III. PROFESSORATS DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

Section A_1 (1re partie). — Analyse.

(*Documents autorisés :* table numérique, règle à calcul).

1° Soit $f(z)$ un polynôme entier de la variable complexe z et a un nombre complexe fixé. On appelle M l'image de $f(z)$ et A l'image de a. Démontrez que le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$, dont l'image est à l'intérieur d'un contour (c) fermé (sans points multiples), est égal au nombre de tours effectués dans le sens positif par le vecteur $\overrightarrow{AM}$, lorsque le contour (c) est parcouru une fois dans le sens positif par l'image de z, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. [On suppose qu'aucune des racines de $f(z) = a$ n'a son image sur le contour (c)].

On donne maintenant : $f(z) = 80z + z^5$ et (c) est le cercle défini par $|z| = 3$.

Définir et tracer la courbe décrite par le point M image de $f(z)$ lorsque l'image de z décrit (c) ?

Limiter les régions où doit être choisi le point A, image de a, pour que l'équation : $f(z) = a$ donne de 0 à 5 racines à l'intérieur de (c).

2° $f(z)$ est maintenant un polynôme entier de degré p à coefficients complexes ou non.

On dira que $f(z)$ est du type (N) si toutes ses racines (complexes ou non) sont à partie réelle négative. Démontrer que si $f(z)$ est du type (N) l'une et l'autre des deux propriétés suivantes sont réalisées :

a) L'image de z décrivant l'axe imaginaire dans le sens positif, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (O point d'affixe nul) doit tourner de p demi-tours dans le sens positif. (On laissera de côté le cas particulier de racines imaginaires pures).

Cette condition est-elle suffisante pour que $f(z)$ soit du type (N) ?

b) On pose : $f(iy) : X(y) + iY(y)$. Il faut :

— que les polynômes réels X et Y aient toutes leurs racines réelles ;

— le nombre total des racines doit être $(2p - 1)$ au minimum ;

— les racines X et Y doivent être « imbriquées » (c'est-à-dire que les racines de X séparent celles de Y et réciproquement) dans un ordre convenable.

Appliquer à la recherche de λ nombre réel pour que $f(z)$ soit du type (N) lorsque : $f(z) = iz^3 - (1 + \lambda i)z^2 + (1 + 6i)z - 2\lambda i$.

3° Appliquer le § 2°, *b*) à la recherche des relations entre les nombres réels : a, b, c, d pour que le polynôme : $f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ soit du type (N).

4° On donne l'équation différentielle à coefficients constants réels :

$$y''' + \lambda y'' + \lambda y' + y = 0.$$

Déterminer les valeurs de λ telles que la solution générale $y(x)$ tende vers zéro quand la variable x tend vers $+\infty$. Dans cette hypothèse écrire les diverses formes de la solution.

5° On considère maintenant l'équation différentielle :

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = |\sin x|.$$

a) Calculer la série de Fourier de $|\sin x|$.

b) En déduire la série de Fourier de la fonction $y(x)$ qui satisfait à l'équation différentielle, pour x élevé.

Préciser les valeurs moyennes efficaces de $|\sin x|$ et $y(x)$.

Encadrer ou souligner les résultats.

(Durée : 4 heures ; coefficient : 3).

Applications géométriques.

(*Instruments autorisés :* table de logarithmes).

Les axes $oxyz$ sont trirectangles ; a est la mesure positive d'une longueur. On considère la surface (Σ) d'équations paramétriques.

$$(1)\quad \begin{cases} x = \varphi \cos\theta \\ y = \varphi \sin\theta \\ z = \varphi - a \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \text{ variant sur } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ \varphi \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty. \end{array}$$

La surface est réglée, la courbe $\theta = C^{te}$ étant une droite que l'on désignera par G_θ (ou par G). La génératrice rectiligne G_θ engendre (Σ). Elle varie en s'appuyant :

1° sur la directrice rectiligne simple oz $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ qu'elle coupe sous un angle constant de 45° ;

2° sur la directrice rectiligne double $\begin{cases} x = z \\ y = a \end{cases}$

Le trièdre (T_θ) ou « trièdre mobile afférent à l'angle polaire θ » est le trièdre $oXYz$ déduit de $oxyz$ par la rotation autour de oz de l'angle $\theta = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oX})$. L'utilisation de ce trièdre est recommandée pour simplifier les calculs.

