VI. CONCOURS GÉNÉRAL

Classe de Mathématiques.

Dans un plan (P) on donne un cercle (A) de centre O, de rayon a, d'axe $z'z$ [droite perpendiculaire à (P) en O]. α désigne un angle donné $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. On posera $c = \frac{a}{\cos\alpha}$.

I. — A tout point h de (P), non intérieur au cercle (A), correspondent les éléments suivants : un cercle (h) ayant h comme centre et orthogonal à (A) ; deux cônes de révolution ayant (h) comme directrice commune et tels que toutes leurs génératrices fassent l'angle donné α avec le plan (P). H désigne le sommet d'un quelconque de ces deux cônes. Soit (Δ) l'axe radical des cercles (h) et (A) et soit K le pied de (Δ) sur la droite Oh. On désigne par (Q) le plan déterminé, en général, par le point H et la droite (Δ). La perpendiculaire en H au plan (Q) coupe le plan (P) en H' (en supposant $Oh \neq a$).

1° Démontrer les relations :

$$\overrightarrow{hH'} = \overrightarrow{Oh}\,\mathrm{tg}^2\alpha \qquad \overrightarrow{OH'} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\overrightarrow{Oh}.$$

En déduire que (Δ) est la polaire de H' par rapport au cercle (C) de centre O et de rayon c.

Étendre la définition du plan (Q) au cas particulier où h est sur (A), et à celui où h est rejeté à l'infini sur un diamètre $x'Ox$ du cercle (A). Dans ce dernier cas, montrer que le plan jouant le rôle de (Q) est tangent au cône de révolution $(\mathcal{A})$ de sommet O, d'axe $z'z$, de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

2° Montrer qu'il existe une sphère (N) passant par le cercle (C) et telle que le plan polaire de H' par rapport à (N) soit (Q), et que le plan (Q) coupe la sphère (N) sous l'angle α.

Prouver que le plan (Q) coupe le cercle (C) en deux points λ, λ' tels qu'en chacun d'eux la tangente à (C) fait avec le plan (Q) l'angle α : en d'autres termes le plan (Q) coupe le cercle (C) sous l'angle α.

3° La droite Oh coupe (C) en deux points F, F'. Établir que :

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{F'H}{F'H'} = \cos\alpha$$

et que, dans le plan $Hz'z$, le point H appartient à l'hyperbole de foyers F, F' et d'excentricité $\frac{1}{\cos\alpha}$. Montrer que HH' est normale à cette courbe en H.

Quand h varie librement dans (P) [comme il a été stipulé au début de I], mon-

trer que le lieu des deux points H qui correspondent à h est une surface de révolution dont on précisera une génération et la forme, et qu'on appellera, dans la suite, surface (Σ).

N.-B. — On appellera région *intérieure* à (Σ) l'ensemble de tous les points de l'espace situés, par rapport à la surface (Σ), du même côté que la droite $z'z$.

II. — 1° Le lieu des points H de (Σ) correspondant à des cercles (h) dont un point de rencontre avec (A) est maintenu fixe, est formé de deux droites dont on précisera la construction. Etablir les points suivants :

a. La surface (Σ) contient une infinité de droites qu'on appellera (D) [c'est-à-dire que tout point d'une telle droite est un point de (Σ)] ;

b. Par un point quelconque H de (Σ), passent deux droites (D) distinctes et deux seulement.

2° Regardons ici comme fixe un point H de (Σ), et comme variable un point H_1 qui décrit une courbe quelconque (Γ) tracée sur (Σ) et passant par H.

Montrer que le point de rencontre de la droite HH_1 avec le plan (P) est un centre d'homothétie des cercles (h) et (h_1) correspondant aux points H et H_1, et que ses polaires par rapport à ces cercles, qui sont parallèles à l'axe radical de (h) et (h_1), sont équidistantes de cet axe radical.

3° On suppose que la courbe (Γ) ait une tangente en H. Déduire du paragraphe précédent que cette tangente est située dans le plan (Q) relatif au point H.

