V. CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

École Normale Supérieure de garçons (rue d'Ulm)*
(Groupe I)

Première composition.

On donne une fois pour toutes un trièdre trirectangle direct $Oxyz$ et un nombre $h > 0$. On appellera L la droite à l'infini du plan xOy.

A toute droite réelle D de l'espace, ne rencontrant pas L, on associe biunivoquement un couple ordonné de points a et a' du plan xOy de la façon suivante : les traces de D sur les plans $z = -h$ et $z = h$ se projettent respectivement en a_0 et a'_0 sur xOy ; a et a' sont obtenus respectivement à partir de a_0 et a'_0 en effectuant la rotation ayant pour angle $\frac{\pi}{2}$ et pour centre la trace de D sur xOy ; les points a et a' sont appelés respectivement image gauche et image droite de D.

I. — 1° Calculer les coordonnées x, y et x', y' des images a et a' de la droite D représentée par les équations : $x = \lambda z + p$, $y = \mu z + q$.

Montrer que, pour que deux droites ne rencontrant pas L soient coplanaires, il faut et il suffit que la distance de leurs images gauches soit égale à la distance de leurs images droites.

2° Etudier les droites D de l'espace ayant une image gauche donnée a ; on caractérisera ces droites par le fait qu'elles rencontrent deux droites imaginaires ne dépendant que de a, passant par deux points imaginaires fixes I et I' à l'infini et situées dans deux plans imaginaires fixes Π et Π'.

Les droites D ayant une image gauche donnée a et coplanaires à une droite fixe Δ d'images α et α' engendrent une quadrique réglée Q ; déterminer les lieux des images des deux systèmes de génératrices de Q, ainsi que les images du diamètre conjugué du plan xOy par rapport à Q ; caractériser les quadriques Q ainsi obtenues à l'aide des points I et I' et des plans Π et Π'.

3° La droite D passe par le point réel fixe M_0 à distance finie ; montrer que les images a et a' de D sont homologues dans une rotation du plan xOy dont on déterminera le centre et l'angle à l'aide des coordonnées de M_0 ; étudier la réciproque ; examiner le cas où M_0 est à l'infini, mais non sur L (a et a' sont alors homologues dans une translation du plan xOy).

II. — On a fait correspondre biunivoquement à tout déplacement (rotation ou translation) du plan xOy un point réel de l'espace, non situé sur L ; les déplacements associés aux points A, M... seront notés $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$... ; le déplacement « produit » des déplacements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$, obtenu en effectuant *d'abord* $\mathcal{A}$, puis $\mathcal{M}$, sera noté $\mathcal{MA}$.

1° On donne deux points M_1 et M_2 à distance finie, dont les cotes z_1 et z_2 ne sont pas opposées ; on désigne par M_3 le point représentatif de la rotation produit $\mathcal{M}_2\,\mathcal{M}_1$. Calculer les coordonnées de M_3 en fonction de celles de M_1 et M_2 (à cet effet il pourra être commode d'observer que la projection de M_3 sur le plan xOy est l'image gauche de la droite $M_1M'_2$, M'_2 étant le point symétrique de M_2 par rapport à xOy).

En utilisant les coordonnées homogènes, transformer les formules obtenues de façon à en obtenir d'autres qui soient valables, même si certains points M_i sont à l'infini, les déplacements correspondants étant alors des translations.

(*) Ces textes nous ont été obligeamment communiqués par la Librairie Vuibert ; nous l'en remercions (N.D.L.R.).

2° Un point réel A étant donné dans l'espace, non sur L, on appelle T_A la transformation ponctuelle qui, à tout point réel M non sur L, fait correspondre le point M' représentant le produit $\mathcal{MA}$; on appelle T_A^* la transformation qui fait correspondre à M le produit $\mathcal{AM}$.

Ecrire les formules définissant les transformations T_A et T_A^* en coordonnées homogènes.

Montrer que le produit des transformations T_A et T_B^* est indépendant de l'ordre dans lequel il est effectué ; on le désignera par T_A^B ; montrer que le produit de deux transformations T_A^B est une transformation de même nature.

Déterminer la figure transformée par T_A^B de la droite d'images a et a'.