I. — Calculez le ds^2 de la surface. Déterminez les projections sur xoy des trajectoires orthogonales des génératrices G_θ [construction *non* demandée], Q et R étant les points d'intersection de G_θ avec oz et avec xoy, soit P le milieu du segment QR. Montrer, directement, que P décrit l'une des trajectoires orthogonales considérées (faire intervenir le mouvement de rotation de (T_θ) par rapport à $oxyz$). Déduire de celle-là les autres trajectoires orthogonales (Γ) et retrouver ainsi les résultats du premier alinéa.

II. — M étant un point variable d'une trajectoire orthogonale fixée (Γ) et G étant la génératrice de (Σ) passant par M, soit V le point commun à G et à l'axe du cercle de courbure de (Γ) en M.

Montrer que la surface développable (S) enveloppe des plans normaux à (Γ) [ou surface polaire de (Γ)] est tangente à (Σ) tout le long de la courbe (L) lieu de V.

Positions relatives des plans tangents à (Σ) en M et V.

III. — Montrer que la normale à (Σ) au point M (θ, ρ) est parallèle au vecteur ayant pour composantes

$$\begin{cases} -\rho \\ \dfrac{a}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} \\ +\rho \end{cases}$$

par rapport à (T_θ).

En prenant pour paramètres du point V (ci-dessus) sur (Σ) : $\theta_1 = \theta$ et ρ_1, calculer ρ_1 en fonction de ρ et θ.

Montrer que la correspondance sur une génératrice choisie G_θ entre M et V est involutive.

Calculer la valeur absolue du paramètre de distribution des plans tangents à (Σ) en les points de la génératrice G_θ.

IV. — Déterminer les équations polaires des projections (*a*) sur *xoy* des lignes asymptotiques (A) de (Σ) (autres que les génératrices G). On ne demande pas de construire effectivement les courbes (*a*), mais on indiquera par quelles transformations on peut, de l'une d'elles, déduire les autres.

V. — Soient M_1 et M_2 les deux points de la génératrice G_θ en lesquels les plans tangents à (Σ) font des angles géométriques de 45° avec le plan *Xoz* (ou plan *oz*, G_θ).

Evaluez l'aire de la bande de la surface (Σ) balayée par le segment M_1M_2 lorsque θ varie de o à $+\frac{\pi}{2}$ (on pourrra utiliser les résultats du § III).

VI. — On considère la surface développable (D), enveloppe des plans asymptotes des génératrices G [(D) est circonscrite à (Σ) le long de la courbe à l'infini du cône directeur $x^2 + y^2 - z^2 = o$].

Comment passe-t-on de la section de (Σ) par $z = o$ à la section de (D) par $z = o$?

Quelles sont les deux familles de lignes de courbure de (D) ?

Montrer que le lieu de l'un des centres de courbure principaux de (D) est un cylindre (C) de génératrices parallèles à *oz*.

Quelles sont les arêtes de rebroussement des surfaces développables dont les génératrices appartiennent à la congruence des normales à (D) ?

(*N.-B.* — Les différents paragraphes sont indépendants les uns des autres).

(Durée : 4 heures ; coefficient : 3).

Section A_1 (2e partie). — Analyse.

On considère le polynôme à coefficients *réels*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

dont les zéros seront désignés par $z_k = x_k + iy_k$; ces derniers peuvent être réels ou complexes et à tout zéro complexe z_k correspond le zéro imaginaire conjugué $\overline{z_k}$.

1) Montrer que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}$$

$f'(z)$ désignant le polynôme dérivé de $f(z)$.

2) z_k et $\overline{z_k}$ désignant deux zéros imaginaires conjugués de $f(z)$ montrer que le signe de la partie *imaginaire* de l'expression :

$$\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z - \overline{z_k}}$$

est lié de façon simple au signe de y en tout point $z = x + iy$ du plan complexe situé hors du cercle ayant pour diamètre le segment dont les extrémités sont les points d'affixes z_k et $\overline{z_k}$; x_k étant, d'autre part, un zéro réel de $f(z)$ montrer que le signe de la partie *imaginaire* de

$$\frac{1}{z - x_k}$$

est également lié de façon simple au signe de y en tout point $z = x + iy$ du plan complexe.

