École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique

Section A_1 - Mathématiques.

Première question. — On considère l'intégrale :

$$\int_0^k t^{a-1} e^{-t}\, dt$$

dans laquelle a et k sont des nombres réels donnés.

Pour quelles valeurs de a cette intégrale a-t-elle une limite quand k tend vers $+\infty$?

On désigne cette limite, lorsqu'elle existe, par :

$$F(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

Trouver, par une intégration par parties, une relation simple entre $F(a)$ $F(a+1)$.

En déduire, lorsque a est égal à un nombre entier positif n, la valeur de $F(n)$.

2e question. — On considère l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{h^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad (\textit{équation 1})$$

Le nombre h désigne un paramètre réel qu'on supposera positif ou nul dans toute la suite du problème.

On pose : $y = x^h \times Y$.

Trouver l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction Y. Soit E cette équation.

Rechercher pour cette équation E une solution sous forme de développement en série entière :

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

On pourra traiter d'abord les cas simples de $h = 0$ et de $h = 1$, puis le cas général où h est un nombre positif quelconque.

On verra que dans chaque cas le coefficient a_0 est arbitraire. Pour déterminer complètement la série entière Y, on prendra pour a_0 les valeurs suivantes :

pour $h = 0$, $\quad a_0 = 1$;

pour $h = 1$, $\quad a_0 = \frac{1}{2}$;

pour h quelconque, $a_0 = \frac{1}{2^h \times F(h+1)}$,

[$F(h+1)$ désignant l'expression $F(a)$ de la première question où l'on a remplacé a par $h+1$].

On donnera dans chaque cas l'expression du terme général de la série Y et on vérifiera la convergence de cette série.

3e question. — Pour une valeur quelconque de h, on désigne par J_h la solution y de l'équation 1 qui correspond à la solution Y de l'équation E qu'on vient de déterminer sous forme de série entière.

Donner les développements en séries entières de J_0, de J_1 et d'une façon générale de J_n, n désignant un nombre entier positif.

Trouver une relation simple entre J_1 et la dérivée de J_0 par rapport à x.

4e question. — On prend l'équation 1 dans le cas particulier de $h = 0$. Soit H cette équation. On vient d'en déterminer une première solution qui est J_0. On se propose de trouver une autre solution non proportionnelle à J_0. On pose pour cela :

$$y = J_0 \operatorname{Log} x + v$$

(Log désignant le logarithme népérien).

Trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction v. En chercher une solution sous forme de série entière.

Choisir le coefficient indéterminé de cette série pour simplifier au maximum les autres coefficients.

Vérifier la convergence de la série obtenue.

5e question. — On transforme l'équation différentielle H en posant $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$

On obtient une équation différentielle K.

On considère d'autre part l'équation différentielle $u'' + u = 0$. (*équation L*).

On associe une solution z de l'équation K et une solution u de l'équation L de façon que les courbes intégrales correspondantes soient tangentes en un même point M_0 (de coordonnées x_0, y_0 non nulles). Démontrer que, pour x croissant ou décroissant à partir de x_0, la courbe intégrale de K est comprise entre l'axe des x et la courbe intégrale de L tant que u et z ne changent pas de signe.

En déduire que la fonction z a une infinité de zéros et donner une borne supérieure de l'intervalle entre deux zéros consécutifs.

Géométrie.

Les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ sont perpendiculaires. On donne le point fixe

$$A\ (x = a > 0,\ y = 0).$$

A tout point M du plan, on associe son inverse M′ dans l'inversion de pôle O et de puissance a^2.

I. — On suppose ici que le point M décrive la droite fixe D d'équation $y = x \operatorname{tg} \alpha$. On désigne par ω le centre du cercle circonscrit et par H l'orthocentre du triangle AMM′.

1° Calculer les coordonnées du point H en fonction de a, de α et de l'ordonnée (variable) λ du point ω.

2° Montrer analytiquement que le cercle circonscrit au triangle AωH passe par un deuxième point fixe S dont on calculera les coordonnées (en fonction de a et de α).

