* an *où* $n \in Z$*).*

Il résulte de là que tout sous-groupe fermé de R est identique à R ou bien est un groupe aZ.

En voici une application : Soit f une fonction numérique sur R ; on dit que a est une *période* de f si $f(x + a) = f(x)$ pour tout x.

L'ensemble P des périodes de f est évidemment un sous-groupe additif de R. Lorsque f est continue, P est fermé.

Donc, ou bien $P = R$, ce qui entraîne $f = C^{te}$, ou bien P est de la forme aZ ; on peut toujours supposer que $a \geqslant 0$ et on appelle ce nombre a la *plus petite période* de f.

G. C.