II. AGRÉGATION FÉMININE DE MATHÉMATIQUES

Mathématiques Elémentaires.

Ce problème propose l'étude de quelques propriétés de certaines figures planes variables dans un plan fixe donné, qui sera, s'il y a lieu, supposé orienté.

Une figure définie par trois points sera dite orientée si ces trois points sont rangés dans un certain ordre ; deux telles figures orientées seront dites directement (ou inversement) semblables si les points de l'une ont pour homologues, dans une similitude directe (ou inverse), les points de même rang de l'autre.

On considère, dans le plan donné, trois points fixes A, B, C, non alignés ; on appelle : (O), le cercle circonscrit au triangle ABC ; O, le centre de ce cercle ; AX, BY, CZ, les tangentes en A, B, C au cercle (O), et I, J, K, les points où ces tangentes coupent les droites BC, CA, AB.

On désigne par P, Q, R, trois points situés respectivement sur les droites BC, CA, AB, et par (P, Q, R) la figure (triangle, ou points alignés, non nécessairement tous distincts) qu'ils définissent.

I. — 1° Démontrer que, si les points P, Q, R sont distincts des sommets du triangle ABC, les trois cercles circonscrits aux triangles AQR, BRP, CPQ ont en commun un point S. Que devient cette propriété lorsque certains des points P, Q, R viennent se confondre avec certains des points A, B, C ? Le point S ainsi défini à partir d'une figure (P, Q, R) sera dit associé à cette figure.

2° Réciproquement, un point S étant donné dans le plan, démontrer qu'il existe une famille de figures (P, Q, R) admettant S comme point associé, l'un des points P, Q, R pouvant être choisi arbitrairement. Les figures (P, Q, R) ainsi définies à partir d'un point S seront dites associées à S.

3° Soit (P, Q, R) l'une des figures associées à un point S ; établir les relations qui existent, en général :

— entre les angles orientés de droites (SP, BC), (SQ, CA), (SR, AB) ;
— entre les angles orientés de droites tels que (PQ, PR), (SB, SC), (AB, AC) ;
— entre les angles orientés de droites tels que (SP, QR) et (SA, AX).

4° Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une figure (P, Q, R) soit formée de points alignés est que le point associé S soit sur le cercle (O).

Les parties suivantes II et III sont indépendantes l'une de l'autre.

II. — 1° Un point S, distinct de A, B, C, étant fixé sur le cercle (O), démontrer que le rapport $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$ est le même pour toutes les figures (P, Q, R) associées à S. Que devient cette propriété si S est en l'un des sommets A, B, C ?

2° Etant donné un nombre m, démontrer qu'il existe un point S du cercle (O) tel que le rapport $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$, correspondant à ce point, soit égal à m ; donner une construction de ce point S.

On considère les deux points du cercle (O) pour lesquels ces rapports ont des valeurs opposées, m et $-m$; démontrer que la droite joignant ces deux points passe par un point fixe quand m varie.

Quels sont les points S correspondant aux valeurs — 1, 2 et $\frac{1}{2}$ du rapport m ?

III. — On suppose dans cette partie III, que le point S n'est pas sur le cercle (O). La notation (P, Q, R) désignera ici un triangle orienté dont les sommets sont rangés dans l'ordre P, Q, R.

1° Le point S étant fixé, démontrer que tous les triangles (P, Q, R) associés à S sont directement semblables à un triangle fixe.

Soient S et S′ deux points homologues dans l'inversion admettant (O) comme cercle des points doubles. Démontrer que deux quelconques des triangles orientés (P, Q, R) et (P′, Q′, R′), associés respectivement à S et S′, sont inversement semblables.

2° Un triangle orienté (T) étant donné, démontrer qu'il existe en général un point S tel que les triangles orientés (P, Q, R), associés à S, soient directement semblables à (T).

Construire, en particulier, le ou les points S tels que les triangles associés (P, Q, R) soient équilatéraux.

3° Déterminer tous les points S tels que les triangles orientés associés (P, Q, R) soient, ou bien directement semblables, ou bien inversement semblables à l'un ou à l'autre des six triangles orientés déduits du triangle ABC en rangeant ses sommets dans tous les ordres possibles.