3° Géométriquement :

a. Indiquer, sans utiliser les résultats déjà obtenus, la nature de la correspondance qui relie les points ω et H (en préciser les éléments) ;

b. A quelle courbe la droite ωH reste-t-elle tangente ?

II. — A tout point M (x_0, y_0) du plan, on associe la droite Δ_M menée par M perpendiculairement à AM′.

1° *a.* Former l'équation de Δ_M en fonction de a, x_0, y_0.

b. Inversement, la droite Δ_M étant donnée, comment peut-on construire géométriquement un tel point M ? Discuter (analytiquement *ou* géométriquement) suivant la position de la projection orthogonale de O sur Δ_M.

2° On suppose à nouveau que le point M décrive la droite D d'équation $y = x \operatorname{tg} \alpha$.

a. Trouver analytiquement l'enveloppe (P_D) de la droite Δ_M; préciser les éléments géométriques qui caractérisent cette enveloppe.

b. Retrouver géométriquement cette enveloppe (P_D).

c. On suppose maintenant que la droite D pivote autour de O ; trouver analytiquement et géométriquement l'enveloppe de (P_D).

3° *a.* Trouver analytiquement et géométriquement l'enveloppe de la droite Δ_M quand M décrit un cercle de centre O.

b. Trouver analytiquement et construire l'enveloppe de Δ_M quand M décrit le cercle de centre A passant par O.

III. — Déterminer toutes les courbes telles qu'en chaque point M de l'une quelconque (C) d'entre elles, la droite Δ_M soit la tangente en M à (C). Donner l'allure générale de la courbe (C) particulière qui passe par le point $B\ (x = \frac{a}{2},\ y = 0)$, et en calculer le rayon de courbure en ce point B.

N.-B. — Les candidats sont priés de *numéroter visiblement* les pages de leur copie, dans l'ordre où elles doivent être lues.

Section A_2.

I. — Dans tout ce qui suit le symbole $\operatorname{Log} x$ désigne le logarithme népérien de x ; a désigne un nombre positif donné.

1° Suivant les valeurs de a, étudier les variations de z en fonction de x :

$$z = (a+x)\,\mathrm{Log}\,(a+x) + (a-x)\,\mathrm{Log}\,(a-x).$$

Courbes représentatives. Indiquer, suivant les valeurs de a, le nombre des racines de l'équation $z = 0$.

2° Etudier les variations de la fonction $y = \dfrac{\mathrm{Log}\left(\frac{3}{4}+x\right)}{\mathrm{Log}\left(\frac{3}{4}-x\right)}$. Préciser la tangente au point d'abscisse $x = \frac{3}{4}$ de la courbe représentative qu'on construira. Indiquer le nombre maximum des racines de l'équation $\mathrm{Log}\left(\frac{3}{4}+x\right) = \mathrm{K}\,\mathrm{Log}\left(\frac{3}{4}-x\right)$.

3° Calculer $\mathrm{I} = \int_0^x \mathrm{Log}\left(\frac{a+x}{a-x}\right).\,dx$.

II. — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$, la bissectrice Δ d'équation $y - x = 0$, le point A de coordonnées $x = 0$ et $y = 2R$, et le cercle (C) de diamètre OA.

Par un point M variable de Δ, extérieur au cercle (C), on mène les deux tangentes à (C) coupant $x'Ox$ en P et Q (S et T sont respectivement les points de contact).

1° Montrer que la droite ST passe par un point fixe I qu'on précisera et que P et Q restent toujours conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes qu'on indiquera.

2° Trouver la relation qui relie constamment les abscisses x' de P et x'' de Q. Montrer que le cercle circonscrit au triangle APQ passe par un deuxième point fixe ; lieu du centre.

3° Déterminer M pour que $PQ = l$ (l, longueur donnée).

4° On transforme la figure par l'inversion de pôle A et de puissance $4R^2$. Que peut-on dire de la droite qui joint les points P' et Q' transformés respectifs de P et Q, et des centres ω et ω' des cercles transformés des droites MS et MT ?