3) On considère le domaine (D) du plan complexe formé par la réunion des régions intérieures aux cercles ayant respectivement pour diamètre les segments limités par les couples de points dont les affixes sont les zéros imaginaires conjugués de $f(z)$; que peut-on dire du signe de la partie *imaginaire* de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ en tout point n'appartenant pas au domaine (D) ?

4) Déduire de la réponse à la question précédente le domaine du plan complexe où se situent les zéros *complexes* de la dérivée $f'(z)$ de $f(z)$.

5) Soit maintenant un segment $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ de l'axe réel du plan complexe tel que, ni α, ni β ne soient des zéros de $f(z)$, non plus que des points situés dans le domaine (D) ou sur ses frontières, ce segment traversant certaines régions du domaine (D).

On considère dans le plan envisagé le plus petit domaine rectangulaire (k) de côtés parallèles aux axes de coordonnées contenant le segment (α, β), ainsi que la portion du domaine (D) qui est traversée par le segment (α, β). Montrer que si le domaine (k) contient k zéros de $f(z)$, il contient au moins $(k - 1)$ zéros de $f'(z)$ et au plus $(k + 1)$ zéros de $f'(z)$.

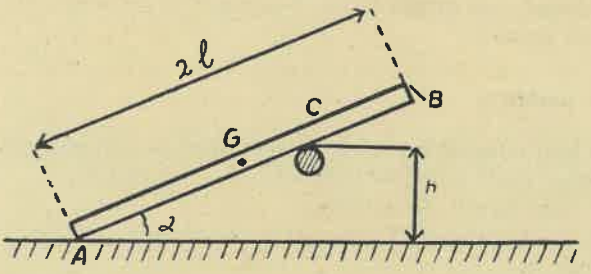
6) Déduire de ce résultat que si le segment (α, β) de l'axe réel ne contient aucun zéro de $f(z)$ et est extérieur au domaine (D), il contient au plus un zéro de $f'(z)$.

(Durée : 6 heures ; coefficient : 4).

Mécanique.

(*Instruments autorisés :* table de logarithmes, règle à calcul).

On considère une barre homogène de poids P de longueurs $2l$, disposée suivant le schéma ci-contre.



Première partie. — On se propose d'étudier un équilibre limite de la barre en appliquant les lois du frottement de glissement à l'état de repos. AB fait un angle α avec l'horizontale. Au contact A sur le plan horizontal le coefficient de frottement est f. En C la barre repose sur une tige horizontale de cote h, le coefficient de frottement au contact est μ. On donne P, l, h, α et μ.

1° Trouver *graphiquement* la valeur *minimum* de f pour que AB soit en équilibre. On déterminera aussi les réactions en A et C.

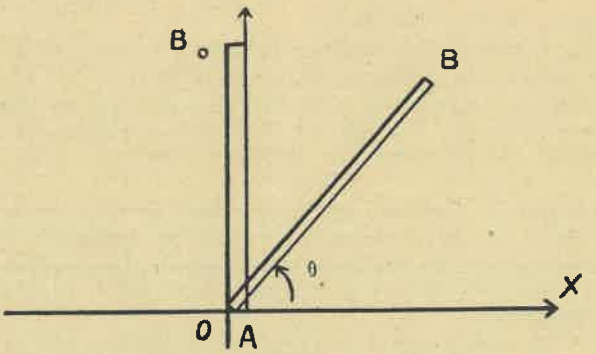
Le dessin sera exécuté à une échelle convenable en prenant :

$$P = 30\,kg\ ;\ 2l = 5\,m\ ;\ \alpha = 20^{\circ}\ ;\ h = 1\,m\ ;\ \mu = 0{,}15.$$

2° Donner une solution analytique de la question 1° en se bornant dans la discussion au cas où h est supérieur à la cote du centre de gravité de la barre.

Deuxième partie. — On supprime la tige C et la barre occupe à l'instant initial la position AB_0, en équilibre instable, le coefficient de frottement en A demeurant f.

L'équilibre étant troublé, la barre tombe dans le plan vertical XOY, l'angle $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{AB}) = \theta$ variant de $\frac{\pi}{2}$ à 0.



