St-Cloud et Fontenay -- option Mathématiques

Première composition.

1. Calculer la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{vmatrix}$$

et vérifier qu'elle est indépendante de θ.

2. Soit (S) le système de trois équations linéaires où les inconnues sont u, v, w :

$$(S)\begin{cases} u\cos\theta + v\sin\theta + w = 2\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} \\ u\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)+v\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)+w=2\varepsilon_1\sin\left(\dfrac{\theta-\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right) \\ u\cos\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)+v\sin\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)+w=2\varepsilon_2\sin\left(\dfrac{\theta-\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

θ et α sont deux angles donnés ; ε_1 et ε_2 peuvent prendre, indépendamment, les valeurs $+1$ et -1.

a. Montrer que les cas où ε_1 et ε_2 ont des signes contraires peuvent se ramener au cas $\varepsilon_1=\varepsilon_2=+1$ en changeant θ en $\theta+\frac{2\pi}{3}2\pi$ ou θ en $\theta-\frac{2\pi}{3}$.

b. Résoudre le système (S) pour $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-1$.

Montrer que u, v, w s'expriment au moyen des seules fonctions trigonométriques de l'angle $\frac{3\theta-\alpha}{2}$.

3. Ox et Oy étant deux axes rectangulaires, on donne le cercle (C) d'équation $x^2+y^2=R^2$ et, sur ce cercle, un point F défini par $(Ox, \overrightarrow{OF})=\alpha$.

Chercher l'équation générale des courbes du second ordre admettant F pour foyer et passant par les trois sommets d'un triangle équilatéral PQR inscrit dans (C) ; on désignera par θ l'angle $(Ox, \overrightarrow{OP})$ et par $ux+vy+wR=0$ l'équation de la directrice associée à F.

On obtient deux familles de coniques dépendant chacune des deux paramètres θ et α.

Montrer que l'une des familles, (H), est constituée par des hyperboles d'excentricité égale à 2, dont la directrice associée à F passe constamment par O. Achever la détermination de l'équation uniquement pour cette famille (H).

4. Etudier la famille (H) quand on fixe le triangle PQR. On prendra le point P sur Ox ($\theta=0$).

a. Trouver et construire le lieu des centres des hyperboles (H) quand α varie. Montrer qu'une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de O amène ce lieu en coïncidence avec lui-même.

b. Déterminer, quand α varie, les lieux des deux sommets, les enveloppes des tangentes en ces sommets, l'enveloppe de l'axe focal, et l'enveloppe des hyperboles (H).

On précisera la nature et la position géométrique des lieux et enveloppes demandés dans le § *b* et on pourra les étudier géométriquement.

Deuxième composition.

N.-B. — Les graphiques demandés seront tracés dans un système d'axes rectangulaires $Ox\,Oy$. Les parties I et II sont indépendantes.

I. — On considère l'équation différentielle (E) :

$$(E) \quad | \quad xyy'' - xy'^2 + yy' + y^2 = 0$$

dans laquelle x représente la variable, y une fonction inconnue de x, y' et y'' ses dérivées première et seconde.

1° Intégrer cette équation en posant $\frac{y'}{y} = t$, t étant une fonction à déterminer. Donner l'expression de l'intégrale générale y.

2° Soit (f) l'ensemble des courbes intégrales de l'équation (E) qui passent par le point A de coordonnées,

$$x = 1,$$
$$y = \frac{1}{e},$$

e représentant la base du système des logarithmes népériens. Montrer que la famille (F) des courbes intégrales de l'équation (E) se déduit simplement des courbes (f). Pouvait-on prévoir ce résultat avant l'intégration ?

3° Construire les courbes de la famille (f). Discuter leur forme et leur position relative. Trouver le lieu géométrique de leurs points où la tangente est parallèle à Ox et construire ce lieu.

Tracer avec soin l'ensemble des courbes (f) sur une même figure.