3° Etant donnés un point réel M à distance finie, de cote z, et une droite D ne rencontrant pas L, on appellera *quasi-distance* de M à D le nombre $\frac{d}{\sqrt{1+\frac{z^2}{h^2}}}$, où d est la distance de M au point de D ayant la cote z. On appelle quasi-distance de M au plan réel P ne contenant pas L le minimum de la quasi-distance de M aux droites situées dans P.

Calculer la quasi-distance de M (x_0, y_0, z_0) au plan d'équation

$$ux + vy + wz + s = 0$$

(u et v non tous nuls) ; déterminer le lieu des points situés à une quasi-distance donnée d'un plan donné, et l'enveloppe des plans situés à une quasi-distance donnée d'un point donné.

Calculer la quasi-distance de M (x_0, y_0, z_0) à la droite D d'images a et a' données ; montrer que le lieu des points situés à une quasi-distance donnée d'une droite donnée est une quadrique Q considérée en I, 2° ; examiner la réciproque.

Montrer que la quasi-distance d'un point à une droite ou un plan est invariante par les transformations T_A^B ; en déduire que les quadriques Q considérées en I, 2° sont invariantes par une infinité de transformations T_A^B.

III. — On se propose d'étudier le lieu des images des génératrices d'une quadrique réglée sans point double et ne contenant pas L.

1° La quadrique est symétrique par rapport au plan xOy ; montrer que les images a et a' des génératrices d'un système décrivent en général deux coniques homofocales ; préciser la correspondance entre a et a' ; examiner le cas où la quadrique passe par I et I' ou est tangente à II et II' (voir I, 2°).

2° Examiner le cas général en observant qu'on peut transformer la quadrique donnée en une quadrique symétrique par rapport au plan xOy à l'aide d'une transformation T_A^B convenablement choisie.

Deuxième composition.

N.-B. — Les quantités qui interviennent dans le problème (constantes, variables, fonctions) sont supposées réelles.

Il est recommandé aux candidats de traiter d'abord la partie I ; cependant la partie II peut être traitée presque entièrement d'une manière indépendante de I.

I. — 1° On pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\, dt$, où n est un entier positif ou nul. Montrer que I_n décroît, si n croît. Etablir, par une intégration par parties, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} et en tirer la valeur de I_n. Trouver la limite, quand n augmente indéfiniment de $nI_n\, I_{n-1}$ et en déduire celle de nI^2_n.

Montrer que l'on a aussi :

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{n+3}{2}}}.$$

2° Démontrer, pour $|t| \leqslant \sqrt{n}$, l'inégalité :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$$

et pour t quelconque, l'inégalité :

$$e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

Déduire de ces inégalités et des résultats de 1° la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt.$$

II. — 1° On considère l'équation différentielle :

(E) $$v'' - 2uv' - av = 0,$$

où a est un coefficient numérique fixe donné et v une fonction de la variable u. Montrer que (E) admet des solutions développables en série entière en u. Parmi ces solutions, on établira en particulier l'existence d'une solution $v = f(u)$, fonction impaire de u [$f(u) = -f(-u)$] telle que $f'(0) = 1$ et d'une solution $v = g(u)$, fonction paire de u [$g(u) = g(-u)$], telle que $g(0) = 1$. Quel est l'intervalle de convergence de toutes les solutions développables en série entière ?

On considère la fonction $v = w(u)f(u)$ et on cherche à déterminer $w(u)$ de sorte que v soit solution de (E). Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $w(u)$; en déduire que, si $f(u)$ est connu, toutes les solutions de (E) s'obtiennent par des quadratures ; en conclure aussi que *toutes* les solutions de (E) sont développables en série entière en u.

Dans le cas particulier $a = 4$, montrer que $f(u)$ est une fonction simple. Donner, par la méthode précédente, une expression de $g(u)$ faisant intervenir une intégrale.

2° On pose $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{y}{x}$. Soit (F) l'équation différentielle linéaire du second ordre pour la fonction inconnue y de la variable x, lorsque v est lié à u par l'équation (E). Montrer que les courbes représentatives des fonctions y, solutions de (F), ont des asymptotes lorsque x augmente indéfiniment.

En admettant provisoirement l'hypothèse que (F) possède des solutions indéfiniment dérivables pour $x = 0$, quelles sont les valeurs possibles des dérivées successives, pour $x = 0$, d'une même solution de (F) ? L'équation (F) peut-elle posséder des solutions développables en série entière en x ?