Lorsque le triangle ABC n'est pas isocèle, on obtient ainsi onze points, parmi lesquels figurent O, I, J, K ; préciser leur répartition, et montrer, en particulier, que cinq d'entre eux sont alignés, les six autres étant sur un cercle passant par O. Que deviennent ces points lorsque ABC est isocèle, ou équilatéral ?

Dans le cas général, soient S_1 et S_2 ceux de ces points pour lesquels les triangles orientés (P, Q, R) sont directement semblables aux triangles orientés (B, C, A) et (C, A, B). Démontrer que S_1, par exemple, peut être caractérisé par l'égalité des angles (BC, BS_1), (CA, CS_1), (AB, AS_1), et que S_1 et S_2 sont les foyers d'une conique tangente à BC, CA, AB. En désignant par α, β, γ, φ, les mesures algébriques des angles (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB), (BC, BS_1), établir la relation :

$$\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma.$$

(On pourra établir d'abord la relation :

$$4\sigma \operatorname{cotg}\theta = y^2 + z^2 - x^2$$

existant, dans un triangle, entre les longueurs x, y, z des côtés, l'angle θ opposé au côté x, et l'aire σ).

IV. — 1° Le point S étant fixé, situé ou non sur le cercle (O), quelles sont, en général, les enveloppes des droites telles que PQ, correspondant à toutes les figures (P, Q, R) associées à S ?

2° Un point S étant fixé sur (O), distinct de A, B, C, on considère sur chaque droite PQR associée à S, le point M tel que $\overline{PM} = \lambda . \overline{PQ}$, λ étant un nombre donné. Quel est le lieu géométrique L de ces points M ? Quelle est l'enveloppe des lieux L lorsque λ varie ?

3° Le point S étant fixé, hors du cercle (O), quels sont, en général, les lieux géométriques de points tels que les centres des cercles circonscrits, ou les orthocentres, ou les centres de gravité des triangles (P, Q, R) associés à S ? Peut-on choisir le point S de façon que l'un des triangles associés (P, Q, R) admette justement le point S comme centre du cercle circonscrit, ou comme orthocentre, ou comme centre de gravité ?

V. — Un point S non situé sur BC, CA, AB, est fixé dans le plan.

1° On considère une inversion ayant S pour pôle. Etudier la figure variable formée par les inverses des points P, Q, R, de chacune des figures (P, Q, R) associées à S.

2° On considère une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle donné, ayant S pour centre. Etudier la figure variable formée par les droites transformées des points P, Q, R, de chacune des figures (P, Q, R) associées à S.

Mathématiques Spéciales.

L'espace est rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. On appelle (S) la sphère et (C) le cercle définis respectivement par les équations :

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2Ry = 0,$$
$$(C) \quad z = 0, \; x^2 + y^2 = R^2,$$

R étant une constante positive donnée.

I. — On désigne par Δ l'une quelconque des droites parallèles au plan yOz, rencontrant la droite $x'Ox$, et tangentes à la sphère (S).

1° Démontrer qu'une droite Δ peut être définie par les équations

$$y \sin\theta - z\cos\theta = 0, \quad x = R\cos\theta,$$

ou bien par la représentation paramétrique :

$$x = R\cos\theta, \; y = \rho\cos\theta, \; z = \rho\sin\theta,$$

θ et ρ étant deux paramètres.

2° Démontrer que chaque droite Δ est, en général, tangente aux deux sphères de rayon nul passant par le cercle (C).

Cette propriété permet-elle de caractériser les droites Δ parmi les droites parallèles au plan yOz ?

II. — On désigne par (K) la surface engendrée par la droite Δ lorsque le paramètre θ prend toutes les valeurs possibles. Cette surface est évidemment invariante par la transformation ponctuelle qui fait correspondre au point (x, y, z) le point (x_1, y_1, z_1) tel que

$$x_1 = x, \quad y_1 = my, \quad z_1 = mz,$$

m étant une constante non nulle.

