BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

TEXTES DE CONCOURS 1956

I. AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques Elémentaires.

NOTA. — On désigne dans le texte par : affinité ($\mathcal{C}$) ou ($\mathcal{C}_1$) une transformation ponctuelle définie par une droite fixe (L) (droite des points doubles ou axe de l'affinité), une direction fixe $x'x$ non parallèle à (L) et un nombre fixe k ou k_1. Le transformé par l'affinité ($\mathcal{C}$) d'un point V est le point V' de la parallèle à $x'x$ menée par V défini par l'égalité :

$$\frac{\overline{vV'}}{\overline{vV}} = k,$$

v étant le point de cette parallèle situé sur l'axe d'affinité.

Les deux applications A et B sont entièrement distinctes, et il n'existe aucune correspondance entre les notations de ces deux parties A et B du texte.

ETUDE GÉNÉRALE

Les éléments fixes de la figure initiale sont :

— deux droites parallèles (D) et (D') distinctes ou confondues, et la parallèle (D'') équidistante de (D) et (D') ;

— deux points F et F' distincts ou confondus ; F n'est pas sur (D), ni F' sur (D') ;

— un axe $x'x$ perpendiculaire à (D) et (D') et orienté dans un sens arbitraire.

Le point F se projette orthogonalement en H sur (D), le point F' en H' sur (D'). On pose $\overline{HF}_{\overrightarrow{x'x}} = p$, $\overline{H'F'}_{\overrightarrow{x'x}} = p'$; on suppose donc $pp' \neq 0$ et $p \neq p'$.

Soient (P) la parabole de foyer F et de directrice (D), (P') la parabole de foyer F' et de directrice (D').

1° Montrer que les deux courbes (P) et (P') sont homothétiques ; placer le centre I d'homothétie ; en déduire que la droite IX parallèle à $x'x$ est le diamètre d'une même direction d relativement aux deux paraboles.

La droite IX coupe (P) en S, (P') en S', (D) en φ et (D') en φ'.

2° Montrer que les points communs à distance finie de (P) et (P'), s'ils existent et sont distincts, définissent une droite (L) parallèle à d ; démontrer que :

— pour tout point U de (L), on a :

$$U\varphi^2 - U\varphi'^2 = UF^2 - UF'^2 ;$$

— (L) coupe (D'') en un point O situé sur la médiatrice des deux points F et F' supposés distincts ;

— (L) coupe IX en I' tel que : $\frac{\overline{I'S'}}{\overline{I'S}} = \frac{p}{p'}$; comment sont disposés les points S, S', I, I' ?

Cette droite (L) sera désormais définie à partir des seuls éléments fixes.

Le point F, la droite (D) et la valeur de p' étant fixés, où doivent être situés I et F' pour que les points d'intersection de (P) et (P') existent ? Discuter suivant la valeur de p', en supposant par exemple p positif.

3° Soit U un point quelconque de (L), extérieur aux deux paraboles (P) et (P').

Les tangentes aux deux courbes issues de U touchent (P) en N et N_1, (P') en N' et N'_1. Montrer que ces quatre points se trouvent deux à deux sur deux droites parallèles à $x'x$. L'une de ces droites, contenant par exemple N et N', coupe (L) en J ; démontrer la relation :

$$\frac{\overline{JN'}}{\overline{JN}} = \frac{p}{p'}$$

En déduire que (P') est la transformée de (P) dans une affinité ($\mathcal{C}$) d'axe (L) et de rapport $k = \frac{p}{p'}$.

Réciproquement (P) étant donnée, ainsi que (L) non parallèle à $x'x$, la transformée de (P) par une affinité ($\mathcal{C}_1$) d'axe (L) et de rapport k_1 donné arbitraire, est une parabole (P_1) dont on construira le foyer F_1 et la directrice (D_1). Quel est le lieu de F_1, lorsque k_1 varie ?

Applications

A. — Les éléments fixes sont :

— la parabole (P), de foyer F, de directrice (D) sur laquelle F se projette orthogonalement en H ;

— l'axe $x'x$ perpendiculaire à (D) ; $\overline{HF}\,\overrightarrow{x'x} = p$.