Section B.-Mathématiques.

I. *Questions préliminaires.* — 1° Résoudre le système :

$$a - b = 2ab,$$
$$a + b = -1.$$

Indiquer une résolution graphique de ce système.

2° Donner les développements limités jusqu'à l'ordre trois inclus des fonctions :

$$u = \sqrt{1+\alpha} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}$$

au voisinage de $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

II. *Problème.* — On considère les fonctions x et z de la variable x, définies par :

$$y = \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}\,e^x ; \qquad z = \sqrt{-\frac{x+a}{x+b}}\,e^x$$

a et b étant des paramètres ($a \neq b$).

1° a. Pour quelles valeurs de x la fonction y est-elle définie ?

b. Pour quelles valeurs de x la fonction z est-elle définie ?

2° a. Calculer la dérivée y' de y.

b. Calculer la dérivée z' de z.

3° On convient d'appeler $f(x)$ la fonction qui est égale à y lorsque y est définie et qui est égale à z lorsque z est définie.

Montrer que $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ sont définies pour toutes les valeurs de x sauf pour des valeurs exceptionnelles que l'on précisera.

4° Déterminer a et b pour que la dérivée $f'(x)$ soit nulle pour $x = 0$ et pour $x = 1$. Il y a deux fonctions qui répondent à ces conditions. On les désignera par $f_1(x)$ et $f_2(x)$, les notations étant choisies de manière que $f_1(0) < f_2(0)$.

Donner dans deux tableaux les expressions de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$.

5° Etudier les variations de $f_1(x)$ et tracer sa courbe représentative. On précisera les points de rencontre de la courbe avec les axes de coordonnées, les tangentes en ces points, les coordonnées des maxima et minima, les branches infinies.

6° Même question pour $f_2(x)$.

7° Donner le développement limité jusqu'à l'ordre trois inclus de la fonction $f_2(x)$ au voisinage de zéro.

Géométrie et géométrie analytique.

Le plan est rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires xOy et on considère les points A, B de l'axe $x'x$ d'abscisses respectives a, $2a$ $(a > 0)$ et la droite D médiatrice de OA. Soit $(\mathcal{C})$ la transformation produit (dans l'ordre indiqué) des trois transformations : symétrie par rapport à la droite D, inversion de pôle A et de puissance $4a^2$, translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

I. — 1° Montrer qu'il existe deux droites qui sont, chacune, globalement invariantes dans $(\mathcal{C})$. Déterminer le cercle (Γ) de centre O globalement invariant dans $(\mathcal{C})$.

2° Réduire la transformation $(\mathcal{C})$ au produit d'une inversion positive et d'une symétrie par rapport à une droite. En déduire qu'elle est réciproque. Un point M (x, y) ayant pour transformé le point M' $(x' y')$ calculer les coordonnées de l'un en fonction des coordonnées de l'autre et de a.

3° Trouver le lieu de M' lorsque M décrit un cercle (Ω) passant par O. Quelle est l'enveloppe de ce lieu si le centre de (Ω) décrit le cercle de diamètre OB. (Solution géométrique et analytique).

II. — On suppose maintenant que M décrit l'hyperbole équilatère de sommets O et B.

1° Construire le lieu (C) de M'. (On pourra écrire son équation sous la forme $y^2 = f(x)$ ou en chercher une représentation paramétrique).

2° La courbe (C) est tangente au cercle (Γ) en un point F et une sécante variable issue de F la coupe en deux points P, Q. Démontrer que OP et OQ sont perpendiculaires et que $\overline{FP}.\overline{FQ}$ reste constant. Quel est le lieu du milieu de PQ ?

3° Un point quelconque P de (C) est déterminé par l'angle $\varphi = (Ox, OP) + k\pi$. On lui associe le point P', situé aussi sur (C), défini par $(Ox, OP') = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Montrer que l'équation de la droite PP' s'exprime en fonction du paramètre $\sin 2\varphi$, et trouver son enveloppe quand P décrit (C).

