IV. CONCOURS D'ENTRÉE DANS LES CENTRES PÉDAGOGIQUES RÉGIONAUX

Première composition (Durée : 5 heures).

On se propose d'étudier quelques propriétés de la transformation ponctuelle (T) définie de la façon suivante : A et B sont deux points fixes distincts à distance finie ; I est le milieu de AB. L'homologue d'un point M est le point M' du plan MAB tel que les angles (AM, AM') et (BM, BM') soient tous deux droits.

N.-B. — *Les candidats doivent s'efforcer de donner dans tous les cas des solutions relevant de la géométrie élémentaire.*

I. Géométrie plane. — *Dans un plan passant par* AB :

1° Le transformé M' de M par (T) est-il toujours bien déterminé ? Peut-il être rejeté à l'infini ? Qu'arrive-t-il si M s'éloigne indéfiniment ? (T) admet-elle des points doubles ?

Distinguer les cas où M et M' sont, ou non, du même côté de AB.

m et m' étant les projections orthogonales de M et M' sur AB, démontrer que :

$$\overline{mM}.\overline{m'M'} = \overline{mA}.\overline{mB} = \overline{m'A}.\overline{m'B} = -\overline{Am}.\overline{Am'} = -\overline{Bm}.\overline{Bm'}.$$

2° Lieu de M' et enveloppe de MM' quand M décrit un cercle passant par A et B.

3° Lieu de M' et enveloppe de MM' quand M décrit :

a. une droite perpendiculaire à AB ;

b. une droite passant par un, et un seul, des deux points A et B.

4° Lieu (C) de M' quand M décrit une droite (D) parallèle à AB. (D) étant donnée, construire géométriquement les tangentes en A et B à (C) ainsi que les éléments remarquables de ce lieu.

Lieu de M' quand M décrit une parabole passant par A et B, dont l'axe est perpendiculaire à AB.

5° Lieu de M' quand M décrit une droite (Δ) passant par I.

Lieu de M' quand M décrit une hyperbole passant par A et B, de centre I, et ayant pour asymptote la médiatrice de AB.

6° Lieu (L') de M' quand M décrit une conique (L), ellipse ou hyperbole, admettant A et B pour sommets de l'axe focal. (L') comprend une conique (Λ) : comparer les natures de (L) et (Λ).

Démontrer que, M et M' décrivant respectivement (L) et (Λ), $\overline{mM}$ et $\overline{m'M'}$ varient proportionnellement.

Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que (L) et (Λ) soient confondues ; démontrer que l'enveloppe de MM' est alors un point fixe, à distance finie ou infinie.

II. Géométrie dans l'espace. — 1° Le transformé M' de M par (T) est-il toujours bien déterminé ? Peut-il être rejeté à l'infini ? Qu'arrive-t-il si M s'éloigne indéfiniment ? (T) admet-elle des points doubles ?

2° Lieu de M' quand M décrit un cercle ou une droite d'un plan perpendiculaire à AB.

3° Lieu de M' quand M décrit un plan passant par un, et un seul, des deux points A et B.

4° Lieu de M' quand M décrit une sphère (ω) passant par A et B. M décrivant maintenant un cercle (γ) de (ω) passant par un, et un seul, des deux points A et B, quelle condition doit remplir (ω) pour que les points M' transformés des points M de (γ) autres que A (ou B) soient aussi sur un même cercle ?

5° M décrivant un plan (P) parallèle à AB, M' décrit une surface (S). Montrer que (S) contient :

a. une famille de cercles situés dans des plans perpendiculaires à AB ;

b. une famille de paraboles situées dans des plans passant par AB. Quel est le lieu des sommets de ces paraboles ?

En déduire une génération géométrique simple de (S).

6° M décrivant un plan (Q) passant par I, ne contenant pas A et non perpendiculaire à AB, M' décrit une surface (Σ). Montrer que (Σ) contient :

a. une famille de cercles situés dans des plans perpendiculaires à AB ;

b. une famille d'hyperboles situées dans des plans passant par AB. Quels sont les lieux des asymptotes de ces hyperboles ?

En déduire une génération géométrique simple de (Σ).

Seconde composition (Durée : 5 heures).

Soit un carré ABCD de côté n entier positif. On le découpe en carrés de côtés tous égaux à l'unité à l'aide de droites parallèles aux côtés AB et AD.

Pour repérer les points du plan, on prend le sommet A pour origine, le support du côté AB comme axe des x, et celui du côté AD comme axe des y, le carré ABCD étant placé dans le premier quadrant.

Les quatre parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

I. — 1° Indiquer le nombre des sommets du quadrillage ainsi constitué. Calculer le nombre des segments obtenus en joignant de toutes les manières possibles deux sommets quelconques distincts M' et M'' du quadrillage.