Trois droites ABt, Bt'C, ACt'', tangentes à (P) en t, t', t'', forment un triangle ABC ; les parallèles à $x'x$ issues de A, B et C coupent respectivement en a, b, c la parabole (P) elle-même et en A', B', C' les polaires par rapport à (P) de A, B et C. La parallèle à $x'x$ issue de t' coupe tt'' en θ.

Les droites AB et A'B' se coupent en γ, BC et B'C' en α, CA et C'A' en β.

1° Comparer les triangles A'B'C' et $t't''t$; étudier le quadrilatère AθCB.

Montrer que α, β et γ sont alignés sur une droite (L) qui passe par les centres de gravité des trois triangles Att'', Btt' et C$t't''$.

2° Montrer que les deux triangles ABC et abc sont homologues dans une affinité ($\mathcal{C}$ d'axe (L), dont le rapport k est indépendant de la position du triangle ABC. En déduire que les côtés du triangle abc sont tangents à une parabole (P') transformée de (P) par ($\mathcal{C}$) ; quel est le paramètre de (P') ?

Quelle serait l'enveloppe de (L) si, b et c restant fixes, a se déplaçait sur (P) ?

3° Soient deux paraboles (P) et (P') distinctes, de même direction asymptotique ; établir la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans (P) et circonscrits à (P'). Comment construire ces triangles ?

B. — Nota. — Les candidats pourront utiliser pour les coniques les propriétés projectives des pôles et polaires, démontrées dans le cas du cercle. On considérera le

problème de l'existence et de la détermination d'une conique comme terminé dans les deux cas suivants figurant au programme :

a. Ellipse définie par deux diamètres conjugués ;

b. Hyperbole définie par les asymptotes et un point.

1° Etude préliminaire sur les coniques.

a. Montrer l'existence d'une conique (C) unique satisfaisant aux conditions suivantes :

— être tangente en deux points donnés A et A' à deux parallèles données AT et A'T' ;

— passer par un point donné E, non situé sur AA', AT ou A'T'.

Soit E' un point quelconque de (C). Les droites EA et E'A' se coupent en α, les droites EA' et E'A en α' ; montrer que $\alpha\alpha'$ est parallèle à AT et passe par le pôle de EE' par rapport à (C). En déduire une construction par points de (C).

b. Montrer l'existence d'une parabole unique satisfaisant aux conditions suivantes :

— être tangente en un point A donné à une droite donnée AT ;

— avoir une direction asymptotique $x'x$ donnée, non parallèle à AT ;

— passer par un point donné E, tel que AE n'est parallèle ni à AT, ni à $x'x$.

Construire l'axe, le sommet et le foyer de cette parabole.

Si E' est un quelconque de ses points, étudier la droite qui joint les points α et α' d'intersection des droites EA, E'A et des parallèles à $x'x$ issues de E' et E ; étudier les points où la parallèle à $x'x$ issue de A coupe les droites EE' et $\alpha\alpha'$.

2° Soient deux paraboles (P) et (P') de même direction asymptotique $x'x$, dont les deux points communs E et E' sont supposés réels et distincts. Leur centre d'homothétie est I ; le diamètre IX coupe (P) en S, (P') en S' et EE' en I'. Soient EY et E'Z les parallèles à IX issues de E et E'. Deux points M et M' décrivent respectivement (P) et (P') de façon que les tangentes en M et M' restent parallèles.

Les droites EM et E'M' se coupent en μ, EM' et E'M en μ'.

a. Etudier le quadrilatère u, u', v, v' dont les sommets sont les points autres que E et E', où EY et E'Z coupent les droites E'M, E'M', EM et EM' ; quelles sont les enveloppes de ses côtés et de ses diagonales ?

b. Quel est le lieu de μ et μ' ? Montrer que la droite $\mu\mu'$ est toujours parallèle aux tangentes en M et M'.

c. En déduire que, pour chaque position de M, il existe une conique tangente en M et M' à (P) et (P') et passant par E et E'. Quel est le lieu de son centre ?

(*Durée : 7 heures*).

Mathématiques Spéciales.

Les candidats sont priés de reproduire sur leur copie le numérotage de l'énoncé, de respecter ses notations et de dessiner les figures sur une feuille spéciale. Ils pourront, s'ils le préfèrent, traiter la partie III avant la partie II.