N.-B. — On rappelle que les coordonnées XY du point inverse d'un point de coordonnées x, y, dans une inversion ayant pour pôle l'origine des coordonnées et pour puissance μ sont :

$$X = \frac{\mu x}{x^2 + y^2} \qquad Y = \frac{\mu y}{x^2 + y^2}$$

Géométrie descriptive.

Dimensions en millimètres.

Format 297 × 420, grande dimension horizontale.

Réserver à droite de la feuille une colonne verticale de 120 de largeur destinée à recevoir un texte succinct permettant de suivre les différentes phases de la construction de l'épure. La rédaction de ce texte est obligatoire.

Ligne de terre à 50 au-dessus du grand axe de la feuille. Placer sur la ligne de terre α et ε respectivement à 40 et 90 du bord gauche de la feuille.

Sur la ligne de rappel passant par α, placer les projections de A (cote 40, éloignement 20). Dans l'espace :

le point B est confondu avec la projection horizontale de A,
le point C est confondu avec la projection frontale de A,
le point D est symétrique de A par rapport à la ligne de terre.

Sur la ligne de rappel passant par ε, placer les projections de E (cote et éloignement nuls).

Le triangle BCE est une section plane d'une pyramide ayant pour sommet D, et dont la base est dans le plan perpendiculaire à AB et passant par A. Construire les projections et la vraie grandeur de cette base LMN (L sur DB, M sur DC, N sur DE).

Construire les projections du solide ayant pour bases BCE et LMN. Ponctuer.

Tracer le développement de la surface latérale de ce solide supposée fendue suivant BL.

Il est recommandé :

1° d'éviter de superposer les figures ;
2° de tracer les arêtes en trait interrompu court plutôt qu'en ponctué.

Section D.

I. — Etudier la fonction :

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{x}};$$

courbe représentative, tangentes aux points d'abscisses $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$, point d'inflexion.

On pose $x = \cos^2 a$, $0 \leqslant a < 2$ radians ; exprimer en fonction de a :

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \qquad \text{et } z = \frac{1 + 2\sqrt{x(1-x)}}{2x-1}.$$

Soit b tel que $\operatorname{tg} b = z$, $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$ radians ; exprimer l'angle b en fonction de l'angle a. (La relation est différente suivant que x est inférieur ou supérieur à $\frac{1}{2}$).

II. — On donne une droite (D), un point A sur (D), un point O n'appartenant pas à (D). Un angle droit pivote autour de son sommet O, ses côtés rencontrent (D) aux points variables M et M'.

Montrer que le cercle (C) passant par A et tangent en M à la droite OM et le cercle (C') passant par A et tangent en M' à la droite OM' sont orthogonaux (c'est-à-dire que leurs tangentes en A sont perpendiculaires).

Soit P le second point commun aux deux cercles (C) et (C') ; montrer que l'angle des droites (PM, PA) est égal à l'angle des droites (OM, D). En déduire une relation entre les angles des droites (PM, PM') et (OM, OM'). Interpréter cette relation.

Soit O' le symétrique de O par rapport à (D) ; montrer que l'angle des droites (PA, PO') est égal à l'angle des droites (D, OO'). En déduire le lieu de P. Donner une propriété remarquable de la droite joignant les centres des deux cercles (C) et (C').

III. — Il a été convenu que trois frères mangeraient des biscuits pour leur goûter. L'aîné rentre d'abord, donne un biscuit au chien, fait du reste trois parts égales, en prend une et s'en va. Le cadet rentre à son tour, donne un biscuit au chien et, ignorant que son frère est déjà passé, fait du reste trois parts égales. en prend une et sort. Le troisième, rentrant enfin, commence lui aussi par donner un gâteau au chien, et, comme ses frères, avec le reste, fait trois parts égales. Aucun biscuit n'a été fractionné. Quel était initialement le nombre des biscuits ? (On choisira le plus petit des nombres possibles).

Même question en supposant que le nombre des enfants est n, qu'ils rentrent l'un après l'autre, donnent un gâteau au chien, font du reste n parts égales et sortent en emportant l'une des parts.