1° Former l'équation ponctuelle et l'équation tangentielle de la surface (K) ; quels sont ses points singuliers ?

Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes Δ de (K).

2° Démoontrer qu'il existe deux familles (à un paramètre) de quadriques (avec ou sans point double) de révolution autour d'axes parallèles à $x'x$, admettant yOz comme plan de symétrie, telles que chacune de ces quadriques soit tangente à (K) en tous les points d'une courbe (quadriques inscrites ou circonscrites). Déterminer ces quadriques, étudier leurs courbes de contact avec (K), et construire les projections, sur les trois plans de coordonnées, de celles de ces courbes qui correspondent à des quadriques réelles.

3° Démontrer que tous les plans passant par une droite Δ fixée coupent le cercle (C) sous le même angle, que l'on définira.

On désigne par (A, Δ), le plan qui passe par le point A situé sur $z'Oz$ et ayant une cote donnée a, non nulle, et par une droite Δ, supposée différente de $z'z$. Quelle est l'enveloppe des plans (A, Δ), le point A étant fixe ?

Soit Δ_0 la position de Δ, différente de $z'z$, correspondant à la valeur θ_0 de θ. Le plan (A, Δ_0) coupe (K) suivant la génératrice Δ_0 et suivant une courbe Γ, dont on indiquera la nature et dont on construira la projection orthogonale Γ' sur le plan yOz. Comment varie cette courbe-projection Γ' lorsque le point A décrit $z'z$, Δ_0 restant fixe, et lorsque Δ_0 varie sur (K), le point A restant fixe ?

4° On désigne par (B) la sphère passant par le cercle (C) et dont le centre B a pour cote b.

Démontrer que toutes les sphères (B), lorsque b varie, coupent une droite fixée Δ sous le même angle, que l'on définira.

Etudier l'intersection de (K) avec une sphère (B) donnée. Construire les projections de cette intersection sur les trois plans de coordonnées. Etudier l'enveloppe des plans tangents à (K) en tous les points de cette intersection.

5° On considère le cône circonscrit à (K) ayant pour sommet un point F, donné sur le cercle (C), non situé sur $x'x$, et défini par l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OF}) = \varphi$. Former l'équation de la projection sur le plan yOz de la courbe de contact de ce cône avec (K), dans un système de coordonnées polaires ayant comme pôle l'origine O et comme axe polaire l'axe Oy. Construire cette projection, en se bornant aux deux cas particuliers : $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

III. — On considère la sphère imaginaire (Σ) ayant pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0,$$

et l'on fait correspondre à chaque droite Δ la droite Δ′ conjuguée (ou réciproque) de Δ par rapport à (Σ). On désigne par (K′) la surface engendrée par les droites Δ′ correspondant à toutes les droites Δ.

1° Former les équations ponctuelle et tangentielle de (K′), ainsi qu'une représentation paramétrique de (K′) mettant en évidence ses génératrices rectilignes Δ′. Quels sont les points singuliers de cette surface ?

Etudier les trajectoires orthogonales des droites Δ′, et construire les projections orthogonales de ces courbes sur les trois plans de coordonnées.

2° On considère le cône circonscrit à (K′) ayant pour sommet le point A (o, o, a) ; construire la base de ce cône dans le plan défini par l'équation $x = R$.

3° Quelles propriétés de la surface (K′) peut-on déduire des propriétés de (K) établies au paragraphe II-2° (quadriques inscrites et circonscrites) ?

4° Soit P le plan tangent à (K) en un point M, non singulier, de cette surface ; on considère le pôle M′ du plan P et le plan polaire P′ du point M par rapport à la sphère (Σ).

Lorsque le point M décrit une génératrice fixe Δ de (K), différente de $z'z$, la droite MM′ d'une part, la droite commune à P et P′ d'autre part, engendrent des surfaces (V) et (W). Déterminer ces surfaces, indiquer leur forme et préciser leurs plans et leurs axes de symétrie. Quelle relation existe-t-il entre ces deux surfaces ? Quelle est leur intersection ?

Calcul différentiel et intégral.

