École Normale Supérieure de jeunes filles (groupe I)

Première composition.

L'espace est rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Par droite ou plan horizontal, on entendra une droite ou un plan parallèle au plan xOy ; par coefficient angulaire d'une droite horizontale, le coefficient angulaire de sa projection sur le plan xOy.

On dira que deux droites se rencontrent si elles ont un point commun, à distance finie ou non.

Dans tout le problème, la lettre D désignera une droite variable, à distance finie et non horizontale, repérée par les équations

(D) $$x = az + p, \quad y = bz + q ;$$

a, b, p, q seront appelés coordonnées de D.

Tous les éléments considérés dans le problème peuvent être réels ou imaginaires.

I. — 1° On suppose que la droite variable D rencontre une droite fixe L, horizontale ou située à l'infini ; quelle relation y a-t-il alors entre les coordonnées a, b, p, q de D ?

Inversement, on suppose a, b, p, q liés par une relation linéaire :

(1) $$\alpha a + \beta b + \gamma p + \delta q + \varepsilon = 0 ;$$

Comment faut-il choisir les coefficients α, β, γ, δ, ε pour que la relation (1) exprime la rencontre de D et d'une droite fixe L, horizontale ou rejetée à l'infini ?

On considère la famille des droites D dont les coordonnées a, b, p, q vérifient deux relations linéaires telles que (1) ; montrer qu'en général cette famille se compose exactement des droites D qui rencontrent deux droites fixes L, L', horizontales ou rejetées à l'infini.

2° On donne une droite fixe L horizontale ou située à l'infini ; on considère la famille des droites D qui rencontrent L et dont les coordonnées a, b, p, q vérifient la relation.

(2) $$q = a.$$

En général ces droites D rencontrent une autre droite fixe L'. Former les équations de L' à partir des équations de L ; comment faut-il choisir L pour que L' soit à distance finie ?

Lorsque les droites L et L' sont à distance finie, comparer leurs cotes et leurs coefficients angulaires ; que peut-on dire de leur perpendiculaire commune ? En particulier, déterminer L' lorsque L est une horizontale isotrope rencontrant Oz.

Lorsque L est à l'infini et L' à distance finie, on mène par le point de coordonnées 1, 0, 0, la perpendiculaire l aux plans passant par L ; comparer les traces de L' et l sur le plan yOz.

3° Soient S et S' les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique Σ ; montrer qu'en général S contient deux génératrices, et deux seulement, dont les coordonnées vérifient (2), et que, si S en contient plus de deux, toutes les génératrices de S ont des coordonnées vérifiant (2).

Cas particulier où Σ est de révolution autour de Oz : lorsque S contient seulement deux génératices dont les coordonnées vérifient (2), quelle relation y a-t-il entre ces deux génératrices ? Lorsque toutes les génératrices de S ont des coordonnées vérifiant (2), quelle est la quadrique Σ, combien y a-t-il de génératrices de S' dont les coordonnées vérifient (2), et quelles sont ces génératrices ?

Cas particulier où Σ est un paraboloïde : soit II le plan directeur auquel sont parallèles les génératrices de S ; en supposant II donné et non parallèle à Ox, montrer que, pour que toutes les génératrices de S aient des coordonnées vérifiant (2),

il faut et il suffit que Σ contienne une certaine droite que l'on construira à partir de Π ; quelle est cette droite lorsque Π est le plan yOz ?

II. — Soit Δ la droite fixe qui a pour équations

$$(\Delta) \qquad x = 1, \quad y = z.$$

Dans *toute* la suite du problème, Q sera une quadrique variable, de révolution autour de Oz, non décomposée en plans horizontaux, et D sera la droite conjuguée de Δ par rapport à Q.

1° Q et D étant ainsi définies, montrer qu'il y a correspondance biunivoque entre les quadriques Q et les droites D dont les coordonnées a, b, p, q vérifient (2) ; écrire l'équation de Q en fonction de a, b, p.

Quelle particularité la droite D présente-t-elle lorsque Q est un cône ? Un cylindre ? Un paraboloïde ? Une sphère ? Lorsque Q contient un cercle donné d'axe Oz ?

2° D et D′ étant conjuguées de Δ par rapport à Q et Q′, montrer que, pour que Q et Q′ soient inscrites l'une à l'autre le long d'un cercle d'axe Oz, il faut et il suffit que D et D′ se rencontrent.

Connaissant le cercle de contact des quadriques Q et Q′ et leur cône circonscrit commun le long de ce cercle, construire le plan des droites D, D′ et le point commun à ces droites.

Comparer entre elles les conjuguées de Δ par rapport aux diverses quadriques Q qui ont un même cône asymptote.

3° On donne une quadrique Σ de révolution autour de Oz, coupant Oz aux points de cotes $\pm i$; un système de génératrices, soit S, est formé des conjuguées de Δ par rapport à des quadriques Q dont on demande l'enveloppe.

On donne un paraboloïde Σ, contenant Ox et admettant le plan yOz comme plan directeur ; un système de génératrices, soit S, est formé des conjuguées de Δ par rapport à des quadriques Q dont on demande l'enveloppe. Quelle relation y a-t-il entre les deux parties de cette enveloppe ? Que deviennent-elles lorsque Σ admet aussi le plan xOy comme plan directeur ?