3° Dans la suite du problème, on suppose $a = 4$. Déduire de la solution $v = f(u)$ de (E) une solution particulière de (F). Puis, en appliquant une méthode analogue à celle de la fin de II, 1°, déterminer toutes les solutions de (F) sous la forme d'intégrales. Quelles sont celles de ces solutions qui restent bornées quand x tend vers 0 ?

4° Soit $y = \varphi(x)$ la solution de (F) qui reste bornée quand x tend vers 0, et qui est telle que $e^{-\frac{1}{x^2}}\varphi(x)$ ait pour dérivée $e^{-\frac{1}{x^2}}$. On se propose de montrer que $\varphi(x)$ est continue et possède des dérivées de tous les ordres pour $x = 0$. En admettant provisoirement qu'il en soit ainsi, montrer que l'on a nécessairement :

$$\varphi(0) = 0. \qquad \varphi'(0) = 0. \qquad \varphi^{(2n)}(0) = 0 \text{ pour } n \geqslant 1,$$

et calculer, pour $n \geqslant 2$, la valeur a_{2n+1} de $\varphi^{(2n+1)}(0)$ en fonction de la valeur a_3 de $\varphi^{(3)}(0)$ supposée non nulle.

Les nombres a_{2n+1} étant maintenant définis en fonction de a_3 par les expressions précédentes, on considère la fonction :

$$\varphi_{2n+1}(x) = \varphi(x) - \frac{\beta}{a_3} \sum_{h=1}^{n} a_{2h+1} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

pour $n \geqslant 1$; calculer, pour $x \neq 0$, la dérivée de :

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \varphi_{2n+1}(x) ;$$

en déduire que $(-1)^n \varphi_{2n+1}(x)/x^{2n+1}$ est > 0 et reste borné quand x tend vers 0. Montrer ensuite que, pour chaque entier $k \leqslant \frac{2n}{3}$, la valeur absolue de la fonction :

$$\frac{1}{x^{2n+1-3k}} \frac{d^k}{dx^k} \varphi_{2n+1}(x)$$

reste bornée quand x tend vers 0, et que φ_{2n+1} est continu et possède des dérivées d'ordre $k \leqslant \frac{2n}{3}$ pour $x = 0$. Montrer enfin que $\varphi(x)$ est continue et possède des dérivées de tous les ordres pour $x = 0$; en déduire la valeur a_{2n+1} de $\varphi^{(2n+1)}(0)$.

5° Etudier les variations de la fonction $y = \varphi(x)$ et déterminer ses asymptotes.

Epreuve pratique de Mathématiques.

Axes de coordonnées. — Les données, en centimètres, sont rapportées à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

L'axe Oy est parallèle au bord inférieur de la feuille et à 20 de ce bord. Il est orienté positivement vers la droite.

Le plan xOy est le plan horizontal de projection.

Le plan yOz est le plan frontal de projection.

Le plan xOz est de profil et à 14 du bord gauche.

L'axe Ox est orienté positivement vers le bas et l'axe Oz vers le haut.

Données. — Un *cône de révolution* a pour sommet A :

$$x = 4 ; \quad y = -3\sqrt{2} ; \quad z = 4.$$

Son axe frontal fait 45° avec le plan horizontal et sur cet axe les cotes croissent de gauche à droite.

Le cône admet une génératrice verticale.

Un *cylindre parabolique* passe par la parabole du plan horizontal de projection définie par son sommet B :

$$x = 2{,}5 ; \quad y = 4 ; \quad z = 0 ;$$

et par son foyer F :

$$x = 5{,}5 ; \quad y = 4 ; \quad z = 0.$$

Les génératrices du cylindre ont pour paramètres directeurs :

$$0 ; \quad 1 ; \quad -1.$$

Questions. — 1° Déterminer les projections — horizontale et frontale — de l'intersection (C) du cône et du cylindre. Point courant et tangente. Eléments remarquables.

2° En tournant autour de la verticale (Δ) d'équations :

$$x = 10 ; \quad y = 0,$$

la courbe (C) engendre une zone (S) de révolution. Déterminer (S).

3° Représenter la portion de la zone (S) — mince et opaque — qui est extérieure au cône.

4° Indiquer, dans une notice rédigée sur la partie droite de la feuille, les particularités rencontrées dans l'exécution de l'épure et les méthodes employées pour les résoudre. On pourra mettre quelques lettres sur l'épure pour faciliter les explications.