I. — Dans un plan rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, un cercle C mobile reste tangent à l'axe $x'Ox$ en un point M variable, son centre décrivant la courbe S définie par l'équation $y = f(x)$, $f(x)$ étant une fonction admettant des dérivées première et seconde. L'enveloppe de C comprend donc l'axe $x'x$, et une courbe Σ qu'il touche en un point P. Déterminer la courbe S de manière que les deux points M et P décrivent, sur leurs lieux respectifs, des arcs constamment égaux.

II. — On désire généraliser à l'espace le problème élémentaire précédent.

Les axes de coordonnées $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ étant rectangulaires, on considère une sphère C tangente au plan xOy en un point variable M, son centre décrivant la surface S définie par l'équation $z = f(x, y)$, $f(x, y)$ étant une fonction admettant, par rapport à x et y, des dérivées partielles premières et secondes continues, que l'on désignera, comme d'habitude, par les notations p, q, r, s, t. L'enveloppe de C comprend le plan xOy, et une surface Σ qu'elle touche en un point P.

Former le système d'équations aux dérivées partielles que doit vérifier la fonction $z = f(x, y)$, pour que les points de contact M et P décrivent, dans leurs déplacements respectifs, des arcs *constamment* égaux.

Après avoir étudié très brièvement les solutions de ce système pour lesquelles la dérivée partielle seconde s (par rapport à x et y) est identiquement nulle, on montrera

que les autres solutions sont définies par un système de deux équations qui peuvent être mises sous la forme :

$$rt - s^2 = 0, \tag{1}$$
$$z(r + t) - (p^2 + q^2 + 1) = 0. \tag{2}$$

III. — Pour résoudre ce dernier système, on remarque d'abord que l'équation (1) exprime que S est une surface développable, ce qui permet de la définir comme l'enveloppe d'un plan ayant pour équation :

$$z = ax + by + c, \tag{3}$$

a, b, c, étant des fonctions, supposées dérivables, d'un paramètre u, dont le choix judicieux dans chaque question permettra de simplifier la solution.

Former les équations différentielles que doivent vérifier les fonctions a, b, c, pour que la surface développable S satisfasse à l'équation (2). Montrer que le plan (3) doit nécessairement passer par un point fixe, à distance finie ou à l'infini, du plan xOy, c'est-à-dire que S est nécessairement un cône ou un cylindre, et que le cas des cylindres correspond à une solution déjà rencontrée.

IV. — Pour la recherche des cônes S, leur sommet étant pris à l'origine O, l'équation du plan (3) devient :

$$z = ax + by \ ; \tag{3'}$$

en considérant les fonctions a et b comme les coordonnées, dans un plan auxiliaire rapporté à des axes ωX, ωY, du point de contact de la droite ayant pour équation :

$$X \cos u + Y \sin u - \lambda(u) = 0$$

avec son enveloppe (ce qui revient à préciser l'interprétation du paramètre u), on est ramené à définir la fonction $\lambda(u)$ par une équation différentielle que l'on formera et que l'on intégrera. Déduire de là la détermination du cône S ; on en construira une base dans un plan parallèle à xOy, et on montrera que son intersection avec le cylindre de révolution ayant pour axe Oz et pour rayon l'unité ($x^2 + y^2 = 1$) est une courbe dont le plan osculateur en chaque point fait un angle constant avec le plan tangent au cylindre en ce même point ; que devient cette courbe lorsqu'on développe la surface du cylindre ?

V. — On considère *isolément* l'équation aux dérivées partielles

$$z(r + t) - (p^2 + q^2 + 1) = 0. \tag{2}$$

On demande d'effectuer, dans cette équation, le changement de variables :

$$\alpha = x + iy, \quad \beta = x - iy.$$

Désignant par P, Q, R, S, T, les dérivées partielles de z par rapport aux nouvelles variables α et β, l'équation (2) devient

$$4(zS - PQ) = 1. \tag{2'}$$

Déterminer l'intégrale générale de (2'), et, par suite, celle de (2). (On pourra, par exemple, faire intervenir l'inconnue auxiliaire $v = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \beta}$).

