BULLETIN de l'ASSOCIATION des PROFESSEURS de MATHÉMATIQUES de l'Enseignement Public

SOMMAIRE

TEXTES DE CONCOURS 1956

I. AGRÉGATION MASCULINE 505

II. AGRÉGATION FÉMININE 514

III. PROFESSORATS DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE :

Section A1 522
Section B 526
Section D 527

IV. CONCOURS D'ENTRÉE DANS LES CENTRES PÉDAGOGIQUES RÉGIONAUX 528

V. CONCOURS D'ENTRÉE DANS LES ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES :

Rue d'Ulm (groupe I) 531
Boulevard Jourdan (groupe I) 535
Rue d'Ulm et Boulevard Jourdan (groupes II et IIbis) 538
St-Cloud et Fontenay (option mathématiques) 540
St-Cloud et Fontenay (option sciences naturelles) 540

Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique :

Section A1 542
Section A2 544
Section B 545
Section D 547

VI. CONCOURS GÉNÉRAL :

Classe de Mathématiques 548
Classe de Première 550

⁂

LE BLOC-NOTES DE L'A.P.M. 552

35e année — N° 178 Publication trimestrielle **Septembre 1956**

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5e)
Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés.*

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ... 300 F
Prix de l'abonnement au *Bulletin* ..... 1 000 F
Prix du numéro ..... 200 F

Présidents d'Honneur
Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11e). OBE. 56-95.
Vice-Présidents : Mlle AFFRE, 5, rue Gustave-Le-Bon, Paris (14e).
M. BIGUENET, 41, rue M.-Michelis, Neuilly-sur-Seine.
M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14e).
M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5e).
M. THÉRON, 38, rue Lacépède, Paris (5e).
Secrétaires : Mlle FÉLIX, 3, rue Pierre-Berland, Versailles (S.-et-O.) (Conférences).
M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16e).
M. HUISMAN, 11, rue J.-Cœur, Paris (4e) (Bibliothèque et « Bulletin »).
M. ITARD, 6, avenue Paul-Appell, Paris (14e) (Bibliographie).
M. ROSTOLLAND, 19, rue des Ursulines, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
M. SIROS, 13, avenue J.-Racine, Sceaux (Seine) (Programmes).
Trésorier : M. LEGRAND, 3 *bis*, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité de rédaction du « Bulletin » : Mlle FÉLIX ; MM. CHAZAL, GIRARD, ITARD, SIROS ; Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (Nice) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (Lyon, *Ampère*).

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (Compiègne) ; M. WALUSINSKI (*Voltaire*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. DURRANDE (*St-Louis*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; RUFF (*Chaptal*) ; SIROS (*Lakanal*) ; THÉRON (*Louis-le-Grand*).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOUD (Lyon, *Marie-Vadalenc*) ; M. POUX (Saint-Cloud) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; Lille : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

TEXTES DE CONCOURS 1956

I. AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques Elémentaires.

NOTA. — On désigne dans le texte par : affinité ($\mathcal{C}$) ou ($\mathcal{C}_1$) une transformation ponctuelle définie par une droite fixe (L) (droite des points doubles ou axe de l'affinité), une direction fixe $x'x$ non parallèle à (L) et un nombre fixe k ou k_1. Le transformé par l'affinité ($\mathcal{C}$) d'un point V est le point V' de la parallèle à $x'x$ menée par V défini par l'égalité :

$$\frac{\overline{vV'}}{\overline{vV}} = k,$$

v étant le point de cette parallèle situé sur l'axe d'affinité.

Les deux applications A et B sont entièrement distinctes, et il n'existe aucune correspondance entre les notations de ces deux parties A et B du texte.

ETUDE GÉNÉRALE

Les éléments fixes de la figure initiale sont :

— deux droites parallèles (D) et (D') distinctes ou confondues, et la parallèle (D") équidistante de (D) et (D') ;

— deux points F et F' distincts ou confondus ; F n'est pas sur (D), ni F' sur (D') ;

— un axe $x'x$ perpendiculaire à (D) et (D') et orienté dans un sens arbitraire.

Le point F se projette orthogonalement en H sur (D), le point F' en H' sur (D'). On pose $\overline{HF}_{\overrightarrow{x'x}} = p$, $\overline{H'F'}_{\overrightarrow{x'x}} = p'$; on suppose donc $pp' \neq 0$ et $p \neq p'$.

Soient (P) la parabole de foyer F et de directrice (D), (P') la parabole de foyer F' et de directrice (D').

1° Montrer que les deux courbes (P) et (P') sont homothétiques ; placer le centre I d'homothétie ; en déduire que la droite IX parallèle à $x'x$ est le diamètre d'une même direction d relativement aux deux paraboles.

La droite IX coupe (P) en S, (P') en S', (D) en φ et (D') en φ'.

2° Montrer que les points communs à distance finie de (P) et (P'), s'ils existent et sont distincts, définissent une droite (L) parallèle à d ; démontrer que :

— pour tout point U de (L), on a :

$$U\varphi^2 - U\varphi'^2 = UF^2 - UF'^2 ;$$

— (L) coupe (D'') en un point O situé sur la médiatrice des deux points F et F' supposés distincts ;

— (L) coupe IX en I' tel que : $\frac{\overline{I'S'}}{\overline{I'S}} = \frac{p}{p'}$; comment sont disposés les points S, S', I, I' ?

Cette droite (L) sera désormais définie à partir des seuls éléments fixes.

Le point F, la droite (D) et la valeur de p' étant fixés, où doivent être situés I et F' pour que les points d'intersection de (P) et (P') existent ? Discuter suivant la valeur de p', en supposant par exemple p positif.

3° Soit U un point quelconque de (L), extérieur aux deux paraboles (P) et (P').

Les tangentes aux deux courbes issues de U touchent (P) en N et N_1, (P') en N' et N'_1. Montrer que ces quatre points se trouvent deux à deux sur deux droites parallèles à $x'x$. L'une de ces droites, contenant par exemple N et N', coupe (L) en J ; démontrer la relation :

$$\frac{\overline{JN'}}{\overline{JN}} = \frac{p}{p'}$$

En déduire que (P') est la transformée de (P) dans une affinité ($\mathcal{C}$) d'axe (L) et de rapport $k = \frac{p}{p'}$.

Réciproquement (P) étant donnée, ainsi que (L) non parallèle à $x'x$, la transformée de (P) par une affinité ($\mathcal{C}_1$) d'axe (L) et de rapport k_1 donné arbitraire, est une parabole (P_1) dont on construira le foyer F_1 et la directrice (D_1). Quel est le lieu de F_1, lorsque k_1 varie ?

Applications

A. — Les éléments fixes sont :

— la parabole (P), de foyer F, de directrice (D) sur laquelle F se projette orthogonalement en H ;

— l'axe $x'x$ perpendiculaire à (D) ; $\overline{HF}\,\overrightarrow{x'x} = p$.

Trois droites ABt, Bt'C, ACt'', tangentes à (P) en t, t', t'', forment un triangle ABC ; les parallèles à $x'x$ issues de A, B et C coupent respectivement en a, b, c la parabole (P) elle-même et en A', B', C' les polaires par rapport à (P) de A, B et C. La parallèle à $x'x$ issue de t' coupe tt'' en θ.

Les droites AB et A'B' se coupent en γ, BC et B'C' en α, CA et C'A' en β.

1° Comparer les triangles A'B'C' et $t't''t$; étudier le quadrilatère AθCB.

Montrer que α, β et γ sont alignés sur une droite (L) qui passe par les centres de gravité des trois triangles Att'', Btt' et C$t't''$.

2° Montrer que les deux triangles ABC et abc sont homologues dans une affinité ($\mathcal{C}$ d'axe (L), dont le rapport k est indépendant de la position du triangle ABC. En déduire que les côtés du triangle abc sont tangents à une parabole (P') transformée de (P) par ($\mathcal{C}$) ; quel est le paramètre de (P') ?

Quelle serait l'enveloppe de (L) si, b et c restant fixes, a se déplaçait sur (P) ?

3° Soient deux paraboles (P) et (P') distinctes, de même direction asymptotique ; établir la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans (P) et circonscrits à (P'). Comment construire ces triangles ?

B. — Nota. — Les candidats pourront utiliser pour les coniques les propriétés projectives des pôles et polaires, démontrées dans le cas du cercle. On considérera le

problème de l'existence et de la détermination d'une conique comme terminé dans les deux cas suivants figurant au programme :

a. Ellipse définie par deux diamètres conjugués ;

b. Hyperbole définie par les asymptotes et un point.

1° Etude préliminaire sur les coniques.

a. Montrer l'existence d'une conique (C) unique satisfaisant aux conditions suivantes :

— être tangente en deux points donnés A et A' à deux parallèles données AT et A'T' ;

— passer par un point donné E, non situé sur AA', AT ou A'T'.

Soit E' un point quelconque de (C). Les droites EA et E'A' se coupent en α, les droites EA' et E'A en α' ; montrer que $\alpha\alpha'$ est parallèle à AT et passe par le pôle de EE' par rapport à (C). En déduire une construction par points de (C).

b. Montrer l'existence d'une parabole unique satisfaisant aux conditions suivantes :

— être tangente en un point A donné à une droite donnée AT ;

— avoir une direction asymptotique $x'x$ donnée, non parallèle à AT ;

— passer par un point donné E, tel que AE n'est parallèle ni à AT, ni à $x'x$.

Construire l'axe, le sommet et le foyer de cette parabole.

Si E' est un quelconque de ses points, étudier la droite qui joint les points α et α' d'intersection des droites EA, E'A et des parallèles à $x'x$ issues de E' et E ; étudier les points où la parallèle à $x'x$ issue de A coupe les droites EE' et $\alpha\alpha'$.

2° Soient deux paraboles (P) et (P') de même direction asymptotique $x'x$, dont les deux points communs E et E' sont supposés réels et distincts. Leur centre d'homothétie est I ; le diamètre IX coupe (P) en S, (P') en S' et EE' en I'. Soient EY et E'Z les parallèles à IX issues de E et E'. Deux points M et M' décrivent respectivement (P) et (P') de façon que les tangentes en M et M' restent parallèles.

Les droites EM et E'M' se coupent en μ, EM' et E'M en μ'.

a. Etudier le quadrilatère u, u', v, v' dont les sommets sont les points autres que E et E', où EY et E'Z coupent les droites E'M, E'M', EM et EM' ; quelles sont les enveloppes de ses côtés et de ses diagonales ?

b. Quel est le lieu de μ et μ' ? Montrer que la droite $\mu\mu'$ est toujours parallèle aux tangentes en M et M'.

c. En déduire que, pour chaque position de M, il existe une conique tangente en M et M' à (P) et (P') et passant par E et E'. Quel est le lieu de son centre ?