III. — 1° On donne deux quadriques Q_1, Q_2 de révolution autour de Oz, non décomposées en plans horizontaux ; on considère les quadriques Q inscrites (ou circonscrites) à Q_1 le long d'un cercle d'axe Oz, à Q_2 le long d'un autre cercle d'axe Oz. Montrer que les plans de ces deux cercles sont en correspondance involutive.

En déduire le lieu des conjuguées de Δ par rapport aux quadriques Q considérées dans cette question ; comment faut-il choisir Q_1 et Q_2 pour que ce lieu soit un paraboloïde ?

2° On donne deux points P, P′, à distance finie ou non ; on considère les quadriques Q admettant P et P′ comme points conjugués. Montrer qu'en général les conjuguées de Δ par rapport à ces quadriques Q rencontrent deux droites fixes L, L′, horizontales ou rejetées à l'infini.

Connaissant les coordonnées des points P, P′, supposés à distance finie, déterminer les cotes et les coefficients angulaires de L et L′.

3° On donne deux points P, P′, à distance finie ou non, et une quadrique Q_1 de révolution autour de Oz, non décomposée en plans horizontaux ; on considère les quadriques Q admettant P et P′ comme points conjugués et inscrites (ou circonscrites) à Q_1 le long d'un cercle d'axe Oz. Montrer qu'en général ces quadriques Q enveloppent une autre quadrique fixe Q_2.

Connaissant les coordonnées des points P, P′, supposés à distance finie, former l'équation de Q_2 à partir de l'équation de Q_1. En particulier, enveloppe des cônes de révolution autour de Oz qui admettent P et P′ comme points conjugués.

Dans quel cas la quadrique Q_2 est-elle confondue avec Q_1 ?

Deuxième composition.

On considère l'équation différentielle (E)

$$y' = \cos xy$$

où x est une variable réelle et y une fonction réelle inconnue. On admettra que, quel que soit le couple (x_0, y_0) de nombres réels, il existe une solution et une seule de l'équation (E) prenant la valeur y_0 pour la valeur x_0 de la variable. On désignera par f la solution de (E) nulle pour la valeur 0 de la variable. On identifiera le couple (x, y) de nombres réels au point du plan d'abscisse x et d'ordonnée y dans un système d'axes orthogonaux avec même unité sur les deux axes. Les courbes intégrales de (E) sont les courbes représentant dans le plan les fonctions solutions de (E). On désignera par L la courbe représentative de la fonction f.

I. — 1° Lieu des points où les courbes intégrales ont une pente donnée ? Régions du plan où les courbes intégrales ont une pente positive ? Négative ? Lieu des points (x, y) tels que la solution prenant en x la valeur y possède en ce point un maximum ? Un minimum ?

2° Lieu des points d'inflexion des courbes intégrales ? Régions du plan où les courbes intégrales ont une pente croissante avec x ? Décroissante avec x ?

On notera $C(k)$ le lieu des points tels que $x \geqslant 0$, $xy = k$; Γ la portion, ne comprenant pas $C(\pi)$, du lieu des points d'inflexion des courbes intégrales comprise entre $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $C\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. On dessinera sur une même figure les courbes $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $C\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ et Γ.

3° Au voisinage d'un point de l'une de ces quatre courbes, quelle est l'allure de la courbe intégrale passant par ce point ?

II. — 1° Une courbe intégrale ne peut couper $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qu'en un point au plus.

2° Une courbe intégrale coupant $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en un point (x, y) tel que $x \geqslant y$ ne peut couper $C(\pi)$.

3° Montrer que L coupe $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en un point (X, Y). Prouver que $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$; que f a en X un maximum absolu égal à Y ; que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

4° Etudier le sens de concavité de L et ses intersections avec Γ.

III. — On se propose de calculer approximativement le nombre Y.

1° Quel que soit u réel, on a les inégalités :

$$(a) \qquad \cos u \geqslant 1 - \frac{u^2}{2};$$

$$(b) \qquad \cos u \leqslant 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}.$$

Généralisation ?

2° En utilisant l'inégalité (a) et l'inégalité $f(x) \leqslant x$ démontrée au II, 3°, prouver pour $x \geqslant 0$ une inégalité (c) de la forme $f(x) \geqslant x - \alpha x^5$ où α est une certaine constante.

3° En utilisant les inégalités (b) et (c), prouver une inégalité (d) de la forme

$$f(x) \leqslant x - \alpha x^5 + \beta x^9$$

où β est une certaine constante, cette inégalité étant valable pour x positif assez petit, ce qu'on précisera convenablement..

4° Variation et courbes représentatives des fonctions

$$c(x) = x - \alpha x^5 \text{ et } d(x) = x - \alpha x^5 + \beta x^9.$$

On montrera en particulier que la courbe représentant la fonction d possède un point d'inflexion d'abscisse positive, et un seul.

5° Prouver que la tangente d'inflexion en ce point à cette courbe est au-dessus de L pour x positif.

6° Calculer à 0,1 près les coordonnées du point d'intersection de cette tangente d'inflexion avec $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

7° Déduire de tout cela une borne inférieure et une borne supérieure de Y.

N.-B. — On a $\pi = 3{,}14$ à 0,01 près ; l'usage de tables numériques ou de règles à calcul est superflu.

Epreuve pratique de Mathématiques : même énoncé que pour l'E.N.S. de la rue d'Ulm.