Toutes les courbes données dans ce problème sont supposées formées d'arcs susceptibles d'une représentation paramétrique propre deux fois dérivable.

On donne pour tout le problème deux plans distincts. Un point *m* du premier est repéré dans un système de coordonnées polaires (θ, ρ) par rapport à un demi-axe donné *ox*. Un point M du second est repéré dans un système d'axes rectangulaires donnés X'OX, Y'OY.

Si M décrit un arc donné d'une courbe (Γ) supposée représentée à l'aide d'un paramètre *t*, les deux relations différentielles :

$$d\theta = Y\,dX \qquad (1)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = Y \operatorname{cotg} X\,dX \qquad (2)$$

définissent, en intégrant, des fonctions $\theta(t)$ et $\rho(t)$. Chaque couple de ces fonctions définit une courbe (γ), lieu du point m (θ, ρ). Toute courbe (γ) est dite *associée* à (Γ), le point m étant *associé* à M.

I. — 1° Montrer que toutes les courbes (γ) associées à (Γ) donnée sont *semblables* dans une similitude de centre o. Interpréter géométriquement X. Réciproquement, étant donnée une courbe (γ), peut-elle être l'associée d'une courbe (Γ) ? Discuter.

2° Comparer, si elles existent, les courbes (Γ) et (Γ_1) associées à deux courbes données (γ) et (γ_1) dans les cas suivants :

(γ_1) est symétrique de (γ) par rapport à une droite passant par le pôle o.

(γ_1) est inverse de (γ) dans une inversion de pôle o.

(γ_1) est la podaire de (γ) par rapport à o. En déduire la condition que doit remplir une courbe (Γ) pour que la podaire d'une de ses associées (γ) par rapport à o soit semblable à (γ) dans une similitude de centre o.

3° Supposant donnés (Γ), une de ses associées déterminée (γ) et un point m_0 sur (γ), on se propose de rectifier un arc m_0m. Montrer que, pour m assez voisin de m_0 l'intégrale curviligne :

$$s = \int \frac{\rho Y}{\sin X}\,dX \qquad (3)$$

étendue à l'arc associé M_0M de (Γ) donne la mesure algébrique de la longueur cherchée, en mesurant celle-ci sur (γ) dans un sens convenable.

On désigne par $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en m à (γ), orienté dans le sens où s croît, par $\vec{\nu}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{\tau}$ et par i le centre de courbure de (γ) en m.

Montrer que l'on a :

$$(\vec{ox}, \vec{\tau}) = \theta + X \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

Montrer que la mesure algébrique r de $\vec{mi}$ sur $\vec{\nu}$ vérifie la relation :

$$\frac{\rho}{r \sin X} = 1 + \frac{1}{Y} \qquad (4)$$

Montrer que, en désignant par h la projection orthogonale du centre de courbure i sur le rayon vecteur om, on a :

$$Y = -\frac{\overline{hm}}{\overline{ho}}$$

II. — On prend pour courbe (Γ) la droite d'équation $\pi Y - X = 0$ et on cherche à construire une courbe (γ) associée. Vérifier que (γ) est semblable à sa podaire par rapport à o.

1° A chaque intervalle $(0, \pi), (\pi, 2\pi) \ldots [n\pi, (n+1)\pi] \ldots$ de variation de X correspond un arc de (γ) désigné par (γ_0) $(\gamma_1) \ldots (\gamma_n)$; dans (γ_n) le rayon vecteur ρ est stationnaire une fois et une seule, on désignera par a_n la valeur algébrique de cet extremun. Sachant que l'on impose à la fonction $\theta(X)$ d'être nulle pour $X = 0$ et partout continue, à la fonction $\rho(X)$ d'avoir dans chaque arc (γ_n) un extremum donné a_n, on demande d'exprimer, dans chacun de ces arcs, $\theta(X)$ et $\rho(X)$ à l'aide des fonctions usuelles et de quadratures portant sur ces fonctions.

2° Les arcs (γ_0) et (γ_1) ont un point commun pour $X = \pi$. Prenant m sur (γ_0) et m' sur (γ_1), on les fait tendre indépendamment vers ce point, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les rayons de courbure en m et m' aient la même limite est que le rapport $\frac{a_1}{a_0}$ ait une valeur déterminée k. Peut-on donner la valeur numérique de k ?