(*Durée : 7 heures*).

Mathématiques Spéciales.

Les candidats sont priés de reproduire sur leur copie le numérotage de l'énoncé, de respecter ses notations et de dessiner les figures sur une feuille spéciale. Ils pourront, s'ils le préfèrent, traiter la partie III avant la partie II.

Toutes les courbes données dans ce problème sont supposées formées d'arcs susceptibles d'une représentation paramétrique propre deux fois dérivable.

On donne pour tout le problème deux plans distincts. Un point *m* du premier est repéré dans un système de coordonnées polaires (θ, ρ) par rapport à un demi-axe donné *ox*. Un point M du second est repéré dans un système d'axes rectangulaires donnés X'OX, Y'OY.

Si M décrit un arc donné d'une courbe (Γ) supposée représentée à l'aide d'un paramètre *t*, les deux relations différentielles :

$$d\theta = Y\,dX \qquad (1)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = Y \operatorname{cotg} X\,dX \qquad (2)$$

définissent, en intégrant, des fonctions $\theta(t)$ et $\rho(t)$. Chaque couple de ces fonctions définit une courbe (γ), lieu du point m (θ, ρ). Toute courbe (γ) est dite *associée* à (Γ), le point m étant *associé* à M.

I. — 1° Montrer que toutes les courbes (γ) associées à (Γ) donnée sont *semblables* dans une similitude de centre o. Interpréter géométriquement X. Réciproquement, étant donnée une courbe (γ), peut-elle être l'associée d'une courbe (Γ) ? Discuter.

2° Comparer, si elles existent, les courbes (Γ) et (Γ_1) associées à deux courbes données (γ) et (γ_1) dans les cas suivants :

(γ_1) est symétrique de (γ) par rapport à une droite passant par le pôle o.

(γ_1) est inverse de (γ) dans une inversion de pôle o.

(γ_1) est la podaire de (γ) par rapport à o. En déduire la condition que doit remplir une courbe (Γ) pour que la podaire d'une de ses associées (γ) par rapport à o soit semblable à (γ) dans une similitude de centre o.

3° Supposant donnés (Γ), une de ses associées déterminée (γ) et un point m_0 sur (γ), on se propose de rectifier un arc m_0m. Montrer que, pour m assez voisin de m_0 l'intégrale curviligne :

$$s = \int \frac{\rho Y}{\sin X}\,dX \qquad (3)$$

étendue à l'arc associé M_0M de (Γ) donne la mesure algébrique de la longueur cherchée, en mesurant celle-ci sur (γ) dans un sens convenable.

On désigne par $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en m à (γ), orienté dans le sens où s croît, par $\vec{\nu}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{\tau}$ et par i le centre de courbure de (γ) en m.

Montrer que l'on a :

$$(\vec{ox}, \vec{\tau}) = \theta + X \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

Montrer que la mesure algébrique r de $\vec{mi}$ sur $\vec{\nu}$ vérifie la relation :

$$\frac{\rho}{r \sin X} = 1 + \frac{1}{Y} \qquad (4)$$

Montrer que, en désignant par h la projection orthogonale du centre de courbure i sur le rayon vecteur om, on a :

$$Y = -\frac{\overline{hm}}{\overline{ho}}$$

II. — On prend pour courbe (Γ) la droite d'équation $\pi Y - X = 0$ et on cherche à construire une courbe (γ) associée. Vérifier que (γ) est semblable à sa podaire par rapport à o.

1° A chaque intervalle $(0, \pi), (\pi, 2\pi) \ldots [n\pi, (n+1)\pi] \ldots$ de variation de X correspond un arc de (γ) désigné par (γ_0) $(\gamma_1) \ldots (\gamma_n)$; dans (γ_n) le rayon vecteur ρ est stationnaire une fois et une seule, on désignera par a_n la valeur algébrique de cet extremun. Sachant que l'on impose à la fonction $\theta(X)$ d'être nulle pour $X = 0$ et partout continue, à la fonction $\rho(X)$ d'avoir dans chaque arc (γ_n) un extremum donné a_n, on demande d'exprimer, dans chacun de ces arcs, $\theta(X)$ et $\rho(X)$ à l'aide des fonctions usuelles et de quadratures portant sur ces fonctions.

2° Les arcs (γ_0) et (γ_1) ont un point commun pour $X = \pi$. Prenant m sur (γ_0) et m' sur (γ_1), on les fait tendre indépendamment vers ce point, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les rayons de courbure en m et m' aient la même limite est que le rapport $\frac{a_1}{a_0}$ ait une valeur déterminée k. Peut-on donner la valeur numérique de k ?

On considère maintenant deux arcs (γ_{n-1}) et (γ_n) qui ont en commun le point correspondant à $X = n\pi$. Vérifier qu'en ce point les deux vecteurs unitaires τ définis en (I, 3°) sont confondus. On prend sur (γ_{n-1}) le point m $(X = n\pi - h)$ et sur (γ_n) le point m' $(X' = n\pi + h)$, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient des rayons de courbure en m et m' tende vers $+1$ quand h tend vers zéro est que le quotient $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ ait une valeur déterminée. La comparer au nombre k ci-dessus.

3° On fait varier X de $-\pi$ à $+2\pi$, on prend $a_0 = 5$ cm, et $\frac{a_1}{a_0} = k$, enfin on impose aux arcs (γ_{-1}) $(-\pi < X \leqslant 0)$ et (γ_0) de se raccorder au point correspondant à $X = 0$. Construire et dessiner avec précision la portion de courbe (γ) ainsi définie. On pourra montrer que l'arc (γ_{-1}) se déduit de (γ_0) par une transformation simple.

III. — 1° Donner l'équation générale des courbes (Γ) associées à la famille des cercles du plan choisis comme courbes (γ) ; dessiner sur un même graphique quelques courbes de la famille, de manière à préciser leur allure générale.

2° On considère toutes les courbes quelconques (γ) ayant en un point donné m une tangente donnée, distincte de om et de sa perpendiculaire ; montrer que leurs podaires (γ_1) par rapport à o sont tangentes entre elles en un point m_1. Si h et h_1 désignent les projections respectives du centre de courbure en m d'une courbe (γ) sur le rayon vecteur om et du centre de courbure de la podaire (γ_1) de (γ) sur le rayon vecteur om_1, montrer que la droite hh_1 passe par un même point pour toutes les courbes (γ). Déduire de ce résultat une construction du centre de courbure en un point m d'une conique. Appliquer cette méthode à une ellipse dont on donne les foyers et le point m, à une parabole dont on donne le foyer, le point m et sa tangente.

3° On considère une courbe (Γ) qui rencontre l'axe Y'Y en un point M_0 et on cherche quelles conditions doit vérifier (Γ) pour que, lorsqu'un de ses points M tend vers M_0, le rayon de courbure au point m d'une associée (γ) ait une limite finie et non nulle.

Montrer qu'il est nécessaire que M_0 ait pour ordonnée zéro ou $+1$. Montrer que dans le premier cas il faut et il suffit que la tangente en M_0 à (Γ) soit distincte des axes. Peut-on énoncer pour le second cas une condition suffisante ?

(Durée : 7 heures).

Calcul différentiel et intégral.

Soit z une variable complexe. On définit la suite de polynômes $P_n(z)$, de degré n, par les égalités :

$$P_0(z) = 1 \text{ pour } n = 0 \text{ et } P_n(z) = \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{p^\alpha}\right) \quad \text{pour } n > 0$$

p étant un entier variant de 1 à n ; α désigne une constante réelle strictement supérieure à 1. On se propose d'étudier la série (1) de terme général $a_n P_n(z)$, a_n étant un nombre réel ou complexe dont la valeur dépend de n mais non de z. Lorsque cette série (1) converge on désigne sa somme par $f(z)$ qui vérifie donc l'égalité :

(1) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z).$$

z_0 désigne dans la suite un nombre réel ou complexe distinct des nombres réels p^α. On rappelle que, si Log $(1+u)$ désigne la détermination de la fonction logarithme qui s'annule avec u, le quotient $\frac{\text{Log}\,(1+u)}{u}$ tend vers 1 quand u, réel ou complexe, tend vers zéro.

Il est recommandé de traiter les questions dans l'ordre proposé. Toutefois, la cinquième question et le début de la sixième, peuvent être étudiés indépendamment des deuxième, troisième, quatrième.

1° Montrer que $P_n(z)$ a une limite finie $E(z)$ quand z est fixe et que n augmente indéfiniment. Montrer que $E(z)$ est une fonction entière de z, c'est-à-dire holomorphe quel que soit z. Quels sont ses zéros ?

2° Soit $D_{k,\varepsilon}$ le domaine constitué par les points d'affixe z vérifiant les inégalités simultanées :

$$|z| \leqslant k^\alpha \; ; \; |z - p^\alpha| \geqslant \varepsilon \; ; \; p = 1, 2, 3, \ldots, k \; ; \; k \text{ entier} \; ; \; 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Montrer que si z appartient à $D_{k,\varepsilon}$, $|P_n(z)|$ reste compris entre deux nombres positifs m et M indépendants de n mais pouvant dépendre de k et de ε ; indiquer une valeur possible de M en utilisant la fonction $E(z)$ définie au 1°. En déduire que si la série (1) converge absolument pour $z = z_0$, elle converge absolument et uniformément dans tout $D_{k,\varepsilon}$. La convergence uniforme a-t-elle lieu également lorsque z appartient à un domaine borné quelconque ? Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients a_n pour que la série (1) converge absolument quel que soit z.

3° On rappelle la formule de transformation d'Abel (sommation par parties) :

(2) $$\sum_{n=p}^{q} b_n c_n = c_q B_q + \sum_{n=p}^{q-1} (c_n - c_{n+1}) B_n, \text{ avec } B_n = \sum_{i=p}^{n} b_i$$

On suppose que la série (1) converge pour $z = z_0$. On pose $a_n P_n(z_0) = b_n$ et $P_n(z) = c_n P_n(z_0)$. Montrer que la série (1) converge uniformément pour $|z| \leqslant R$, R étant un nombre positif quelconque. Construire une série (1) qui converge uniformément dans tout domaine borné du plan, mais qui ne converge absolument pour aucune valeur z_0 de z.

On pose $A_p = \sum_{n=p}^{\infty} a_n$. En calculant les a_n à partir des A_p, prouver que la fonction $\frac{f(z) - A_0}{z}$ est la somme d'une série (1) absolument et uniformément convergente pour $|z| \leqslant R$, quel que soit R.