Mécanique rationnelle.

On désigne par Σ une sphère homogène, pesante, par S son centre, par a son rayon, par m sa masse, par I son moment d'inertie par rapport à un diamètre. Cette sphère est assujettie à rester constamment en contact d'une part avec un plan Π, d'autre part avec une droite Δ ; on appelle respectivement A et B les points de contact de Σ avec Π et avec Δ. La droite Δ et le plan Π sont invariablement liés et sont définis, par rapport à un système d'axes de coordonnées rectangulaires $O_1x_1y_1z_1$, lui-même invariablement lié à Π, par les équations :

$$(\Delta) \qquad x_1 = 0, \qquad z_1 = y_1 \operatorname{tg} \alpha,$$
$$(\Pi) \qquad z_1 = -a,$$

α et a étant des constantes positives données, avec $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Dans ces conditions, le point géométrique S, centre de Σ, reste évidemment sur une certaine ellipse (E) ; la position de S sur (E) sera définie par l'anomalie excentrique u.

Les contacts de Σ avec Π et avec Δ sont supposés bilatéraux. Pour réaliser cette condition, on peut imaginer que Σ est astreinte à rester constamment en contact, *sans frottement*, avec certaines surfaces, convenablement choisies, invariablement liées au trièdre $O_1x_1y_1z_1$. On supposera, par exemple, que la sphère reste en contact, *sans frottement*, avec le plan Π' défini par l'équation $z_1 = +a$, et avec le cylindre Γ, de révolution autour de Δ, ayant pour rayon $2a$.

Comme une lecture complète du texte le suggère implicitement, le mouvement de la sphère, qui est indépendant de la manière dont les liaisons sont rendues bilatérales, peut être étudié sans faire intervenir le calcul des réactions, dont certaines composantes sont d'ailleurs indéterminées ; aucune considération sur ce sujet n'est demandée.

I. — On suppose que les contacts en A et B ont lieu, l'un et l'autre, sans frottement. Etudier le mouvement de la sphère Σ dans les deux cas suivants :

1° Le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est supposé fixe, le plan Π étant horizontal ou non ;

2° L'axe O_1z_1 est fixe, porté par la verticale ascendante du point fixe O_1, et le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ tourne autour de O_1z_1 avec une vitesse angulaire constante donnée ω.

II. — Le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est fixe, l'axe O_1z_1 étant dirigé suivant la verticale ascendante. On suppose la sphère Σ munie d'une tige SC, de masse négligeable, sortant de la sphère suivant le prolongement d'un rayon ; on désigne par β le demi-angle au sommet du cône de révolution circonscrit à Σ, ayant C pour sommet. Tous les frottements sont négligés.

1° Etudier le mouvement de la sphère Σ lorsque le point C reste dans le plan Π, la liaison étant supposée bilatérale. On se bornera à un intervalle de temps pendant lequel la tige SC ne rencontre ni la droite Δ, ni le cylindre Γ.

2° La tige SC pouvant s'orienter librement dans l'espace au cours du mouvement de la sphère Σ, on suppose qu'à un certain instant de ce mouvement le point C vient heurter le plan Π, sans que la tige SC heurte la droite Δ ou le cylindre Γ. Etudier le nouvel état des vitesses, et donner les valeurs des percussions en A, B, C, quand on suppose le choc en C parfaitement élastique.

Dans les parties suivantes III, IV, V, la tige SC n'existe plus, et le plan Π est fixe, horizontal ou non.

III. — On suppose que les deux contacts en A et B de la sphère Σ avec le plan Π et avec la droite Δ ont lieu avec un frottement suffisant pour que tout glissement soit impossible. Etudier le mouvement de la sphère Σ.

IV. — On suppose que le frottement au contact en A est suffisant pour que la sphère Σ roule sans glisser sur le plan Π, tandis que le contact en B avec la droite Δ a lieu sans frottement. Calculer, en fonction de u et de $u' = \frac{du}{dt}$, les composantes sur les axes fixes de la rotation instantanée de la sphère. Etudier le mouvement de la sphère.