Ce résultat permet de qualifier (Q) « plan tangent à la surface (Σ) en H ». Etudier si tout plan passant par une des droites (D) de (Σ) [voir II, 1°] est un plan tangent à la surface (Σ). Etablir que le plan tangent (Q) à (Σ) en un point H de (Σ) possède une infinité de points qui font partie de la région *intérieure* à (Σ) et une infinité de points de l'autre région ; les distinguer en projection orthogonale sur le plan (P) [en supposant $Oh \neq a$].

III. — Les données sont ici, outre la surface (Σ), un point S de l'espace, non situé sur (Σ). On laissera de côté les cas particuliers où S serait situé, soit dans le plan (P), soit sur la droite $z'z$. Dans les paragraphes (3), (4), (5) de la présente partie (III), on *supposera essentiellement que le point* S *appartienne à la région intérieure à* (Σ).

1° Sur une droite (D) de la surface (Σ), il existe (en général) un point H tel que le plan tangent en H à (Σ) passe par le point donné S. L'objet de notre étude est la courbe (Λ) lieu des points situés sur la surface (Σ) et tels, de plus, que le plan tangent à (Σ) en un tel point passe par S.

On appelle s la projection orthogonale de S sur (P), (L) la polaire du point s par rapport au cercle (A), g le pied de (L) sur la droite Os.

Un point H de (Λ) peut-il être situé sur (A) ?

En écartant ce cas particulier, soit K le pied sur Oh de la polaire (Δ) de h par rapport à (A) [cf. début de I]. On désigne par $h\mu$ la perpendiculaire abaissée de h sur la droite Os et par $s\nu$ la perpendiculaire abaissée de s sur la droite Oh. On suppose les droites $z'z$, Os, Oh orientées, chacune *ad libitum*. Etablir la condition nécessaire pour que H appartienne à (Λ) :

$$\frac{\overline{K\nu}}{\overline{Kh}} = \frac{\overline{sS}}{\overline{hH}}$$

2° Démontrer que les droites $\nu\mu$ et gK ont même direction. En déduire que :

$$\frac{\overline{Os}}{\overline{Oh}} = \frac{\overline{K\nu}}{\overline{g\mu}}$$

Déduire de ces proportions et du fait que (h) et (A) sont des cercles orthogonaux que, lorsque H varie sur (Λ), le rapport $\frac{\overline{g\mu}}{\overline{hH}}$ reste constant. Donner son expression en fonction de $\overline{Os}$, $\overline{sS}$ et de l'angle α.

Démontrer que la courbe (Λ) est située dans un plan fixe (ϖ) passant par la droite (L) et ne dépendant que des données : surface (Σ), point S.

3° D'après l'hypothèse indiquée dans le préambule de (III), faite dorénavant sur le point S, justifier que la droite *hs* est sécante au cercle (A).

En observant que le point I de rencontre de (L) et de (Δ) est d'égale puissance positive par rapport au cercle (h) et par rapport au faisceau ($\mathcal{F}$) de cercles contenant (A) et ayant (L) comme axe radical, montrer qu'il existe deux cercles (U) et (U') de ce faisceau ($\mathcal{F}$) qui sont tangents au cercle (h) ; il peut arriver que l'un de ces cercles dégénère en une droite.

4° H et H_1 désignent ici deux points de la courbe (Λ), (h) et (h_1) les cercles correspondants ; montrer que (h) et (h_1) ont un centre d'homothétie situé sur la droite (L).

Démontrer que les cercles (h) et (h_1) s'échangent, en général, par une inversion qui laisse invariants la droite (L) et le cercle (A).

En déduire que les cercles (U) et (U') sont fixes, quel que soit H sur (Λ).

5° Préciser dans quelle région de l'espace devrait être choisi le point S pour que l'un des cercles (U) et (U') soit une droite [on trouvera qu'intervient ici le cône ($\mathcal{A}$) défini à la fin de I, 1°].

En supposant que (U) ne soit pas une droite, démontrer que tout point H de (Λ) est situé sur un cône de révolution *fixe*, de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et tel que le cercle (U) soit une directrice de ce cône.

Conclure que (Λ) est portée par une conique du plan (ϖ).