4° On pose $z = re^{i\theta}$ avec $|z| = r$, et on suppose d'abord $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Etudier les variations de Log $|1 - \frac{z}{t^\alpha}|$ quand z est fixe et que t, réel, varie de 0 à $+\infty$. En supposant $|z| \geqslant 2$ et en appelant n le plus grand entier inférieur ou égal à $\left(\frac{r}{2\cos\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, comparer Log $|P_n(z)|$ et l'intégrale I :

$$\mathbf{I} = \int_{1}^{\left(\frac{r}{2\cos\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \operatorname{Log}\left|1 - \frac{z}{t^{\alpha}}\right| dt$$

et démontrer les inégalités :

$$0 \leqslant \operatorname{Log}|P_n(z)| - \mathbf{I} \leqslant \operatorname{Log}|1 - z|. \tag{3}$$

Comment modifier les définitions de $\mathbf{I}$ et de n pour que les inégalités (3) restent valables lorsque $|\theta|$ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π ? Une partie des inégalités (3) subsiste-t-elle si n est choisi indépendamment de r et de θ ?

$X(\theta)$ étant égal à $\frac{1}{2\cos\theta}$ pour $\cos\theta > 0$ et à $+\infty$ pour $\cos\theta \leqslant 0$, on pose :

$$h(\theta) = \int_{0}^{X(\theta)} \frac{(1 - u\cos\theta)\, u^{\frac{1}{\alpha} - 1}}{u^2 - 2u\cos\theta + 1}\, du$$

Montrer que, $f(z)$ étant donnée, il existe deux constantes A et B telles que l'inégalité (4) soit valable quel que soit z :

$$|f(re^{i\theta})| < A + Br\, e^{h(\theta) r^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{4}$$

Calculer $h(\theta)$ pour $\frac{\pi}{2} \leqslant |\theta| \leqslant \pi$.

5° Montrer que les coefficients a_n d'une série (1) ayant pour somme $f(z)$ sont déterminés par les valeurs $f_p = f(p^{\alpha})$. *Exemple :* k étant un entier fixe, on prend $f_p = 0$ si $p \neq k$ et $f_k = 1$. Calculer, dans l'ordre que l'on voudra, les a_n et la somme des n premiers termes de la série (1) ainsi obtenue. Calculer la somme de cette même série en utilisant la fonction $E(z)$ définie au 1°.

6° On se propose de représenter par une série (1) une fonction entière donnée $g(z)$. Dans ce but, on calcule les coefficients a_n de (1) à partir des valeurs connues $g(p^{\alpha})$ et on pose :

$$g(z) = \sum_{0}^{n-1} a_p P_p(z) + R_n(z) \qquad (n \geqslant 1).$$

Montrer l'égalité (5) :

$$R_n(z^2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{P_n(z^2)}{P_n(u^2)} \cdot \frac{g(u^2)}{u^2 - z^2}\, u\, du \tag{5}$$

Γ étant une courbe simple rectifiable parcourue dans un sens convenable et entourant les points $\pm 1, \pm 2^{\frac{\alpha}{2}}, \ldots \pm n^{\frac{\alpha}{2}}, \pm z$. On pose $u = \rho e^{i\varphi}$. En prenant pour Γ un contour formé d'arcs de la courbe d'équation $\rho^2 = 2n^{\alpha}\cos 2\varphi$ et d'arcs du cercle d'équation $\rho^2 = \operatorname{Log} n$, montrer que, si $g(z)$ vérifie, pour $|z| > R$, l'inégalité :

$$|g(re^{i\theta})| < \frac{C}{r^{1+\varepsilon}}\, e^{h(\theta) r^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (C \text{ et } \varepsilon \text{ positifs})$$

$g(z)$ est la somme de sa série (1) : on pourra commencer par démontrer l'égalité :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n(e^{2i\varphi} \operatorname{Log} n)}{E(e^{2i\varphi} \operatorname{Log} n)} = 1$$

qui a lieu uniformément par rapport à φ, et l'inégalité,

$$|E(\rho e^{i\psi})| > e^{k\rho^{\frac{1}{\alpha}}}$$

valable pour $0 < \varphi_0 \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ et ρ suffisamment grand et dans laquelle k désigne une constante numérique convenable.

(*Durée : 7 heures*).

Mécanique rationnelle.

Un plan fixe (P) fait avec l'horizon un angle $\alpha \left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. L'espace est rapporté à un trièdre trirectangle direct $Oxyz$, lié à (P) : O est dans (P) ; Oz est perpendiculaire à (P) et dirigé vers le dessus du plan ; Oy est, lorsque α n'est pas nul, une ligne de plus grande pente de (P) orientée dans le sens descendant. Le trièdre $Oxyz$ est considéré comme galiléen.

Un solide de révolution (S), pesant, de masse m, de poids mg, est schématisé par deux disques circulaires (D) [centre D, rayon R] et (D') [centre D', rayon $R' < R$], invariablement liés à une tige rectiligne d'extrémités D et D', qui est perpendiculaire au plan de chacun d'eux. On suppose que la répartition des masses qui constituent (S) a les propriétés suivantes : le centre de gravité G de (S) est un point du segment DD', l'ellipsoïde central d'inertie de (S) est de révolution autour de DD'. On pose $GD = h$, $GD' = h'$; on désigne par A le moment d'inertie de (S) par rapport aux droites perpendiculaires en G à DD', par C le moment d'inertie par rapport à DD'. La position de (S) est repérée par rapport à $Oxyz$ par les coordonnées x, y, z de G et trois angles d'Euler ψ, θ, φ, θ désignant l'angle de Oz et $\overrightarrow{D'D}$.

Le problème est consacré principalement à l'étude des mouvements de (S) dans lesquels les deux disques restent en contact avec (P). (S) est dans la région $z \geqslant 0$. On appellera I et I' les points de contact respectifs de (D) et (D') avec (P). Diverses hypothèses seront faites sur les contacts I, I', mais on négligera toujours les résistances au roulement et au pivotement. Les liaisons de contact sont unilatérales ; mais, dans chacune des trois premières parties du problème, on commencera par étudier les mouvements comme si elles étaient bilatérales, et on ne discutera le sort des liaisons que dans la mesure fixée par l'énoncé. Dans cette discussion les diverses éventualités seront caractérisées par des inégalités ; on n'examinera pas les cas particuliers où les inégalités seraient remplacées par des égalités.

Les candidats seront conduits, pour abréger l'écriture, à choisir des notations simples pour des quantités qui s'introduisent dans les calculs. Ils prendront soin de bien spécifier les notations adoptées. En particulier, lorsque les deux disques restent en contact avec (P), on désignera par a et θ_0 les valeurs constantes de z et θ, les angles d'Euler étant choisis de manière que $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$; les réactions en I et I' seront déterminées par leurs composantes sur le trièdre G'XYZ ainsi défini : G' est la projection orthogonale de G sur le plan (P), G'Z passe par G et a le sens de $\overrightarrow{G'G}$, G'Y passe par I et I' et a le sens de $\overrightarrow{II'}$; on posera $IG' = l$, $\overline{G'I'} = l'$ (cette valeur algébrique, comptée sur G'Y, peut être positive, négative ou nulle, mais dans tous les cas $l + l' = \overline{II'} > 0$).

Les questions I, II, III sont largement indépendantes ; la question V peut être traitée avant les autres.

I. — On suppose les contacts des deux disques avec (P) sans frottement.

1° Etudier le mouvement de (S) dans le cas du bicontact ; calculer les réactions en I et I'.

2° On lance (S), les deux disques étant en contact avec (P), en lui imprimant un état de vitesses compatible avec les deux liaisons de contact [c'est-à-dire dans lequel le point de (D), qui se trouve en I, et le point de (D') qui se trouve en I', ont des vitesses situées dans le plan (P)]. Etudier le sort des liaisons dans le mouvement commençant : on fera une discussion complète, dont on présentera les résultats en distinguant les deux cas $l' \geqslant 0$, $l' < 0$.

II. — On suppose les contacts des deux disques avec (P) sans glissement.

Etudier le mouvement de (S) dans le cas du bicontact.

(S) est abandonné sans vitesses initiales, les deux disques étant en contact avec (P). Déduire de l'étude des réactions dans le mouvement avec bicontact des conditions nécessaires pour que, quelle que soit la position où on abandonne (S) :

a. les deux contacts persistent au début ;

b. les deux contacts persistent indéfiniment.

III. — On suppose le contact de (D') et (P) sans frottement, le contact de (D) et (P) sans glissement.

Former les équations du mouvement de (S) dans le cas du bicontact ; étudier le mouvement dans les deux cas suivants : $\alpha = 0$; $\alpha \neq 0$, mais (S) part du repos. Trouver dans ces deux cas la nature géométrique des axoïdes fixe et mobile.

(S) est abandonné sans vitesses initiales, les deux disques étant en contact avec (P). Déduire de l'étude des réactions dans le mouvement avec bicontact des conditions nécessaires pour que, quelle que soit la position où on abandonne (S), les deux contacts persistent au début.

IV. — Compléter l'étude faite aux questions II et III en montrant que, lorsque sont réalisées les conditions nécessaires établies en II, *a*, ou II, *b*, ou III, le mouvement commençant en II, *a* et III, durant indéfiniment en II, *b*) est effectivement le mouvement avec bicontact, aucune autre éventualité n'étant possible.

On reprend pour la nature des contacts les hypothèses de la question III, et on suppose les données l, l', α quelconques. (S) étant abandonné sans vitesses initiales dans *une* position où les deux disques sont en contact avec (P), étudier le mouvement commençant. Trouve-t-on toujours un mouvement commençant possible et un seul ?

V. — On suppose (S) animé d'un mouvement parallèle au plan yOz, au cours duquel DD' reste parallèle au plan yOz et (D) en contact avec (P). Au cours du mouvement (D'), d'abord sans contact avec (P), vient le heurter. On se propose, connaissant l'état des vitesses de (S) au début du choc, de déterminer l'état des vitesses à la fin. Le contact de (D') et (P) est supposé sans frottement ; le coefficient de restitution est e.

a. On suppose le contact de (D) et (P) sans frottement. Déterminer l'état final des vitesses. On examinera les deux hypothèses suivantes : contact I rompu dès le début du choc, aucune percussion ne s'exerçant en I ; contact I subsistant pendant tout le choc.

b. On suppose le contact de (D) et (P) sans glissement. Les deux hypothèses examinées en V, *a* suffisent-elles pour résoudre le problème du choc ?

