## Écoles Normales Supérieures (rue d'Ulm et boulevard Jourdan)

### (groupes II et II bis)

N.-B. — *La partie III de ce problème ne figurait pas dans le texte destiné aux candidats du groupe II.*

1. — Dans l'espace rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, un point M varie avec le temps $t$ ; ses coordonnées $x$, $y$, $z$ vérifient les relations :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2} - y \ , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{2} + x \ , \quad \frac{dz}{dt} = \frac{z}{2} \ .$$

Former et intégrer deux équations différentielles du premier ordre vérifiées respectivement par les fonctions du temps $x + iy$ et $x - iy$. En déduire les valeurs de $x$, $y$, et $z$ déterminées par (1) en fonction de $t$ et de trois constantes d'intégration, qu'on calculera en fonction du paramètre réel $u$, sachant qu'à l'instant $t = 0$ on a :

$$\overrightarrow{OM}^2 = 4e^u, \qquad (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6}, \qquad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}) = -u,$$

où $m$ est la projection de M sur le plan $xOy$.

2. On désigne par $C(u)$ la courbe décrite par M lorsque $t$ prend toutes les valeurs réelles, $u$ restant fixe. Comparer entre elles les courbes $C(u + k\pi)$ où $k$ prend toutes les valeurs entières, $u$ restant fixe.

Soit S la surface engendrée par l'ensemble des $C(u)$ lorsque $u$ prend toutes les valeurs réelles. Montrer que S est une partie, qu'on précisera, d'une quadrique dont on formera l'équation cartésienne.

3. On désigne par $\Gamma(t)$ le lieu des points atteints par M à l'instant $t$ fixe lorsque $u$ prend toutes les valeurs réelles. Montrer qu'en un point $M_0$ quelconque de S ne passent qu'une courbe $C(u)$ et une courbe $\Gamma(t)$, que leurs tangentes en $M_0$ se coupent à angle droit, et font avec $Oz$ un angle indépendant de $M_0$.

II. — Dans la partie II, M est assujetti à rester sur S, mais non pas sur une des courbes trouvées dans la partie I.

1. Soient $\rho$ la distance à O de la projection $m$ de M sur $xOy$ et $\theta$ l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$. On suppose que $\rho$ et $\theta$ sont des fonctions d'un même paramètre, munies

de dérivées continues. Soit $ds$ la différentielle de l'arc de la courbe que M décrit alors sur S. Exprimer $ds^2$ en fonction de $\rho$, $\theta$ et des différentielles $d\rho$, $d\theta$.

2. On cherche à mettre l'expression précédente de $ds^2$ d'une infinité de manières sous la forme :

$$df^2 + [a(\rho, \theta)d\rho + b(\rho, \theta)d\theta]^2$$

où $f$ est une fonction de $\rho$ et de $\theta$ de la forme $f(\rho, \theta) = \rho\varphi(\theta)$, $\varphi$ étant une fonction dérivable de la seule variable $\theta$, et où $a$ et $b$ sont des fonctions associées à $f$ et qui peuvent dépendre de $\rho$ et de $\theta$. Montrer que $\varphi$ doit vérifier l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad 4\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 + \varphi^2 = 4.$$

3. Intégrer cette équation différentielle. Elle possède une infinité de solutions $\varphi_\alpha$, fonctions de $\theta$ dépendant d'une constante d'intégration $\alpha$, et en outre deux solutions exceptionnelles qui n'entrent pas dans cette catégorie.

En fixant la valeur de $\alpha$, on choisit une intégrale non exceptionnelle $\varphi_\alpha(\theta)$ et on pose $f_\alpha(\rho, \theta) = \rho\varphi_\alpha(\theta)$. Déterminer les fonctions $a_\alpha(\rho, \theta)$ et $b_\alpha(\rho, \theta)$ associées à $f_\alpha$ ; montrer que :

$$a_\alpha(\rho, \theta)d\rho + b_\alpha(\rho, \theta)d\theta$$

est la différentielle totale d'une fonction $g_\alpha$ de $\rho$ et de $\theta$ qu'on déterminera.

4. On désigne par $D_\alpha(\lambda)$ et $\Delta_\alpha(\mu)$ les lieux de M définis sur S respectivement par $f_\alpha(\rho, \theta) = \lambda$ et $g_\alpha(\rho, \theta) = \mu$ où $\lambda$ et $\mu$ sont des constantes pouvant prendre toutes les valeurs réelles. Montrer que par un point $M_0$ quelconque de S ne passent, pour $\alpha$ donné, qu'une courbe $D_\alpha(\lambda)$ et une courbe $\Delta_\alpha(\mu)$, et que leurs tangentes en $M_0$ se coupent à angle droit.

5. $\alpha$ et $\mu$ étant fixes, on suppose que M décrit $\Delta_\alpha(\mu)$ d'un mouvement où la vitesse garde une longueur constante. Que peut-on dire de son vecteur accélération ?

6. $\alpha$ et $\lambda$ étant fixes, on suppose que M décrit $D_\alpha(\lambda)$ et on envisage les points M' et M" situés, pour chaque position de M, sur la même courbe $\Delta_\alpha(\mu)$ que M, les arcs MM' et MM" de $\Delta_\alpha(\mu)$ étant de sens contraires et de longueurs égales et indépendantes de $\mu$. Lieu des points M' et M" ?

7. Lorsqu'on prend pour $\varphi$ l'une des deux solutions exceptionnelles de (E), comment peut-on définir des courbes $D(\lambda)$ et $\Delta(\mu)$ possédant des propriétés analogues à celles établies pour $D_\alpha(\lambda)$ et $D_\alpha(\mu)$ dans les questions II-4, II-5 et II-6 ?

III. — Dans cette partie du problème, on désignera le temps par $\tau$.

On considère dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $Ot$, $Ou$, un point P de masse un, se déplaçant sous l'action exclusive d'un champ de forces dépendant de la fonction de forces :

$$U(t, u) = e^{t+u}.$$

Parmi toutes les trajectoires possibles pour P, on considère seulement celles pour lesquelles le point P passe en O avec une vitesse d'intensité $\sqrt{2}$ et celles qui correspondent à la même valeur de la constante des forces vives que les précédentes.

1. Déterminer les mouvements correspondants. Comparer ces trajectoires entre elles.

2. Quel lien ont ces trajectoires avec les courbes $\Delta^\alpha(\mu)$ de la partie II ?

*N.-B.* — La partie III, sauf par sa question 2, est indépendante du reste du problème.