Discuter la nature de cette conique selon la position de S dans la région intérieure à (Σ).

Quelle est la tangente à (Λ) en H ? Reconnaître qu'elle est conjuguée harmonique de la droite HS par rapport aux deux droites (D) de la surface (Σ) qui passent par H.

Note relative au paragraphe 5° de III. *On rappelle que l'intersection d'un cône de révolution de demi-angle au sommet α' avec un plan qui fait l'angle β' avec l'axe du cône est, quand ce plan ne contient pas le sommet du cône, une conique : cette dernière est une ellipse si $\alpha' < \beta'$, une parabole si $\alpha' = \beta'$, une hyperbole si $\alpha' > \beta'$.*

Classe de Première.

NOTA. — *Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation de la solution. Il est recommandé, en particulier, de dessiner les figures sur une feuille séparée avec un numéro de renvoi.*

Problème. — Dans ce problème, on propose d'abord d'établir quelques propriétés générales des parallélépipèdes, puis d'étudier certains parallélépipèdes particuliers.

Les notations suivantes seront employées : A, B, C, D étant les sommets successifs d'un parallélogramme formant l'une des faces (ou facettes) d'un parallélépipède (U), on désignera par A', B', C', D' les sommets de (U) respectivement opposés à A, B, C, D (deux sommets sont opposés quand ils n'appartiennent pas à une même face) ; les diagonales de (U) sont alors les segments AA', BB' CC', DD', qui ont le même milieu S, centre de symétrie (ou centre) de (U). Si l'on considère les trois arêtes de (U) issues d'un même sommet, par exemple les arêtes DA, DB', DC, issues de D, les extrémités A, B', C, autres que D, de ces trois segments sont les sommets d'un triangle AB'C que l'on appellera le triangle « semi-diagonal » associé au sommet D (les côtés de ce triangle sont des diagonales des trois faces ayant D comme sommet).

I. — Soit (U) un parallélépipède quelconque.

1° Démontrer que la diagonale DD' coupe les plans AB'C et A'BC' des triangles « semi-diagonaux » associés aux sommets D et D' respectivement en des points G

et G′ qui sont les points de concours des médianes de ces triangles, et que les points G et G′ partagent le segment DD′ en trois segments égaux.

2° Démontrer que la somme des carrés des longueurs des douze arêtes de (U) est égale à la somme des carrés de ses quatre diagonales.

3° (U) est dit circonscriptible lorsqu'il existe une sphère tangente aux plans de ses six faces (sphère inscrite). Démontrer qu'un parallélépipède circonscriptible peut être caractérisé par l'égalité des aires de ses faces.

II. — On donne dans un plan (V), un triangle ayant pour sommets A, B′ C. On désigne par I, J, K respectivement les milieux des côtés B′C, CA, AB′, et par a, b, c leurs longueurs, par G le point de concours des médianes de ce triangle, par H son orthocentre, par O le centre, par OX l'axe et par R le rayon du cercle qui lui est circonscrit. On appelle (W) tout parallélépipède dont un sommet, D, admet AB′C comme triangle « semi-diagonal » associé.

1° Démontrer qu'un parallélépipède (W) est déterminé, soit par la donnée de son sommet D, qui peut être arbitrairement choisi hors du plan (V), soit par la condition d'admettre comme centre un point donné S, hors du plan (V).

Comment l'un des points D ou S se déduit-il de l'autre ? Comment les directions et les longueurs des arêtes de (W) sont-elles liées à celles des segments SI, SJ, SK ?

2° On désigne respectivement par p, q, r, les longueurs des arêtes DA, DB′, DC, et par α, β, γ, δ, celles des demi-diagonales SA, SB′, SC, SD de (W). Calculer p^2, q^2, r^2 et δ^2 en fonction de a, b, c, α, β, γ, ainsi que α^2, β^2, γ^2, δ^2 en fonction de a, b, c, p, q, r.

III. — Les données et les notations sont celles de la partie II. On appelle (W_0) tout parallélépipède (W) dont les six faces sont des losanges.