(*Durée : 7 heures*).

II. AGRÉGATION FÉMININE DE MATHÉMATIQUES

Mathématiques Elémentaires.

Ce problème propose l'étude de quelques propriétés de certaines figures planes variables dans un plan fixe donné, qui sera, s'il y a lieu, supposé orienté.

Une figure définie par trois points sera dite orientée si ces trois points sont rangés dans un certain ordre ; deux telles figures orientées seront dites directement (ou inversement) semblables si les points de l'une ont pour homologues, dans une similitude directe (ou inverse), les points de même rang de l'autre.

On considère, dans le plan donné, trois points fixes A, B, C, non alignés ; on appelle : (O), le cercle circonscrit au triangle ABC ; O, le centre de ce cercle ; AX, BY, CZ, les tangentes en A, B, C au cercle (O), et I, J, K, les points où ces tangentes coupent les droites BC, CA, AB.

On désigne par P, Q, R, trois points situés respectivement sur les droites BC, CA, AB, et par (P, Q, R) la figure (triangle, ou points alignés, non nécessairement tous distincts) qu'ils définissent.

I. — 1° Démontrer que, si les points P, Q, R sont distincts des sommets du triangle ABC, les trois cercles circonscrits aux triangles AQR, BRP, CPQ ont en commun un point S. Que devient cette propriété lorsque certains des points P, Q, R viennent se confondre avec certains des points A, B, C ? Le point S ainsi défini à partir d'une figure (P, Q, R) sera dit associé à cette figure.

2° Réciproquement, un point S étant donné dans le plan, démontrer qu'il existe une famille de figures (P, Q, R) admettant S comme point associé, l'un des points P, Q, R pouvant être choisi arbitrairement. Les figures (P, Q, R) ainsi définies à partir d'un point S seront dites associées à S.

3° Soit (P, Q, R) l'une des figures associées à un point S ; établir les relations qui existent, en général :

— entre les angles orientés de droites (SP, BC), (SQ, CA), (SR, AB) ;
— entre les angles orientés de droites tels que (PQ, PR), (SB, SC), (AB, AC) ;
— entre les angles orientés de droites tels que (SP, QR) et (SA, AX).

4° Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une figure (P, Q, R) soit formée de points alignés est que le point associé S soit sur le cercle (O).

Les parties suivantes II et III sont indépendantes l'une de l'autre.

II. — 1° Un point S, distinct de A, B, C, étant fixé sur le cercle (O), démontrer que le rapport $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$ est le même pour toutes les figures (P, Q, R) associées à S. Que devient cette propriété si S est en l'un des sommets A, B, C ?

2° Etant donné un nombre m, démontrer qu'il existe un point S du cercle (O) tel que le rapport $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$, correspondant à ce point, soit égal à m ; donner une construction de ce point S.

On considère les deux points du cercle (O) pour lesquels ces rapports ont des valeurs opposées, m et $-m$; démontrer que la droite joignant ces deux points passe par un point fixe quand m varie.

Quels sont les points S correspondant aux valeurs — 1, 2 et $\frac{1}{2}$ du rapport m ?

III. — On suppose dans cette partie III, que le point S n'est pas sur le cercle (O). La notation (P, Q, R) désignera ici un triangle orienté dont les sommets sont rangés dans l'ordre P, Q, R.

1° Le point S étant fixé, démontrer que tous les triangles (P, Q, R) associés à S sont directement semblables à un triangle fixe.

Soient S et S′ deux points homologues dans l'inversion admettant (O) comme cercle des points doubles. Démontrer que deux quelconques des triangles orientés (P, Q, R) et (P′, Q′, R′), associés respectivement à S et S′, sont inversement semblables.

2° Un triangle orienté (T) étant donné, démontrer qu'il existe en général un point S tel que les triangles orientés (P, Q, R), associés à S, soient directement semblables à (T).

Construire, en particulier, le ou les points S tels que les triangles associés (P, Q, R) soient équilatéraux.

3° Déterminer tous les points S tels que les triangles orientés associés (P, Q, R) soient, ou bien directement semblables, ou bien inversement semblables à l'un ou à l'autre des six triangles orientés déduits du triangle ABC en rangeant ses sommets dans tous les ordres possibles.

Lorsque le triangle ABC n'est pas isocèle, on obtient ainsi onze points, parmi lesquels figurent O, I, J, K ; préciser leur répartition, et montrer, en particulier, que cinq d'entre eux sont alignés, les six autres étant sur un cercle passant par O. Que deviennent ces points lorsque ABC est isocèle, ou équilatéral ?

Dans le cas général, soient S_1 et S_2 ceux de ces points pour lesquels les triangles orientés (P, Q, R) sont directement semblables aux triangles orientés (B, C, A) et (C, A, B). Démontrer que S_1, par exemple, peut être caractérisé par l'égalité des angles (BC, BS_1), (CA, CS_1), (AB, AS_1), et que S_1 et S_2 sont les foyers d'une conique tangente à BC, CA, AB. En désignant par α, β, γ, φ, les mesures algébriques des angles (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB), (BC, BS_1), établir la relation :

$$\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma.$$

(On pourra établir d'abord la relation :

$$4\sigma \operatorname{cotg}\theta = y^2 + z^2 - x^2$$

existant, dans un triangle, entre les longueurs x, y, z des côtés, l'angle θ opposé au côté x, et l'aire σ).

IV. — 1° Le point S étant fixé, situé ou non sur le cercle (O), quelles sont, en général, les enveloppes des droites telles que PQ, correspondant à toutes les figures (P, Q, R) associées à S ?

2° Un point S étant fixé sur (O), distinct de A, B, C, on considère sur chaque droite PQR associée à S, le point M tel que $\overline{PM} = \lambda . \overline{PQ}$, λ étant un nombre donné. Quel est le lieu géométrique L de ces points M ? Quelle est l'enveloppe des lieux L lorsque λ varie ?

3° Le point S étant fixé, hors du cercle (O), quels sont, en général, les lieux géométriques de points tels que les centres des cercles circonscrits, ou les orthocentres, ou les centres de gravité des triangles (P, Q, R) associés à S ? Peut-on choisir le point S de façon que l'un des triangles associés (P, Q, R) admette justement le point S comme centre du cercle circonscrit, ou comme orthocentre, ou comme centre de gravité ?

V. — Un point S non situé sur BC, CA, AB, est fixé dans le plan.

1° On considère une inversion ayant S pour pôle. Etudier la figure variable formée par les inverses des points P, Q, R, de chacune des figures (P, Q, R) associées à S.

2° On considère une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle donné, ayant S pour centre. Etudier la figure variable formée par les droites transformées des points P, Q, R, de chacune des figures (P, Q, R) associées à S.

Mathématiques Spéciales.

L'espace est rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. On appelle (S) la sphère et (C) le cercle définis respectivement par les équations :

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2Ry = 0,$$
$$(C) \quad z = 0, \; x^2 + y^2 = R^2,$$

R étant une constante positive donnée.

I. — On désigne par Δ l'une quelconque des droites parallèles au plan yOz, rencontrant la droite $x'Ox$, et tangentes à la sphère (S).

1° Démontrer qu'une droite Δ peut être définie par les équations

$$y \sin\theta - z\cos\theta = 0, \quad x = R\cos\theta,$$

ou bien par la représentation paramétrique :

$$x = R\cos\theta, \; y = \rho\cos\theta, \; z = \rho\sin\theta,$$

θ et ρ étant deux paramètres.

2° Démontrer que chaque droite Δ est, en général, tangente aux deux sphères de rayon nul passant par le cercle (C).

Cette propriété permet-elle de caractériser les droites Δ parmi les droites parallèles au plan yOz ?

II. — On désigne par (K) la surface engendrée par la droite Δ lorsque le paramètre θ prend toutes les valeurs possibles. Cette surface est évidemment invariante par la transformation ponctuelle qui fait correspondre au point (x, y, z) le point (x_1, y_1, z_1) tel que

$$x_1 = x, \quad y_1 = my, \quad z_1 = mz,$$

m étant une constante non nulle.

1° Former l'équation ponctuelle et l'équation tangentielle de la surface (K) ; quels sont ses points singuliers ?

Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes Δ de (K).

2° Démoontrer qu'il existe deux familles (à un paramètre) de quadriques (avec ou sans point double) de révolution autour d'axes parallèles à $x'x$, admettant yOz comme plan de symétrie, telles que chacune de ces quadriques soit tangente à (K) en tous les points d'une courbe (quadriques inscrites ou circonscrites). Déterminer ces quadriques, étudier leurs courbes de contact avec (K), et construire les projections, sur les trois plans de coordonnées, de celles de ces courbes qui correspondent à des quadriques réelles.

3° Démontrer que tous les plans passant par une droite Δ fixée coupent le cercle (C) sous le même angle, que l'on définira.

On désigne par (A, Δ), le plan qui passe par le point A situé sur $z'Oz$ et ayant une cote donnée a, non nulle, et par une droite Δ, supposée différente de $z'z$. Quelle est l'enveloppe des plans (A, Δ), le point A étant fixe ?

Soit Δ_0 la position de Δ, différente de $z'z$, correspondant à la valeur θ_0 de θ. Le plan (A, Δ_0) coupe (K) suivant la génératrice Δ_0 et suivant une courbe Γ, dont on indiquera la nature et dont on construira la projection orthogonale Γ' sur le plan yOz. Comment varie cette courbe-projection Γ' lorsque le point A décrit $z'z$, Δ_0 restant fixe, et lorsque Δ_0 varie sur (K), le point A restant fixe ?

4° On désigne par (B) la sphère passant par le cercle (C) et dont le centre B a pour cote b.

Démontrer que toutes les sphères (B), lorsque b varie, coupent une droite fixée Δ sous le même angle, que l'on définira.

Etudier l'intersection de (K) avec une sphère (B) donnée. Construire les projections de cette intersection sur les trois plans de coordonnées. Etudier l'enveloppe des plans tangents à (K) en tous les points de cette intersection.

5° On considère le cône circonscrit à (K) ayant pour sommet un point F, donné sur le cercle (C), non situé sur $x'x$, et défini par l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OF}) = \varphi$. Former l'équation de la projection sur le plan yOz de la courbe de contact de ce cône avec (K), dans un système de coordonnées polaires ayant comme pôle l'origine O et comme axe polaire l'axe Oy. Construire cette projection, en se bornant aux deux cas particuliers : $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

III. — On considère la sphère imaginaire (Σ) ayant pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0,$$

et l'on fait correspondre à chaque droite Δ la droite Δ′ conjuguée (ou réciproque) de Δ par rapport à (Σ). On désigne par (K′) la surface engendrée par les droites Δ′ correspondant à toutes les droites Δ.