V. — On suppose que le frottement au contact en B avec la droite Δ est suffisant pour rendre le glissement impossible, tandis que le contact en A avec le plan Π a lieu sans frottement. Etudier le mouvement de la sphère.

VI. — Montrer que, dans tous les mouvements précédemment envisagés, la sphère Σ reste tangente à une droite Δ' invariablement liée au trièdre $O_1x_1y_1z_1$.

Peut-on, dans les diverses parties du problème autres que la partie II, remplacer

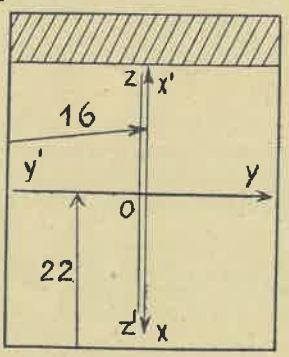
les plans Π et Π' par deux droites matérielles Δ et Δ' invariablement liées, auxquelles la sphère Σ resterait tangente ? On ne se préoccupera pas de la façon dont ces liaisons seraient rendues bilatérales.

En supposant maintenant que la sphère Σ roule sans glisser sur les deux droites Δ et Δ', étudier le mouvement de Σ sous l'action de la pesanteur, les deux droites étant fixes. Déterminer les surfaces axoïdes de ce mouvement, c'est-à-dire les lieux de l'axe instantané de rotation par rapport au système des deux droites Δ, Δ', étudier le mouvement de Σ sous l'action de la pesanteur, les deux droites étant fixes. Déterminer les surfaces axoïdes de ce mouvement, c'est-à-dire les lieux de l'axe instantané de rotation par rapport au système des deux droites Δ, Δ', et par rapport à la sphère.

Géométrie descriptive.

Les données sont exprimées en centimètres.

L'espace est rapporté à trois axes de coordonnées trirectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. L'axe $x'Ox$, parallèle au bord gauche de la feuille et à 16 de celui-ci, est orienté positivement vers le bas. L'origine O est à 22 du bord inférieur de la feuille. L'axe $y'Oy$, parallèle au bord inférieur, est orienté positivement de gauche à droite. L'axe $z'Oz$ est perpendiculaire au plan de la feuille et orienté positivement vers le haut.



Le plan $z = 0$ est le plan horizontal de projection ; le plan $x = 0$ est le plan frontal de projection et l'axe $y'Oy$ est la ligne de terre. On suppose le plan $x = 0$ rabattu sur le plan $z = 0$ en prenant $y'Oy$ pour charnière, de façon que le demi-axe Oz vienne coïncider avec le demi-axe Ox'. Les coordonnées d'un point sont données dans l'ordre habituel (x, y, z).

1° On considère l'hyperboloïde de révolution (H), dont une génératrice rectiligne est la verticale (D) $(x = 5 ; y = 0)$ et dont l'axe de révolution est la droite (L) définie par l'intersection du plan de front $x = 10$ et du plan de bout dont la trace frontale a pour équation dans le plan yOz : $y = \sqrt{3}(z - 22)$.

On appelle (M) la méridienne frontale de l'hyperboloïde (H).

2° Soit A le sommet de l'hyperbole (M) dont la cote est inférieure à 22. Construire la sphère (S) tangente à l'hyperboloïde (H) au point A et tangente à la verticale (D) en un point dont la cote est inférieure à celle du point A.

3° Construire les projections de la courbe (C), intersection des surface (H) et (S) ; en déterminer un point quelconque ainsi que la tangente en ce point, et tous les éléments remarquables.

4° Représenter la portion de *surface* de (H) intérieure à (S) en la supposant solide et opaque.

5° Rédiger sur une feuille annexe une notice expliquant les constructions effectuées et les résultats obtenus.

Nota : On remarquera qu'il peut être commode d'utiliser certaines surfaces simples passant par l'intersection des deux surfaces (H) et (S).

Composition de calcul numérique.