On considère maintenant deux arcs (γ_{n-1}) et (γ_n) qui ont en commun le point correspondant à $X = n\pi$. Vérifier qu'en ce point les deux vecteurs unitaires τ définis en (I, 3°) sont confondus. On prend sur (γ_{n-1}) le point m $(X = n\pi - h)$ et sur (γ_n) le point m' $(X' = n\pi + h)$, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient des rayons de courbure en m et m' tende vers $+1$ quand h tend vers zéro est que le quotient $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ ait une valeur déterminée. La comparer au nombre k ci-dessus.

3° On fait varier X de $-\pi$ à $+2\pi$, on prend $a_0 = 5$ cm, et $\frac{a_1}{a_0} = k$, enfin on impose aux arcs (γ_{-1}) $(-\pi < X \leqslant 0)$ et (γ_0) de se raccorder au point correspondant à $X = 0$. Construire et dessiner avec précision la portion de courbe (γ) ainsi définie. On pourra montrer que l'arc (γ_{-1}) se déduit de (γ_0) par une transformation simple.

III. — 1° Donner l'équation générale des courbes (Γ) associées à la famille des cercles du plan choisis comme courbes (γ) ; dessiner sur un même graphique quelques courbes de la famille, de manière à préciser leur allure générale.

2° On considère toutes les courbes quelconques (γ) ayant en un point donné m une tangente donnée, distincte de om et de sa perpendiculaire ; montrer que leurs podaires (γ_1) par rapport à o sont tangentes entre elles en un point m_1. Si h et h_1 désignent les projections respectives du centre de courbure en m d'une courbe (γ) sur le rayon vecteur om et du centre de courbure de la podaire (γ_1) de (γ) sur le rayon vecteur om_1, montrer que la droite hh_1 passe par un même point pour toutes les courbes (γ). Déduire de ce résultat une construction du centre de courbure en un point m d'une conique. Appliquer cette méthode à une ellipse dont on donne les foyers et le point m, à une parabole dont on donne le foyer, le point m et sa tangente.

3° On considère une courbe (Γ) qui rencontre l'axe Y'Y en un point M_0 et on cherche quelles conditions doit vérifier (Γ) pour que, lorsqu'un de ses points M tend vers M_0, le rayon de courbure au point m d'une associée (γ) ait une limite finie et non nulle.

Montrer qu'il est nécessaire que M_0 ait pour ordonnée zéro ou $+1$. Montrer que dans le premier cas il faut et il suffit que la tangente en M_0 à (Γ) soit distincte des axes. Peut-on énoncer pour le second cas une condition suffisante ?

(Durée : 7 heures).

Calcul différentiel et intégral.

Soit z une variable complexe. On définit la suite de polynômes $P_n(z)$, de degré n, par les égalités :

$$P_0(z) = 1 \text{ pour } n = 0 \text{ et } P_n(z) = \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{p^\alpha}\right) \quad \text{pour } n > 0$$

p étant un entier variant de 1 à n ; α désigne une constante réelle strictement supérieure à 1. On se propose d'étudier la série (1) de terme général $a_n P_n(z)$, a_n étant un nombre réel ou complexe dont la valeur dépend de n mais non de z. Lorsque cette série (1) converge on désigne sa somme par $f(z)$ qui vérifie donc l'égalité :

(1) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z).$$

z_0 désigne dans la suite un nombre réel ou complexe distinct des nombres réels p^α. On rappelle que, si Log $(1+u)$ désigne la détermination de la fonction logarithme qui s'annule avec u, le quotient $\frac{\text{Log}\,(1+u)}{u}$ tend vers 1 quand u, réel ou complexe, tend vers zéro.

Il est recommandé de traiter les questions dans l'ordre proposé. Toutefois, la cinquième question et le début de la sixième, peuvent être étudiés indépendamment des deuxième, troisième, quatrième.

1° Montrer que $P_n(z)$ a une limite finie $E(z)$ quand z est fixe et que n augmente indéfiniment. Montrer que $E(z)$ est une fonction entière de z, c'est-à-dire holomorphe quel que soit z. Quels sont ses zéros ?