2° On considère tous les carrés obtenus en choisissant parmi les droites du quadrillage, de toutes les manières possibles, deux parallèles à AB distinctes et deux parallèles à AD. Trouver le nombre de ces carrés. Calculer la valeur moyenne (moyenne arithmétique) de leur périmètre. Limite de cette valeur moyenne si l'on fait subir au carré ABCD une homothétie, de rapport $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire ramenant son côté à l'unité) et si l'on fait ensuite augmenter n indéfiniment.

3° Calculer le nombre des droites du plan, de pente finie, entière, positive et non nulle, passant par deux sommets au moins du quadrillage.

Ce nombre dépend de la parité de n ; donner son expression pour $n = 2p$, puis pour $n = 2p + 1$. Vérifier le résultat pour $n = 3$ et pour $n = 4$.

II. — On suppose dans toute cette seconde partie n pair, $n = 2p$.

Soit G le milieu de AB. On se propose de trouver un point P du plan tel que

$$PA^2 - PG^2 = h^2 \text{ et angle } APG = \alpha,$$

où les données h et α satisfont aux inégalités

$$h \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 0 < \alpha < \pi.$$

Le point P est pris uniquement dans la région des y positifs ; ce n'est pas forcément un sommet du quadrillage.

1° Construire géométriquement le triangle PAG ; discussion géométrique.

2° Former l'équation du second degré donnant l'ordonnée X du sommet P du triangle PAG. Retrouver ainsi les résultats de la discussion.

3° Comment faut-il choisir les données si l'on veut que P soit sur le contour du carré ABCD ?

Comment faut-il choisir les données si l'on veut trouver pour P deux solutions distinctes, toutes deux intérieures au carré ABCD ?

4° On donne $p = 16$ et $h^2 = 320$. De combien de manières peut-on choisir α pour obtenir deux points P distincts qui soient deux des sommets du quadrillage ?

III. — On ne suppose plus désormais que n soit pair.

Soit P (X, Y) un point quelconque du plan ; on joint P à un sommet M (x, y) du quadrillage et l'on admet que le carré de l'aire du triangle APM a pour valeur :

$$\frac{1}{4}(xY - yX)^2.$$

1° Evaluer la somme S des carrés des aires de tous les triangles obtenus lorsque, P restant fixe, on place successivement le point M en chacun des sommets du quadrillage.

2° On place ensuite le point P successivement en chacun des sommets du quadrillage. Calculer la somme S' de toutes les sommes S ainsi obtenues.

3° On considère tous les triangles AM'M" (effectifs ou non) obtenus en prenant pour M' et M" deux sommets distincts quelconques du quadrillage. Evaluer la valeur moyenne μ du carré de l'aire des triangles AM'M" ainsi obtenus.

4° On transforme le carré ABCD par une homothétie de rapport $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire ramenant son côté à l'unité). Que devient alors la valeur de μ ?

La nouvelle valeur μ' ainsi obtenue peut-elle être un nombre décimal ?

IV. — On relie A à un sommet quelconque M (x, y) du quadrillage à l'aide d'un contour polygonal dont tous les segments font partie du quadrillage et vérifient la propriété suivante : si l'on parcourt ce contour de A à M, l'abscisse et l'ordonnée ne vont jamais en décroissant.

1° Evaluer le nombre des contours reliant A et M. Retrouver ainsi la formule classique relative aux combinaisons :

$$C_p^q = C_{p-1}^q + C_{p-1}^{q-1}$$

En particulier, préciser le nombre des contours du type précédent reliant A et C.

2° On affecte chaque sommet M du quadrillage d'un coefficient égal au nombre des contours qui le relient au point A. Evaluer la somme des coefficients ainsi affectés aux sommets situés :

a. Sur une même parallèle à la diagonale BD, coupant le segment AB ;

b. A l'intérieur du triangle ABD, ou sur son contour ;

c. Sur une même parallèle à l'un des côtés du carré ;

d. A l'intérieur du carré ABCD ou sur son contour.

3° On désigne par Σ l'aire plane limitée par un contour du type précédent reliant A et C, ainsi que par AB et BC. Calculer la somme des aires Σ obtenues pour tous les contours possibles.

4° On considère le segment MM' du quadrillage qui joint les points M (x, y) et M' $(x + 1, y)$ $0 \leqslant x \leqslant n - 1$ et $0 \leqslant y \leqslant n$. Calculer le nombre Π_x^y des contours qui relient A et C en empruntant le segment MM'.

Evaluer les sommes

$$\Pi_x^0 + \Pi_x^1 + \Pi_x^2 + \ldots + \Pi_x^n,$$
$$\Pi_0^y + \Pi_1^y + \Pi_2^y + \ldots + \Pi_{n-1}^y,$$

on montrera qu'elles sont respectivement indépendantes de x et de y, et on indiquera quel lien présente cette seconde somme avec la question du paragraphe 3° précédent.