On considère l'expression

$$u_n\,(K,\,x) = \frac{1 - K^{2n+1}}{1 + K^{2n+1}} \cdot \frac{1 + x K^{2n+1}}{1 - x K^{2n+1}},$$

où K et x sont deux nombres positifs, et n un entier positif, nul ou négatif. Désignant par N_1 et N_2 deux entiers positifs, on représente par $\prod_{N1,\,N2} (K,\,x)$ le produit des u_n correspondant à *toutes* les valeurs de n vérifiant : $-N_1 < n < +N_2$.

On peut démontrer, et on admettra, que ce produit tend vers une limite finie quand les entiers N_1 et N_2 tendent simultanément vers $+\infty$, pourvu que x soit différent de zéro et de tout nombre de la forme K^{2n+1}. Soit $\Pi\,(K,\,x)$ cette limite.

L'objet du problème est de calculer la valeur approchée à $\frac{1}{10^6}$ près par défaut du nombre $A = \Pi\left(\frac{1}{10}, 2\right)$ correspondant à $K = \frac{1}{10}$ et $x = 2$. Le calcul sera conduit de la façon suivante :

1° Lorsque n est positif ou nul ($n \geqslant 0$), on pose $u_n\left(\frac{1}{10}, 2\right) = v_n$. L'expression v_n peut se mettre sous la forme

$$v_n = 1 + \frac{2x\frac{1}{10^{2n+1}}}{1 - \alpha n}, \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \frac{1}{10^{2n+1}} + \frac{2}{10^{4n+2}}.$$

En déduire que $\qquad 0 < \log v_n < \frac{2,3}{10^{2n+1}}$

2° Lorsque n est négatif ($n < 0$), on pose $n = -p$ (p entier positif) et

$$u_{-p}\left(\frac{1}{10}, 2\right) = w_p.$$

Montrer que w_p peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{w_p} = 1 + \frac{\frac{1}{10^{2p-1}}}{-1\beta_p}, \text{ avec } \beta_p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^{2p-1}} + \frac{1}{10^{4p-1}}\right).$$

En déduire que

$$0 < \log \frac{1}{w_p} < \frac{1,1}{10^{2p-1}}.$$

3° Soit $\sum_{N}^{+\infty} (\log v_n)$ la somme de la série convergente ayant pour terme général $(\log v_n)$, et dont le premier terme est $(\log v_N)$, N étant un entier positif. Déterminer une valeur $\bar{N}$ de N (aussi petite que possible) telle que

$$\sum_{N}^{+\infty} (\log v_n) < \frac{1}{10^8}$$

Soit, de même, $\sum_{N'}^{+\infty} \log\left(\frac{1}{w_p}\right)$ la somme de la série convergente ayant pour terme général $\left(\log \frac{1}{w_p}\right)$, et dont le premier terme est $\left(\log \frac{1}{w_{N'}}\right)$, N' étant un entier positif.

Déterminer une valeur $\overline{N}'$ de N′ (aussi petite que possible) telle que

$$\sum_{N'}^{+\infty}\left(\log\frac{1}{w_p}\right)<\frac{1}{10^8}.$$

4° Déduire de là que les produits infinis convergents

$$\prod_{\overline{N}}^{+\infty}(v_n) \quad \text{et} \quad \prod_{\overline{N}'}^{+\infty}(w_p)$$

vérifient les inégalités : $1<\prod_{\overline{N}}^{+\infty}(v_u)<1+\frac{2}{10^8}$ et $1-\frac{1}{10^8}<\prod_{\overline{N}'}^{+\infty}(w_p)<1$,

ces notations représentant respectivement les limites des produits

$$v_{\overline{N}}\cdot v_{\overline{N}+1}\cdot\cdots\cdot v_{\overline{N}+h}) \quad \text{et} \quad (w_{\overline{N}'}\cdot w_{\overline{N}'+1}\cdot\cdots\cdot w_{\overline{N}'+k}),$$

lorsque les entiers k et h tendent vers $+\infty$.

5° Déterminer la valeur approchée à $\frac{1}{10^6}$ près par défaut du nombre

$$A=\Pi\left(\frac{1}{10},\,2\right).$$

Remarque. — La notation *log* désigne le logarithme népérien.