2° Soit $D_{k,\varepsilon}$ le domaine constitué par les points d'affixe z vérifiant les inégalités simultanées :

$$|z| \leqslant k^\alpha \; ; \; |z - p^\alpha| \geqslant \varepsilon \; ; \; p = 1, 2, 3, \ldots, k \; ; \; k \text{ entier} \; ; \; 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Montrer que si z appartient à $D_{k,\varepsilon}$, $|P_n(z)|$ reste compris entre deux nombres positifs m et M indépendants de n mais pouvant dépendre de k et de ε ; indiquer une valeur possible de M en utilisant la fonction $E(z)$ définie au 1°. En déduire que si la série (1) converge absolument pour $z = z_0$, elle converge absolument et uniformément dans tout $D_{k,\varepsilon}$. La convergence uniforme a-t-elle lieu également lorsque z appartient à un domaine borné quelconque ? Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients a_n pour que la série (1) converge absolument quel que soit z.

3° On rappelle la formule de transformation d'Abel (sommation par parties) :

(2) $$\sum_{n=p}^{q} b_n c_n = c_q B_q + \sum_{n=p}^{q-1} (c_n - c_{n+1}) B_n, \text{ avec } B_n = \sum_{i=p}^{n} b_i$$

On suppose que la série (1) converge pour $z = z_0$. On pose $a_n P_n(z_0) = b_n$ et $P_n(z) = c_n P_n(z_0)$. Montrer que la série (1) converge uniformément pour $|z| \leqslant R$, R étant un nombre positif quelconque. Construire une série (1) qui converge uniformément dans tout domaine borné du plan, mais qui ne converge absolument pour aucune valeur z_0 de z.

On pose $A_p = \sum_{n=p}^{\infty} a_n$. En calculant les a_n à partir des A_p, prouver que la fonction $\frac{f(z) - A_0}{z}$ est la somme d'une série (1) absolument et uniformément convergente pour $|z| \leqslant R$, quel que soit R.

4° On pose $z = re^{i\theta}$ avec $|z| = r$, et on suppose d'abord $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Etudier les variations de Log $|1 - \frac{z}{t^\alpha}|$ quand z est fixe et que t, réel, varie de 0 à $+\infty$. En supposant $|z| \geqslant 2$ et en appelant n le plus grand entier inférieur ou égal à $\left(\frac{r}{2\cos\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, comparer Log $|P_n(z)|$ et l'intégrale I :

$$\mathbf{I} = \int_{1}^{\left(\frac{r}{2\cos\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \operatorname{Log}\left|1 - \frac{z}{t^{\alpha}}\right| dt$$

et démontrer les inégalités :

$$0 \leqslant \operatorname{Log}|P_n(z)| - \mathbf{I} \leqslant \operatorname{Log}|1 - z|. \tag{3}$$

Comment modifier les définitions de $\mathbf{I}$ et de n pour que les inégalités (3) restent valables lorsque $|\theta|$ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π ? Une partie des inégalités (3) subsiste-t-elle si n est choisi indépendamment de r et de θ ?

$X(\theta)$ étant égal à $\frac{1}{2\cos\theta}$ pour $\cos\theta > 0$ et à $+\infty$ pour $\cos\theta \leqslant 0$, on pose :

$$h(\theta) = \int_{0}^{X(\theta)} \frac{(1 - u\cos\theta)\, u^{\frac{1}{\alpha} - 1}}{u^2 - 2u\cos\theta + 1}\, du$$

Montrer que, $f(z)$ étant donnée, il existe deux constantes A et B telles que l'inégalité (4) soit valable quel que soit z :

$$|f(re^{i\theta})| < A + Br\, e^{h(\theta) r^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{4}$$

Calculer $h(\theta)$ pour $\frac{\pi}{2} \leqslant |\theta| \leqslant \pi$.

5° Montrer que les coefficients a_n d'une série (1) ayant pour somme $f(z)$ sont déterminés par les valeurs $f_p = f(p^{\alpha})$. *Exemple :* k étant un entier fixe, on prend $f_p = 0$ si $p \neq k$ et $f_k = 1$. Calculer, dans l'ordre que l'on voudra, les a_n et la somme des n premiers termes de la série (1) ainsi obtenue. Calculer la somme de cette même série en utilisant la fonction $E(z)$ définie au 1°.