1° Former les équations ponctuelle et tangentielle de (K′), ainsi qu'une représentation paramétrique de (K′) mettant en évidence ses génératrices rectilignes Δ′. Quels sont les points singuliers de cette surface ?

Etudier les trajectoires orthogonales des droites Δ′, et construire les projections orthogonales de ces courbes sur les trois plans de coordonnées.

2° On considère le cône circonscrit à (K′) ayant pour sommet le point A (o, o, a) ; construire la base de ce cône dans le plan défini par l'équation $x = R$.

3° Quelles propriétés de la surface (K′) peut-on déduire des propriétés de (K) établies au paragraphe II-2° (quadriques inscrites et circonscrites) ?

4° Soit P le plan tangent à (K) en un point M, non singulier, de cette surface ; on considère le pôle M′ du plan P et le plan polaire P′ du point M par rapport à la sphère (Σ).

Lorsque le point M décrit une génératrice fixe Δ de (K), différente de $z'z$, la droite MM′ d'une part, la droite commune à P et P′ d'autre part, engendrent des surfaces (V) et (W). Déterminer ces surfaces, indiquer leur forme et préciser leurs plans et leurs axes de symétrie. Quelle relation existe-t-il entre ces deux surfaces ? Quelle est leur intersection ?

Calcul différentiel et intégral.

I. — Dans un plan rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, un cercle C mobile reste tangent à l'axe $x'Ox$ en un point M variable, son centre décrivant la courbe S définie par l'équation $y = f(x)$, $f(x)$ étant une fonction admettant des dérivées première et seconde. L'enveloppe de C comprend donc l'axe $x'x$, et une courbe Σ qu'il touche en un point P. Déterminer la courbe S de manière que les deux points M et P décrivent, sur leurs lieux respectifs, des arcs constamment égaux.

II. — On désire généraliser à l'espace le problème élémentaire précédent.

Les axes de coordonnées $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ étant rectangulaires, on considère une sphère C tangente au plan xOy en un point variable M, son centre décrivant la surface S définie par l'équation $z = f(x, y)$, $f(x, y)$ étant une fonction admettant, par rapport à x et y, des dérivées partielles premières et secondes continues, que l'on désignera, comme d'habitude, par les notations p, q, r, s, t. L'enveloppe de C comprend le plan xOy, et une surface Σ qu'elle touche en un point P.

Former le système d'équations aux dérivées partielles que doit vérifier la fonction $z = f(x, y)$, pour que les points de contact M et P décrivent, dans leurs déplacements respectifs, des arcs *constamment* égaux.

Après avoir étudié très brièvement les solutions de ce système pour lesquelles la dérivée partielle seconde s (par rapport à x et y) est identiquement nulle, on montrera

que les autres solutions sont définies par un système de deux équations qui peuvent être mises sous la forme :

$$(1) \qquad rt - s^2 = 0,$$
$$(2) \qquad z(r + t) - (p^2 + q^2 + 1) = 0.$$

III. — Pour résoudre ce dernier système, on remarque d'abord que l'équation (1) exprime que S est une surface développable, ce qui permet de la définir comme l'enveloppe d'un plan ayant pour équation :

$$(3) \qquad z = ax + by + c,$$

a, b, c, étant des fonctions, supposées dérivables, d'un paramètre u, dont le choix judicieux dans chaque question permettra de simplifier la solution.

Former les équations différentielles que doivent vérifier les fonctions a, b, c, pour que la surface développable S satisfasse à l'équation (2). Montrer que le plan (3) doit nécessairement passer par un point fixe, à distance finie ou à l'infini, du plan xOy, c'est-à-dire que S est nécessairement un cône ou un cylindre, et que le cas des cylindres correspond à une solution déjà rencontrée.

IV. — Pour la recherche des cônes S, leur sommet étant pris à l'origine O, l'équation du plan (3) devient :

$$(3') \qquad z = ax + by \ ;$$

en considérant les fonctions a et b comme les coordonnées, dans un plan auxiliaire rapporté à des axes ωX, ωY, du point de contact de la droite ayant pour équation :

$$X \cos u + Y \sin u - \lambda(u) = 0$$

avec son enveloppe (ce qui revient à préciser l'interprétation du paramètre u), on est ramené à définir la fonction $\lambda(u)$ par une équation différentielle que l'on formera et que l'on intégrera. Déduire de là la détermination du cône S ; on en construira une base dans un plan parallèle à xOy, et on montrera que son intersection avec le cylindre de révolution ayant pour axe Oz et pour rayon l'unité ($x^2 + y^2 = 1$) est une courbe dont le plan osculateur en chaque point fait un angle constant avec le plan tangent au cylindre en ce même point ; que devient cette courbe lorsqu'on développe la surface du cylindre ?

V. — On considère *isolément* l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad z(r + t) - (p^2 + q^2 + 1) = 0.$$

On demande d'effectuer, dans cette équation, le changement de variables :

$$\alpha = x + iy, \quad \beta = x - iy.$$

Désignant par P, Q, R, S, T, les dérivées partielles de z par rapport aux nouvelles variables α et β, l'équation (2) devient

$$(2') \qquad 4(zS - PQ) = 1.$$

Déterminer l'intégrale générale de (2'), et, par suite, celle de (2). (On pourra, par exemple, faire intervenir l'inconnue auxiliaire $v = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \beta}$).

Mécanique rationnelle.

On désigne par Σ une sphère homogène, pesante, par S son centre, par a son rayon, par m sa masse, par I son moment d'inertie par rapport à un diamètre. Cette sphère est assujettie à rester constamment en contact d'une part avec un plan Π, d'autre part avec une droite Δ ; on appelle respectivement A et B les points de contact de Σ avec Π et avec Δ. La droite Δ et le plan Π sont invariablement liés et sont définis, par rapport à un système d'axes de coordonnées rectangulaires $O_1x_1y_1z_1$, lui-même invariablement lié à Π, par les équations :

$$(\Delta) \qquad x_1 = 0, \qquad z_1 = y_1 \operatorname{tg} \alpha,$$
$$(\Pi) \qquad z_1 = -a,$$

α et a étant des constantes positives données, avec $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Dans ces conditions, le point géométrique S, centre de Σ, reste évidemment sur une certaine ellipse (E) ; la position de S sur (E) sera définie par l'anomalie excentrique u.

Les contacts de Σ avec Π et avec Δ sont supposés bilatéraux. Pour réaliser cette condition, on peut imaginer que Σ est astreinte à rester constamment en contact, *sans frottement*, avec certaines surfaces, convenablement choisies, invariablement liées au trièdre $O_1x_1y_1z_1$. On supposera, par exemple, que la sphère reste en contact, *sans frottement*, avec le plan Π' défini par l'équation $z_1 = +a$, et avec le cylindre Γ, de révolution autour de Δ, ayant pour rayon $2a$.

Comme une lecture complète du texte le suggère implicitement, le mouvement de la sphère, qui est indépendant de la manière dont les liaisons sont rendues bilatérales, peut être étudié sans faire intervenir le calcul des réactions, dont certaines composantes sont d'ailleurs indéterminées ; aucune considération sur ce sujet n'est demandée.

I. — On suppose que les contacts en A et B ont lieu, l'un et l'autre, sans frottement. Etudier le mouvement de la sphère Σ dans les deux cas suivants :

1° Le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est supposé fixe, le plan Π étant horizontal ou non ;

2° L'axe O_1z_1 est fixe, porté par la verticale ascendante du point fixe O_1, et le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ tourne autour de O_1z_1 avec une vitesse angulaire constante donnée ω.

II. — Le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est fixe, l'axe O_1z_1 étant dirigé suivant la verticale ascendante. On suppose la sphère Σ munie d'une tige SC, de masse négligeable, sortant de la sphère suivant le prolongement d'un rayon ; on désigne par β le demi-angle au sommet du cône de révolution circonscrit à Σ, ayant C pour sommet. Tous les frottements sont négligés.

1° Etudier le mouvement de la sphère Σ lorsque le point C reste dans le plan Π, la liaison étant supposée bilatérale. On se bornera à un intervalle de temps pendant lequel la tige SC ne rencontre ni la droite Δ, ni le cylindre Γ.

2° La tige SC pouvant s'orienter librement dans l'espace au cours du mouvement de la sphère Σ, on suppose qu'à un certain instant de ce mouvement le point C vient heurter le plan Π, sans que la tige SC heurte la droite Δ ou le cylindre Γ. Etudier le nouvel état des vitesses, et donner les valeurs des percussions en A, B, C, quand on suppose le choc en C parfaitement élastique.

Dans les parties suivantes III, IV, V, la tige SC n'existe plus, et le plan Π est fixe, horizontal ou non.

III. — On suppose que les deux contacts en A et B de la sphère Σ avec le plan Π et avec la droite Δ ont lieu avec un frottement suffisant pour que tout glissement soit impossible. Etudier le mouvement de la sphère Σ.

IV. — On suppose que le frottement au contact en A est suffisant pour que la sphère Σ roule sans glisser sur le plan Π, tandis que le contact en B avec la droite Δ a lieu sans frottement. Calculer, en fonction de u et de $u' = \frac{du}{dt}$, les composantes sur les axes fixes de la rotation instantanée de la sphère. Etudier le mouvement de la sphère.

V. — On suppose que le frottement au contact en B avec la droite Δ est suffisant pour rendre le glissement impossible, tandis que le contact en A avec le plan Π a lieu sans frottement. Etudier le mouvement de la sphère.

VI. — Montrer que, dans tous les mouvements précédemment envisagés, la sphère Σ reste tangente à une droite Δ' invariablement liée au trièdre $O_1x_1y_1z_1$.

Peut-on, dans les diverses parties du problème autres que la partie II, remplacer

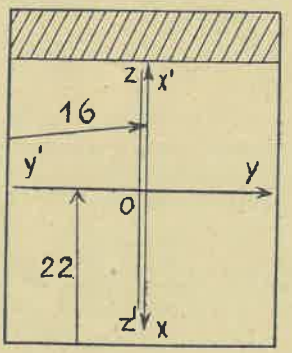
les plans Π et Π' par deux droites matérielles Δ et Δ' invariablement liées, auxquelles la sphère Σ resterait tangente ? On ne se préoccupera pas de la façon dont ces liaisons seraient rendues bilatérales.