II. — 1° n étant un entier positif, vérifier que la fonction

$$y_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

est une intégrale particulière de l'équation (E).

Tracer la courbe représentant les variations de $y_n(x)$. Soit (C_n) cette courbe. Déterminer le maximum M_n de la fonction $y_n(x)$. Montrer que M_n décroît quand n croît.

Etudier la nature de la série de terme général

$$U_n = \text{Log } M_{n+1} - \text{Log } M_n$$

où le symbole Log désigne un logarithme népérien. En déduire la limite de M_n quand n croît indéfiniment.

2° La courbe (C_n) possède deux points d'inflexions I et I', dont les abscisses sont positives. Calculer leurs coordonnées x_1, y_1, $x_{1'}$, $y_{1'}$. Trouver les limites des rapports $\frac{y_1}{y_{1'}}$ et $\frac{M_n}{y_1}$ pour n infini.

3° Calculer l'aire (A_n) de la surface comprise entre (C_n), l'axe Ox et la parallèle à l'axe Oy d'abscisse $x_0 > 0$. Trouver la limite de (A_n) quand x_0 croît indéfiniment, n restant fixe, et la limite de (A_n) quand, x_0 restant fixe, n croît indéfiniment.

Les deux courbes (C_n) et (C_{n+1}) se coupent en un point H_n autre que O. Montrer que l'aire comprise entre (C_n) et (C_{n+1}), pour les valeurs de x supérieures à l'abscisse de H_n, est mesurée par un nombre fini et donner sa mesure.

Les trois courbes (C_{n-1}), (C_n), (C_{n+1}) se coupent en trois points F_n, G_n, H_n autres que O. Calculer l'aire (Ω_n) du triangle curviligne $F_nG_nH_n$ formé par ces trois courbes. Trouver la limite de (Ω_n) quand n croît indéfiniment.

Option sciences naturelles

1. Etudier les variations de la fonction $y = \frac{x}{e^x - 1}$ et tracer la courbe représentative (C).

Montrer que le signe de la dérivée seconde de y est celui de $x\left(\frac{x}{2} - th\frac{x}{2}\right)$ et préciser ce signe.

Donner une interprétation géométrique de la fonction y en considérant un point M qui décrit la courbe représentative de la fonction $y = e^x - 1$, et vérifier ainsi le sens de variation de y.

2. Démontrer qu'on peut trouver une constante m telle que y étant toujours la fonction $\frac{x}{e^x - 1}$ la différence $y - mx$ conserve la même valeur quand on change x en $-x$. Interpréter géométriquement ce résultat sur la courbe (C).

Calculer le développement limité jusqu'à l'ordre 6 de la fonction y au voisinage de $x = 0$.

3. Etudier les variations de la fonction

$$z = \text{Log } y = \text{Log } \frac{x}{e^x - 1}$$

où le symbole Log désigne un logarithme népérien et construire la courbe représentative (Γ).

Donner un infiniment grand équivalent à z quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

Montrer que le signe de la dérivée seconde de z est celui de $\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(sh\frac{x}{2}\right)^2\right]$ et préciser ce signe.

La différence $z - mx$ possède-t-elle, pour la même valeur de la constante m, la propriété de $y - mx$?

Calculer le développement limité jusqu'à l'ordre 4 de z au voisinage de $x = 0$.

4. y représentant toujours la fonction $\frac{x}{e^x - 1}$ donner, en faisant par exemple une intégration par parties de $\int \text{Log } y\, dx$, une expression de la différence $\left(\int y\, dx - \int \text{Log } y\, dx\right)$ où ne figurent que des fonctions élémentaires de x et de y.

En déduire l'aire comprise entre la courbe (C), la courbe (Γ), l'axe Oy et la droite d'équation $x = x_0$. Comparer cette aire à l'aire comprise entre (C), (Γ), l'axe Oy et la droite d'équation $x = -x_0$.