6° On se propose de représenter par une série (1) une fonction entière donnée $g(z)$. Dans ce but, on calcule les coefficients a_n de (1) à partir des valeurs connues $g(p^{\alpha})$ et on pose :

$$g(z) = \sum_{0}^{n-1} a_p P_p(z) + R_n(z) \qquad (n \geqslant 1).$$

Montrer l'égalité (5) :

$$R_n(z^2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{P_n(z^2)}{P_n(u^2)} \cdot \frac{g(u^2)}{u^2 - z^2}\, u\, du \tag{5}$$

Γ étant une courbe simple rectifiable parcourue dans un sens convenable et entourant les points $\pm 1, \pm 2^{\frac{\alpha}{2}}, \ldots \pm n^{\frac{\alpha}{2}}, \pm z$. On pose $u = \rho e^{i\varphi}$. En prenant pour Γ un contour formé d'arcs de la courbe d'équation $\rho^2 = 2n^{\alpha}\cos 2\varphi$ et d'arcs du cercle d'équation $\rho^2 = \operatorname{Log} n$, montrer que, si $g(z)$ vérifie, pour $|z| > R$, l'inégalité :

$$|g(re^{i\theta})| < \frac{C}{r^{1+\varepsilon}}\, e^{h(\theta) r^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (C \text{ et } \varepsilon \text{ positifs})$$

$g(z)$ est la somme de sa série (1) : on pourra commencer par démontrer l'égalité :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n(e^{2i\varphi} \operatorname{Log} n)}{E(e^{2i\varphi} \operatorname{Log} n)} = 1$$

qui a lieu uniformément par rapport à φ, et l'inégalité,

$$|E(\rho e^{i\psi})| > e^{k\rho^{\frac{1}{\alpha}}}$$

valable pour $0 < \varphi_0 \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ et ρ suffisamment grand et dans laquelle k désigne une constante numérique convenable.

(*Durée : 7 heures*).

Mécanique rationnelle.

Un plan fixe (P) fait avec l'horizon un angle $\alpha \left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. L'espace est rapporté à un trièdre trirectangle direct $Oxyz$, lié à (P) : O est dans (P) ; Oz est perpendiculaire à (P) et dirigé vers le dessus du plan ; Oy est, lorsque α n'est pas nul, une ligne de plus grande pente de (P) orientée dans le sens descendant. Le trièdre $Oxyz$ est considéré comme galiléen.

Un solide de révolution (S), pesant, de masse m, de poids mg, est schématisé par deux disques circulaires (D) [centre D, rayon R] et (D') [centre D', rayon $R' < R$], invariablement liés à une tige rectiligne d'extrémités D et D', qui est perpendiculaire au plan de chacun d'eux. On suppose que la répartition des masses qui constituent (S) a les propriétés suivantes : le centre de gravité G de (S) est un point du segment DD', l'ellipsoïde central d'inertie de (S) est de révolution autour de DD'. On pose $GD = h$, $GD' = h'$; on désigne par A le moment d'inertie de (S) par rapport aux droites perpendiculaires en G à DD', par C le moment d'inertie par rapport à DD'. La position de (S) est repérée par rapport à $Oxyz$ par les coordonnées x, y, z de G et trois angles d'Euler ψ, θ, φ, θ désignant l'angle de Oz et $\overrightarrow{D'D}$.

Le problème est consacré principalement à l'étude des mouvements de (S) dans lesquels les deux disques restent en contact avec (P). (S) est dans la région $z \geqslant 0$. On appellera I et I' les points de contact respectifs de (D) et (D') avec (P). Diverses hypothèses seront faites sur les contacts I, I', mais on négligera toujours les résistances au roulement et au pivotement. Les liaisons de contact sont unilatérales ; mais, dans chacune des trois premières parties du problème, on commencera par étudier les mouvements comme si elles étaient bilatérales, et on ne discutera le sort des liaisons que dans la mesure fixée par l'énoncé. Dans cette discussion les diverses éventualités seront caractérisées par des inégalités ; on n'examinera pas les cas particuliers où les inégalités seraient remplacées par des égalités.