1° Démontrer que les parallélépipèdes (W_0) peuvent être caractérisés par le fait que le sommet D est situé sur la droite OX. Quels sont les lieux géométriques de leurs centres S et de leurs sommets D′ (opposés à D) ? Peuvent-ils aussi être caractérisés par une propriété des arêtes opposées du tétraèdre DIJK (ou du tétraèdre D′AB′C) ?

Désignant par p la longueur commune des arêtes d'un parallélépipède (W_0), calculer, en fonction de p, a, b, c, les carrés des longueurs de ses demi-diagonales, et les carrés des aires de ses faces.

2° Démontrer qu'un parallélépipède (W_0) ne peut être circonscriptible que si le triangle AB′C est isocèle, ou équilatéral.

On suppose que le triangle AB′C est isocèle, sans être équilatéral ; soient :

$$B'A = B'C = a, \qquad AC = b \qquad (b \neq a), \qquad \widehat{AB'C} = \theta.$$

Déterminer, en prenant comme inconnue la distance $OD = x$, les positions de D sur OX pour lesquelles (W_0) est circonscriptible ; on calculera x en fonction de a et b, et en fonction de R et de $\cos\theta$. Entre quelles limites doit être compris l'angle θ, ou bien le rapport $\frac{b}{a}$, pour qu'il existe un parallélépipède (W_0) circonscriptible ?

Soit D_0 une position de D pour laquelle (W_0) est circonscriptible. Quelles relations existe-t-il entre les angles $\widehat{AD_0C}$, $\widehat{AD_0B'}$, $\widehat{CD_0B'}$? On pose $\widehat{AD_0C} = \varphi$. Calculer en fonction de a et de b, le cosinus de l'angle φ, la longueur commune p des arêtes de ce parallélépipède, et le rayon ρ de la sphère inscrite ; calculer également $\cos\varphi$ en fonction de $\cos\theta$.

IV. — On reprend les données et les notations de la partie II. On appelle (W_1) tout parallélépipède (W) dont les trois diagonales issues des sommets A, B′, C ont même longueur.

1° Quels sont les lieux géométriques des centres S et des sommets D des parallé-

lépipèdes (W_1) ? Montrer que ces parallélépipèdes peuvent être caractérisés par une propriété des arêtes opposées du tétraèdre DAB'C.

Soit α la longueur commune des demi-diagonales SA, SB', SC d'un parallélépipède (W_1) ; calculer, en fonction de a, b, c, α, les carrés p^2, q^2, r^2 et δ^2 des longueurs de ses arêtes et de sa demi-diagonale SD. Désignant par σ_1, σ_2, σ_3 les aires des triangles DB'C, DCA, DAB', on considère deux quelconques de ces triangles, par exemple DB'C et DCA qui ont en commun le côté DC ; établir les relations :

$$4(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = r^2(q^2 - p^2) = r^2(a^2 - b^2).$$

Démontrer qu'il n'existe pas de parallélépipède (W_1) circonscriptible lorsque le triangle AB'C n'est pas équilatéral.

2° On rappelle que les parallélépipèdes rectangles sont les seuls parallélépipèdes ayant leurs quatre diagonales égales.

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un parallélépipède (W) ayant ses quatre diagonales égales est que les trois angles du triangle AB'C soient aigus (ou bien que l'orthocentre H du triangle AB'C soit intérieur au triangle). Calculer, pour un tel parallélépipède, les carrés p^2, q^2, r^2, α^2 en fonction de a, b, c.

3° On suppose maintenant que le triangle AB'C est équilatéral ($b = c = a$). Lorsque le point D (ou le point S) décrit OX, on obtient des parallélépipèdes (W) qui sont à la fois du type (W_0) et du type (W_1), et qui sont tous circonscriptibles.

On pose alors $OD = x$, et $\widehat{ADC} = \varphi$; calculer, en fonction de x et de a (ou de R), pour le parallélépipède (W) correspondant au sommet D, les longueurs p, α, δ des arêtes et des demi-diagonales, le rayon ρ de la sphère inscrite, ainsi que $\cos\varphi$. Entre quelles limites varient ρ et φ lorsque D décrit OX ?