1° On demande si au cours du mouvement, l'extrémité A pourra rester fixe, soit pour toutes les valeurs de θ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et 0, soit seulement dans un certain intervalle.

2° Si le mouvement ne peut avoir lieu sans glissement de l'extrémité A, on indiquera dans quel sens se fait ce glissement lorsqu'il s'amorcera, et on précisera entre quelles limites est située la valeur correspondante de θ.

3° On ne demande pas de déterminer θ en fonction du temps. Une telle question aurait-elle un sens précis ?

Section B (1re partie).

1) Dans un plan rapporté à 2 axes rectangulaires ox, oy, on considère la famille de courbes Γ dont l'équation différentielle est : $y = xy'^2$.

Déterminer cette famille de courbes.

L'une d'elles est la parabole P tangente à ox au point A d'abscisse 1 et à oy au point B d'ordonnée 1.

2) Calculer la longueur de l'arc AB de cette parabole.

3) Calculer l'aire comprise entre les axes et l'arc AB.

4) On fait tourner cette parabole autour de son axe. Equation de la surface engendrée, l'axe oz étant perpendiculaire à xoy.

5) On coupe cette surface par le plan $y = 1$. Evaluer le volume du solide ainsi détaché.

6) Déterminer les trajectoires orthogonales C des courbes Γ et montrer que ces courbes C sont les projections sur le plan *xoy* des courbes de niveau d'un cône par rapport à ce plan.

Nota : Pour les questions 2, 3, 5, on pourra faire un changement d'axes.

(Durée : 4 heures ; coefficient : 2).

Section D (1re partie).

(*Documents autorisés :* tables financières).

I. — Etablir la loi d'amortissement d'un emprunt divisé en N obligations de valeur nominale C, à coupon annuel *c*, remboursables par tirages au sort en *n* années, à un prix R supérieur à la valeur nominale, les annuités du service de l'emprunt étant constantes.

Exprimer la valeur de l'annuité en fonction des caractéristiques de l'emprunt.

II. — Une société veut émettre un emprunt divisé en obligations de valeur nominale C, à coupon annuel *c*, émises au prix E, et dont l'amortissement s'étendra sur *n* années et commencera à la fin de la première année de l'emprunt.

Le remboursement s'effectuera par tirages au sort à un prix R supérieur à la valeur nominale, ou bien au pair à la demande des porteurs. Toutefois, les demandes de remboursement au pair ne pourront être acceptées avant la 6e année de l'emprunt, et elles ne pourront par la suite porter chaque année que sur un nombre de titres au plus égal à un maximum donné et fixe K.

Le tableau d'amortissement sera établi sur la base d'une annuité sensiblement constante, calculée en supposant qu'aucune obligation ne sera remboursée au pair.

Le nombre maximum K est pris égal au nombre de titres à amortir à la 6e échéance, d'après le tableau d'amortissement ainsi construit.

La société se fixe à l'avance un taux de revient *i*.

Elle se propose de déterminer le prix de rembousement R qu'elle peut offrir aux souscripteurs, et pour cela, elle envisage les trois hypothèses suivantes :

1) Aucun remboursement au pair ne sera demandé tout au long de la durée de l'emprunt.

2) A chaque échéance à partir de la 6e, les demandes de remboursement au pair porteront sur le nombre maximum K.

3) A chaque échéance, à partir de la 6e, elles porteront sur la moitié de ce nombre maximum.

Ces trois hypothèses correspondant à trois prix de remboursement possibles différents, on demande :

D'écrire les trois équations permettant de déterminer chacun de ces trois prix.

De résoudre ces équations sur la base des données suivantes :

$$C = 10\,000, \quad c = 500, \quad n = 15, \quad E = 9\,800, \quad i = 0{,}06.$$

(On arrondira les prix de remboursement trouvés aux dix francs inférieurs).

III. — La société fixe en définitive le prix de remboursement à 11 000 F. Déterminer quel sera son taux de revient dans l'hypothèse où les nombres de titres à rembourser au pair décroîtront en progression arithmétique de la 6e à la dernière échéance, depuis le maximum K jusqu'à O.

(Durée : 4 heures ; coefficient : 2).