En supposant maintenant que la sphère Σ roule sans glisser sur les deux droites Δ et Δ', étudier le mouvement de Σ sous l'action de la pesanteur, les deux droites étant fixes. Déterminer les surfaces axoïdes de ce mouvement, c'est-à-dire les lieux de l'axe instantané de rotation par rapport au système des deux droites Δ, Δ', étudier le mouvement de Σ sous l'action de la pesanteur, les deux droites étant fixes. Déterminer les surfaces axoïdes de ce mouvement, c'est-à-dire les lieux de l'axe instantané de rotation par rapport au système des deux droites Δ, Δ', et par rapport à la sphère.

Géométrie descriptive.

Les données sont exprimées en centimètres.

L'espace est rapporté à trois axes de coordonnées trirectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. L'axe $x'Ox$, parallèle au bord gauche de la feuille et à 16 de celui-ci, est orienté positivement vers le bas. L'origine O est à 22 du bord inférieur de la feuille. L'axe $y'Oy$, parallèle au bord inférieur, est orienté positivement de gauche à droite. L'axe $z'Oz$ est perpendiculaire au plan de la feuille et orienté positivement vers le haut.



Le plan $z = 0$ est le plan horizontal de projection ; le plan $x = 0$ est le plan frontal de projection et l'axe $y'Oy$ est la ligne de terre. On suppose le plan $x = 0$ rabattu sur le plan $z = 0$ en prenant $y'Oy$ pour charnière, de façon que le demi-axe Oz vienne coïncider avec le demi-axe Ox'. Les coordonnées d'un point sont données dans l'ordre habituel (x, y, z).

1° On considère l'hyperboloïde de révolution (H), dont une génératrice rectiligne est la verticale (D) $(x = 5 ; y = 0)$ et dont l'axe de révolution est la droite (L) définie par l'intersection du plan de front $x = 10$ et du plan de bout dont la trace frontale a pour équation dans le plan yOz : $y = \sqrt{3}(z - 22)$.

On appelle (M) la méridienne frontale de l'hyperboloïde (H).

2° Soit A le sommet de l'hyperbole (M) dont la cote est inférieure à 22. Construire la sphère (S) tangente à l'hyperboloïde (H) au point A et tangente à la verticale (D) en un point dont la cote est inférieure à celle du point A.

3° Construire les projections de la courbe (C), intersection des surface (H) et (S) ; en déterminer un point quelconque ainsi que la tangente en ce point, et tous les éléments remarquables.

4° Représenter la portion de *surface* de (H) intérieure à (S) en la supposant solide et opaque.

5° Rédiger sur une feuille annexe une notice expliquant les constructions effectuées et les résultats obtenus.

Nota : On remarquera qu'il peut être commode d'utiliser certaines surfaces simples passant par l'intersection des deux surfaces (H) et (S).

Composition de calcul numérique.

On considère l'expression

$$u_n\,(K,\,x) = \frac{1 - K^{2n+1}}{1 + K^{2n+1}} \cdot \frac{1 + x K^{2n+1}}{1 - x K^{2n+1}},$$

où K et x sont deux nombres positifs, et n un entier positif, nul ou négatif. Désignant par N_1 et N_2 deux entiers positifs, on représente par $\prod_{N1,\,N2}(K,\,x)$ le produit des u_n correspondant à *toutes* les valeurs de n vérifiant : $-N_1 < n < +N_2$.

On peut démontrer, et on admettra, que ce produit tend vers une limite finie quand les entiers N_1 et N_2 tendent simultanément vers $+\infty$, pourvu que x soit différent de zéro et de tout nombre de la forme K^{2n+1}. Soit $\Pi\,(K,\,x)$ cette limite.

L'objet du problème est de calculer la valeur approchée à $\frac{1}{10^6}$ près par défaut du nombre $A = \Pi\left(\frac{1}{10}, 2\right)$ correspondant à $K = \frac{1}{10}$ et $x = 2$. Le calcul sera conduit de la façon suivante :

1° Lorsque n est positif ou nul ($n \geqslant 0$), on pose $u_n\left(\frac{1}{10}, 2\right) = v_n$. L'expression v_n peut se mettre sous la forme

$$v_n = 1 + \frac{2x\frac{1}{10^{2n+1}}}{1 - \alpha n}, \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \frac{1}{10^{2n+1}} + \frac{2}{10^{4n+2}}.$$

En déduire que $\qquad 0 < \log v_n < \frac{2,3}{10^{2n+1}}$

2° Lorsque n est négatif ($n < 0$), on pose $n = -p$ (p entier positif) et

$$u_{-p}\left(\frac{1}{10}, 2\right) = w_p.$$

Montrer que w_p peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{w_p} = 1 + \frac{\frac{1}{10^{2p-1}}}{-1\beta_p}, \text{ avec } \beta_p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^{2p-1}} + \frac{1}{10^{4p-1}}\right).$$

En déduire que

$$0 < \log \frac{1}{w_p} < \frac{1,1}{10^{2p-1}}.$$

3° Soit $\sum_{N}^{+\infty} (\log v_n)$ la somme de la série convergente ayant pour terme général $(\log v_n)$, et dont le premier terme est $(\log v_N)$, N étant un entier positif. Déterminer une valeur $\bar{N}$ de N (aussi petite que possible) telle que

$$\sum_{N}^{+\infty} (\log v_n) < \frac{1}{10^8}$$

Soit, de même, $\sum_{N'}^{+\infty} \log\left(\frac{1}{w_p}\right)$ la somme de la série convergente ayant pour terme général $\left(\log \frac{1}{w_p}\right)$, et dont le premier terme est $\left(\log \frac{1}{w_{N'}}\right)$, N' étant un entier positif.

Déterminer une valeur $\overline{N}'$ de N' (aussi petite que possible) telle que

$$\sum_{N'}^{+\infty}\left(\log\frac{1}{w_p}\right)<\frac{1}{10^8}.$$

4° Déduire de là que les produits infinis convergents

$$\prod_{\overline{N}}^{+\infty}(v_n) \quad \text{et} \quad \prod_{\overline{N}'}^{+\infty}(w_p)$$

vérifient les inégalités : $1<\prod_{\overline{N}}^{+\infty}(v_u)<1+\frac{2}{10^8}$ et $1-\frac{1}{10^8}<\prod_{\overline{N}'}^{+\infty}(w_p)<1$,

ces notations représentant respectivement les limites des produits

$$\left(v_{\overline{N}}\cdot v_{\overline{N}+1}\cdot\ldots\cdot v_{\overline{N}+h}\right) \quad \text{et} \quad \left(w_{\overline{N}'}\cdot w_{\overline{N}'+1}\cdot\ldots\cdot w_{\overline{N}'+k}\right),$$

lorsque les entiers k et h tendent vers $+\infty$.

5° Déterminer la valeur approchée à $\frac{1}{10^6}$ près par défaut du nombre

$$A=\Pi\left(\frac{1}{10},\,2\right).$$

Remarque. — La notation *log* désigne le logarithme népérien.

III. PROFESSORATS DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

Section A_1 (1re partie). — Analyse.

(*Documents autorisés :* table numérique, règle à calcul).

1° Soit $f(z)$ un polynôme entier de la variable complexe z et a un nombre complexe fixé. On appelle M l'image de $f(z)$ et A l'image de a. Démontrez que le nombre des racines de l'équation $f(z)=a$, dont l'image est à l'intérieur d'un contour (c) fermé (sans points multiples), est égal au nombre de tours effectués dans le sens positif par le vecteur $\overrightarrow{AM}$, lorsque le contour (c) est parcouru une fois dans le sens positif par l'image de z, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. [On suppose qu'aucune des racines de $f(z)=a$ n'a son image sur le contour (c)].

On donne maintenant : $f(z)=80z+z^5$ et (c) est le cercle défini par $|z|=3$.

Définir et tracer la courbe décrite par le point M image de $f(z)$ lorsque l'image de z décrit (c) ?

Limiter les régions où doit être choisi le point A, image de a, pour que l'équation : $f(z)=a$ donne de 0 à 5 racines à l'intérieur de (c).

2° $f(z)$ est maintenant un polynôme entier de degré p à coefficients complexes ou non.

On dira que $f(z)$ est du type (N) si toutes ses racines (complexes ou non) sont à partie réelle négative. Démontrer que si $f(z)$ est du type (N) l'une et l'autre des deux propriétés suivantes sont réalisées :

a) L'image de z décrivant l'axe imaginaire dans le sens positif, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (O point d'affixe nul) doit tourner de p demi-tours dans le sens positif. (On laissera de côté le cas particulier de racines imaginaires pures).

Cette condition est-elle suffisante pour que $f(z)$ soit du type (N) ?

b) On pose : $f(iy) : X(y)+iY(y)$. Il faut :

— que les polynômes réels X et Y aient toutes leurs racines réelles ;

— le nombre total des racines doit être $(2p-1)$ au minimum ;

— les racines X et Y doivent être « imbriquées » (c'est-à-dire que les racines de X séparent celles de Y et réciproquement) dans un ordre convenable.

Appliquer à la recherche de λ nombre réel pour que $f(z)$ soit du type (N) lorsque : $f(z) = iz^3 - (1 + \lambda i)z^2 + (1 + 6i)z - 2\lambda i$.

3° Appliquer le § 2°, *b*) à la recherche des relations entre les nombres réels : a, b, c, d pour que le polynôme : $f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ soit du type (N).

4° On donne l'équation différentielle à coefficients constants réels :

$$y''' + \lambda y'' + \lambda y' + y = 0.$$

Déterminer les valeurs de λ telles que la solution générale $y(x)$ tende vers zéro quand la variable x tend vers $+\infty$. Dans cette hypothèse écrire les diverses formes de la solution.

5° On considère maintenant l'équation différentielle :

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = |\sin x|.$$

a) Calculer la série de Fourier de $|\sin x|$.

b) En déduire la série de Fourier de la fonction $y(x)$ qui satisfait à l'équation différentielle, pour x élevé.

Préciser les valeurs moyennes efficaces de $|\sin x|$ et $y(x)$.

Encadrer ou souligner les résultats.

(Durée : 4 heures ; coefficient : 3).

Applications géométriques.

(*Instruments autorisés :* table de logarithmes).