Les candidats seront conduits, pour abréger l'écriture, à choisir des notations simples pour des quantités qui s'introduisent dans les calculs. Ils prendront soin de bien spécifier les notations adoptées. En particulier, lorsque les deux disques restent en contact avec (P), on désignera par a et θ_0 les valeurs constantes de z et θ, les angles d'Euler étant choisis de manière que $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$; les réactions en I et I' seront déterminées par leurs composantes sur le trièdre G'XYZ ainsi défini : G' est la projection orthogonale de G sur le plan (P), G'Z passe par G et a le sens de $\overrightarrow{G'G}$, G'Y passe par I et I' et a le sens de $\overrightarrow{II'}$; on posera $IG' = l$, $\overline{G'I'} = l'$ (cette valeur algébrique, comptée sur G'Y, peut être positive, négative ou nulle, mais dans tous les cas $l + l' = \overline{II'} > 0$).

Les questions I, II, III sont largement indépendantes ; la question V peut être traitée avant les autres.

I. — On suppose les contacts des deux disques avec (P) sans frottement.

1° Etudier le mouvement de (S) dans le cas du bicontact ; calculer les réactions en I et I'.

2° On lance (S), les deux disques étant en contact avec (P), en lui imprimant un état de vitesses compatible avec les deux liaisons de contact [c'est-à-dire dans lequel le point de (D), qui se trouve en I, et le point de (D') qui se trouve en I', ont des vitesses situées dans le plan (P)]. Etudier le sort des liaisons dans le mouvement commençant : on fera une discussion complète, dont on présentera les résultats en distinguant les deux cas $l' \geqslant 0$, $l' < 0$.

II. — On suppose les contacts des deux disques avec (P) sans glissement.

Etudier le mouvement de (S) dans le cas du bicontact.

(S) est abandonné sans vitesses initiales, les deux disques étant en contact avec (P). Déduire de l'étude des réactions dans le mouvement avec bicontact des conditions nécessaires pour que, quelle que soit la position où on abandonne (S) :

a. les deux contacts persistent au début ;

b. les deux contacts persistent indéfiniment.

III. — On suppose le contact de (D') et (P) sans frottement, le contact de (D) et (P) sans glissement.

Former les équations du mouvement de (S) dans le cas du bicontact ; étudier le mouvement dans les deux cas suivants : $\alpha = 0$; $\alpha \neq 0$, mais (S) part du repos. Trouver dans ces deux cas la nature géométrique des axoïdes fixe et mobile.

(S) est abandonné sans vitesses initiales, les deux disques étant en contact avec (P). Déduire de l'étude des réactions dans le mouvement avec bicontact des conditions nécessaires pour que, quelle que soit la position où on abandonne (S), les deux contacts persistent au début.

IV. — Compléter l'étude faite aux questions II et III en montrant que, lorsque sont réalisées les conditions nécessaires établies en II, *a*, ou II, *b*, ou III, le mouvement commençant en II, *a* et III, durant indéfiniment en II, *b*) est effectivement le mouvement avec bicontact, aucune autre éventualité n'étant possible.

On reprend pour la nature des contacts les hypothèses de la question III, et on suppose les données l, l', α quelconques. (S) étant abandonné sans vitesses initiales dans *une* position où les deux disques sont en contact avec (P), étudier le mouvement commençant. Trouve-t-on toujours un mouvement commençant possible et un seul ?

V. — On suppose (S) animé d'un mouvement parallèle au plan yOz, au cours duquel DD' reste parallèle au plan yOz et (D) en contact avec (P). Au cours du mouvement (D'), d'abord sans contact avec (P), vient le heurter. On se propose, connaissant l'état des vitesses de (S) au début du choc, de déterminer l'état des vitesses à la fin. Le contact de (D') et (P) est supposé sans frottement ; le coefficient de restitution est e.

a. On suppose le contact de (D) et (P) sans frottement. Déterminer l'état final des vitesses. On examinera les deux hypothèses suivantes : contact I rompu dès le début du choc, aucune percussion ne s'exerçant en I ; contact I subsistant pendant tout le choc.

b. On suppose le contact de (D) et (P) sans glissement. Les deux hypothèses examinées en V, *a* suffisent-elles pour résoudre le problème du choc ?

(*Durée : 7 heures*).