Les axes $oxyz$ sont trirectangles ; a est la mesure positive d'une longueur. On considère la surface (Σ) d'équations paramétriques.

$$(1)\quad \begin{cases} x = \varphi \cos\theta \\ y = \varphi \sin\theta \\ z = \varphi - a \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \text{ variant sur } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ \varphi \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty. \end{array}$$

La surface est réglée, la courbe $\theta = C^{te}$ étant une droite que l'on désignera par G_θ (ou par G). La génératrice rectiligne G_θ engendre (Σ). Elle varie en s'appuyant :

1° sur la directrice rectiligne simple oz $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ qu'elle coupe sous un angle constant de 45° ;

2° sur la directrice rectiligne double $\begin{cases} x = z \\ y = a \end{cases}$

Le trièdre (T_θ) ou « trièdre mobile afférent à l'angle polaire θ » est le trièdre $oXYz$ déduit de $oxyz$ par la rotation autour de oz de l'angle $\theta = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oX})$. L'utilisation de ce trièdre est recommandée pour simplifier les calculs.

I. — Calculez le ds^2 de la surface. Déterminez les projections sur xoy des trajectoires orthogonales des génératrices G_θ [construction *non* demandée], Q et R étant les points d'intersection de G_θ avec oz et avec xoy, soit P le milieu du segment QR. Montrer, directement, que P décrit l'une des trajectoires orthogonales considérées (faire intervenir le mouvement de rotation de (T_θ) par rapport à $oxyz$). Déduire de celle-là les autres trajectoires orthogonales (Γ) et retrouver ainsi les résultats du premier alinéa.

II. — M étant un point variable d'une trajectoire orthogonale fixée (Γ) et G étant la génératrice de (Σ) passant par M, soit V le point commun à G et à l'axe du cercle de courbure de (Γ) en M.

Montrer que la surface développable (S) enveloppe des plans normaux à (Γ) [ou surface polaire de (Γ)] est tangente à (Σ) tout le long de la courbe (L) lieu de V.

Positions relatives des plans tangents à (Σ) en M et V.

III. — Montrer que la normale à (Σ) au point M (θ, ρ) est parallèle au vecteur ayant pour composantes

$$\begin{cases} -\rho \\ \dfrac{a}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} \\ +\rho \end{cases}$$ *par rapport à* (T_θ).

En prenant pour paramètres du point V (ci-dessus) sur (Σ) : $\theta_1 = \theta$ et ρ_1, calculer ρ_1 en fonction de ρ et θ.

Montrer que la correspondance sur une génératrice choisie G_θ entre M et V est involutive.

Calculer la valeur absolue du paramètre de distribution des plans tangents à (Σ) en les points de la génératrice G_θ.

IV. — Déterminer les équations polaires des projections (a) sur xoy des lignes asymptotiques (A) de (Σ) (autres que les génératrices G). On ne demande pas de construire effectivement les courbes (a), mais on indiquera par quelles transformations on peut, de l'une d'elles, déduire les autres.

V. — Soient M_1 et M_2 les deux points de la génératrice G_θ en lesquels les plans tangents à (Σ) font des angles géométriques de 45° avec le plan Xoz (ou plan oz, G_θ).

Evaluez l'aire de la bande de la surface (Σ) balayée par le segment M_1M_2 lorsque θ varie de o à $+\dfrac{\pi}{2}$ (on pourrra utiliser les résultats du § III).

VI. — On considère la surface développable (D), enveloppe des plans asymptotes des génératrices G [(D) est circonscrite à (Σ) le long de la courbe à l'infini du cône directeur $x^2 + y^2 - z^2 = 0$].

Comment passe-t-on de la section de (Σ) par $z = 0$ à la section de (D) par $z = 0$?

Quelles sont les deux familles de lignes de courbure de (D) ?

Montrer que le lieu de l'un des centres de courbure principaux de (D) est un cylindre (C) de génératrices parallèles à oz.

Quelles sont les arêtes de rebroussement des surfaces développables dont les génératrices appartiennent à la congruence des normales à (D) ?

(*N.-B.* — Les différents paragraphes sont indépendants les uns des autres).

(Durée : 4 heures ; coefficient : 3).

Section A_1 (2e partie). — Analyse.

On considère le polynôme à coefficients *réels*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

dont les zéros seront désignés par $z_k = x_k + iy_k$; ces derniers peuvent être réels ou complexes et à tout zéro complexe z_k correspond le zéro imaginaire conjugué $\overline{z_k}$.

1) Montrer que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}$$

$f'(z)$ désignant le polynôme dérivé de $f(z)$.

2) z_k et $\overline{z_k}$ désignant deux zéros imaginaires conjugués de $f(z)$ montrer que le signe de la partie *imaginaire* de l'expression :

$$\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z - \overline{z_k}}$$

est lié de façon simple au signe de y en tout point $z = x + iy$ du plan complexe situé hors du cercle ayant pour diamètre le segment dont les extrémités sont les points d'affixes z_k et $\overline{z_k}$; x_k étant, d'autre part, un zéro réel de $f(z)$ montrer que le signe de la partie *imaginaire* de

$$\frac{1}{z - x_k}$$

est également lié de façon simple au signe de y en tout point $z = x + iy$ du plan complexe.

3) On considère le domaine (D) du plan complexe formé par la réunion des régions intérieures aux cercles ayant respectivement pour diamètre les segments limités par les couples de points dont les affixes sont les zéros imaginaires conjugués de $f(z)$; que peut-on dire du signe de la partie *imaginaire* de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ en tout point n'appartenant pas au domaine (D) ?

4) Déduire de la réponse à la question précédente le domaine du plan complexe où se situent les zéros *complexes* de la dérivée $f'(z)$ de $f(z)$.

5) Soit maintenant un segment $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ de l'axe réel du plan complexe tel que, ni α, ni β ne soient des zéros de $f(z)$, non plus que des points situés dans le domaine (D) ou sur ses frontières, ce segment traversant certaines régions du domaine (D).

On considère dans le plan envisagé le plus petit domaine rectangulaire (k) de côtés parallèles aux axes de coordonnées contenant le segment (α, β), ainsi que la portion du domaine (D) qui est traversée par le segment (α, β). Montrer que si le domaine (k) contient k zéros de $f(z)$, il contient au moins $(k - 1)$ zéros de $f'(z)$ et au plus $(k + 1)$ zéros de $f'(z)$.

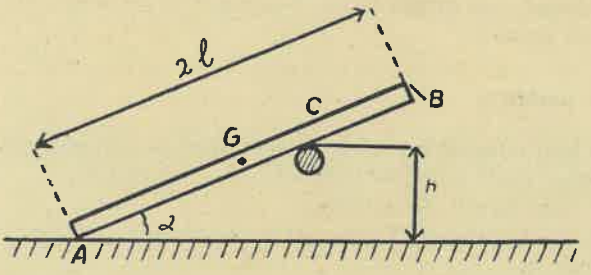
6) Déduire de ce résultat que si le segment (α, β) de l'axe réel ne contient aucun zéro de $f(z)$ et est extérieur au domaine (D), il contient au plus un zéro de $f'(z)$.

(Durée : 6 heures ; coefficient : 4).

Mécanique.

(*Instruments autorisés :* table de logarithmes, règle à calcul).

On considère une barre homogène de poids P de longueurs $2l$, disposée suivant le schéma ci-contre.



Première partie. — On se propose d'étudier un équilibre limite de la barre en appliquant les lois du frottement de glissement à l'état de repos. AB fait un angle α avec l'horizontale. Au contact A sur le plan horizontal le coefficient de frottement est f. En C la barre repose sur une tige horizontale de cote h, le coefficient de frottement au contact est μ. On donne P, l, h, α et μ.

1° Trouver *graphiquement* la valeur *minimum* de f pour que AB soit en équilibre. On déterminera aussi les réactions en A et C.

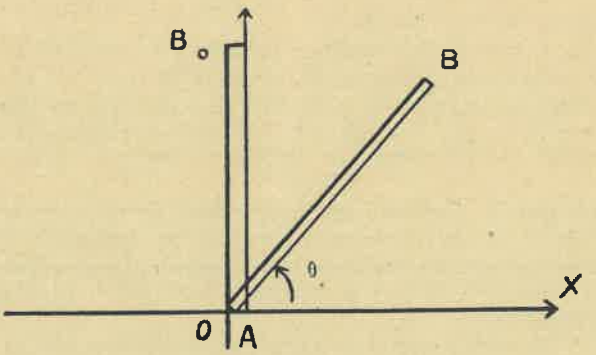
Le dessin sera exécuté à une échelle convenable en prenant :

$$P = 30\,kg\ ;\ 2l = 5\,m\ ;\ \alpha = 20^{\circ}\ ;\ h = 1\,m\ ;\ \mu = 0{,}15.$$

2° Donner une solution analytique de la question 1° en se bornant dans la discussion au cas où h est supérieur à la cote du centre de gravité de la barre.

Deuxième partie. — On supprime la tige C et la barre occupe à l'instant initial la position AB_0, en équilibre instable, le coefficient de frottement en A demeurant f.

L'équilibre étant troublé, la barre tombe dans le plan vertical XOY, l'angle $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{AB}) = \theta$ variant de $\frac{\pi}{2}$ à 0.



1° On demande si au cours du mouvement, l'extrémité A pourra rester fixe, soit pour toutes les valeurs de θ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et 0, soit seulement dans un certain intervalle.

2° Si le mouvement ne peut avoir lieu sans glissement de l'extrémité A, on indiquera dans quel sens se fait ce glissement lorsqu'il s'amorcera, et on précisera entre quelles limites est située la valeur correspondante de θ.

3° On ne demande pas de déterminer θ en fonction du temps. Une telle question aurait-elle un sens précis ?

Section B (1re partie).

1) Dans un plan rapporté à 2 axes rectangulaires ox, oy, on considère la famille de courbes Γ dont l'équation différentielle est : $y = xy'^2$.

Déterminer cette famille de courbes.

L'une d'elles est la parabole P tangente à ox au point A d'abscisse 1 et à oy au point B d'ordonnée 1.

2) Calculer la longueur de l'arc AB de cette parabole.

3) Calculer l'aire comprise entre les axes et l'arc AB.

4) On fait tourner cette parabole autour de son axe. Equation de la surface engendrée, l'axe oz étant perpendiculaire à xoy.

5) On coupe cette surface par le plan $y = 1$. Evaluer le volume du solide ainsi détaché.

6) Déterminer les trajectoires orthogonales C des courbes Γ et montrer que ces courbes C sont les projections sur le plan xoy des courbes de niveau d'un cône par rapport à ce plan.

Nota : Pour les questions 2, 3, 5, on pourra faire un changement d'axes.

(Durée : 4 heures ; coefficient : 2).

Section D (1re partie).

(*Documents autorisés :* tables financières).

I. — Etablir la loi d'amortissement d'un emprunt divisé en N obligations de valeur nominale C, à coupon annuel c, remboursables par tirages au sort en n années, à un prix R supérieur à la valeur nominale, les annuités du service de l'emprunt étant constantes.

Exprimer la valeur de l'annuité en fonction des caractéristiques de l'emprunt.

II. — Une société veut émettre un emprunt divisé en obligations de valeur nominale C, à coupon annuel c, émises au prix E, et dont l'amortissement s'étendra sur n années et commencera à la fin de la première année de l'emprunt.

Le remboursement s'effectuera par tirages au sort à un prix R supérieur à la valeur nominale, ou bien au pair à la demande des porteurs. Toutefois, les demandes de remboursement au pair ne pourront être acceptées avant la 6e année de l'emprunt, et elles ne pourront par la suite porter chaque année que sur un nombre de titres au plus égal à un maximum donné et fixe K.

Le tableau d'amortissement sera établi sur la base d'une annuité sensiblement constante, calculée en supposant qu'aucune obligation ne sera remboursée au pair.

Le nombre maximum K est pris égal au nombre de titres à amortir à la 6e échéance, d'après le tableau d'amortissement ainsi construit.

La société se fixe à l'avance un taux de revient i.

Elle se propose de déterminer le prix de rembousement R qu'elle peut offrir aux souscripteurs, et pour cela, elle envisage les trois hypothèses suivantes :

1) Aucun remboursement au pair ne sera demandé tout au long de la durée de l'emprunt.

2) A chaque échéance à partir de la 6e, les demandes de remboursement au pair porteront sur le nombre maximum K.

3) A chaque échéance, à partir de la 6e, elles porteront sur la moitié de ce nombre maximum.

Ces trois hypothèses correspondant à trois prix de remboursement possibles différents, on demande :

D'écrire les trois équations permettant de déterminer chacun de ces trois prix.

De résoudre ces équations sur la base des données suivantes :

$$C = 10\,000, \quad c = 500, \quad n = 15, \quad E = 9\,800, \quad i = 0{,}06.$$

(On arrondira les prix de remboursement trouvés aux dix francs inférieurs).

III. — La société fixe en définitive le prix de remboursement à 11 000 F. Déterminer quel sera son taux de revient dans l'hypothèse où les nombres de titres à rembourser au pair décroîtront en progression arithmétique de la 6e à la dernière échéance, depuis le maximum K jusqu'à O.

(Durée : 4 heures ; coefficient : 2).

IV. CONCOURS D'ENTRÉE DANS LES CENTRES PÉDAGOGIQUES RÉGIONAUX

Première composition (Durée : 5 heures).

On se propose d'étudier quelques propriétés de la transformation ponctuelle (T) définie de la façon suivante : A et B sont deux points fixes distincts à distance finie ; I est le milieu de AB. L'homologue d'un point M est le point M' du plan MAB tel que les angles (AM, AM') et (BM, BM') soient tous deux droits.

N.-B. — *Les candidats doivent s'efforcer de donner dans tous les cas des solutions relevant de la géométrie élémentaire.*

I. Géométrie plane. — *Dans un plan passant par* AB :

1° Le transformé M' de M par (T) est-il toujours bien déterminé ? Peut-il être rejeté à l'infini ? Qu'arrive-t-il si M s'éloigne indéfiniment ? (T) admet-elle des points doubles ?

Distinguer les cas où M et M' sont, ou non, du même côté de AB.

m et m' étant les projections orthogonales de M et M' sur AB, démontrer que :

$$\overline{mM}.\overline{m'M'} = \overline{mA}.\overline{mB} = \overline{m'A}.\overline{m'B} = -\overline{Am}.\overline{Am'} = -\overline{Bm}.\overline{Bm'}.$$

2° Lieu de M' et enveloppe de MM' quand M décrit un cercle passant par A et B.

3° Lieu de M' et enveloppe de MM' quand M décrit :

a. une droite perpendiculaire à AB ;

b. une droite passant par un, et un seul, des deux points A et B.

4° Lieu (C) de M' quand M décrit une droite (D) parallèle à AB. (D) étant donnée, construire géométriquement les tangentes en A et B à (C) ainsi que les éléments remarquables de ce lieu.

Lieu de M' quand M décrit une parabole passant par A et B, dont l'axe est perpendiculaire à AB.

5° Lieu de M' quand M décrit une droite (Δ) passant par I.

Lieu de M' quand M décrit une hyperbole passant par A et B, de centre I, et ayant pour asymptote la médiatrice de AB.

6° Lieu (L') de M' quand M décrit une conique (L), ellipse ou hyperbole, admettant A et B pour sommets de l'axe focal. (L') comprend une conique (Λ) : comparer les natures de (L) et (Λ).

Démontrer que, M et M' décrivant respectivement (L) et (Λ), $\overline{mM}$ et $\overline{m'M'}$ varient proportionnellement.

Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que (L) et (Λ) soient confondues ; démontrer que l'enveloppe de MM' est alors un point fixe, à distance finie ou infinie.

II. Géométrie dans l'espace. — 1° Le transformé M' de M par (T) est-il toujours bien déterminé ? Peut-il être rejeté à l'infini ? Qu'arrive-t-il si M s'éloigne indéfiniment ? (T) admet-elle des points doubles ?

2° Lieu de M' quand M décrit un cercle ou une droite d'un plan perpendiculaire à AB.

3° Lieu de M' quand M décrit un plan passant par un, et un seul, des deux points A et B.

4° Lieu de M' quand M décrit une sphère (ω) passant par A et B. M décrivant maintenant un cercle (γ) de (ω) passant par un, et un seul, des deux points A et B, quelle condition doit remplir (ω) pour que les points M' transformés des points M de (γ) autres que A (ou B) soient aussi sur un même cercle ?

5° M décrivant un plan (P) parallèle à AB, M' décrit une surface (S). Montrer que (S) contient :

a. une famille de cercles situés dans des plans perpendiculaires à AB ;

b. une famille de paraboles situées dans des plans passant par AB. Quel est le lieu des sommets de ces paraboles ?

En déduire une génération géométrique simple de (S).

6° M décrivant un plan (Q) passant par I, ne contenant pas A et non perpendiculaire à AB, M' décrit une surface (Σ). Montrer que (Σ) contient :

a. une famille de cercles situés dans des plans perpendiculaires à AB ;

b. une famille d'hyperboles situées dans des plans passant par AB. Quels sont les lieux des asymptotes de ces hyperboles ?

En déduire une génération géométrique simple de (Σ).

Seconde composition (Durée : 5 heures).

Soit un carré ABCD de côté n entier positif. On le découpe en carrés de côtés tous égaux à l'unité à l'aide de droites parallèles aux côtés AB et AD.

Pour repérer les points du plan, on prend le sommet A pour origine, le support du côté AB comme axe des x, et celui du côté AD comme axe des y, le carré ABCD étant placé dans le premier quadrant.

Les quatre parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

I. — 1° Indiquer le nombre des sommets du quadrillage ainsi constitué. Calculer le nombre des segments obtenus en joignant de toutes les manières possibles deux sommets quelconques distincts M' et M'' du quadrillage.

2° On considère tous les carrés obtenus en choisissant parmi les droites du quadrillage, de toutes les manières possibles, deux parallèles à AB distinctes et deux parallèles à AD. Trouver le nombre de ces carrés. Calculer la valeur moyenne (moyenne arithmétique) de leur périmètre. Limite de cette valeur moyenne si l'on fait subir au carré ABCD une homothétie, de rapport $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire ramenant son côté à l'unité) et si l'on fait ensuite augmenter n indéfiniment.

3° Calculer le nombre des droites du plan, de pente finie, entière, positive et non nulle, passant par deux sommets au moins du quadrillage.

Ce nombre dépend de la parité de n ; donner son expression pour $n = 2p$, puis pour $n = 2p + 1$. Vérifier le résultat pour $n = 3$ et pour $n = 4$.

II. — On suppose dans toute cette seconde partie n pair, $n = 2p$.

Soit G le milieu de AB. On se propose de trouver un point P du plan tel que

$$PA^2 - PG^2 = h^2 \text{ et angle } APG = \alpha,$$

où les données h et α satisfont aux inégalités

$$h \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 0 < \alpha < \pi.$$

Le point P est pris uniquement dans la région des y positifs ; ce n'est pas forcément un sommet du quadrillage.

1° Construire géométriquement le triangle PAG ; discussion géométrique.

2° Former l'équation du second degré donnant l'ordonnée X du sommet P du triangle PAG. Retrouver ainsi les résultats de la discussion.

3° Comment faut-il choisir les données si l'on veut que P soit sur le contour du carré ABCD ?

Comment faut-il choisir les données si l'on veut trouver pour P deux solutions distinctes, toutes deux intérieures au carré ABCD ?

4° On donne $p = 16$ et $h^2 = 320$. De combien de manières peut-on choisir α pour obtenir deux points P distincts qui soient deux des sommets du quadrillage ?

III. — On ne suppose plus désormais que n soit pair.

Soit P (X, Y) un point quelconque du plan ; on joint P à un sommet M (x, y) du quadrillage et l'on admet que le carré de l'aire du triangle APM a pour valeur :

$$\frac{1}{4}(xY - yX)^2.$$

1° Evaluer la somme S des carrés des aires de tous les triangles obtenus lorsque, P restant fixe, on place successivement le point M en chacun des sommets du quadrillage.

2° On place ensuite le point P successivement en chacun des sommets du quadrillage. Calculer la somme S' de toutes les sommes S ainsi obtenues.

3° On considère tous les triangles AM'M" (effectifs ou non) obtenus en prenant pour M' et M" deux sommets distincts quelconques du quadrillage. Evaluer la valeur moyenne μ du carré de l'aire des triangles AM'M" ainsi obtenus.

4° On transforme le carré ABCD par une homothétie de rapport $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire ramenant son côté à l'unité). Que devient alors la valeur de μ ?

La nouvelle valeur μ' ainsi obtenue peut-elle être un nombre décimal ?

IV. — On relie A à un sommet quelconque M (x, y) du quadrillage à l'aide d'un contour polygonal dont tous les segments font partie du quadrillage et vérifient la propriété suivante : si l'on parcourt ce contour de A à M, l'abscisse et l'ordonnée ne vont jamais en décroissant.

1° Evaluer le nombre des contours reliant A et M. Retrouver ainsi la formule classique relative aux combinaisons :

$$C_p^q = C_{p-1}^q + C_{p-1}^{q-1}$$

En particulier, préciser le nombre des contours du type précédent reliant A et C.

2° On affecte chaque sommet M du quadrillage d'un coefficient égal au nombre des contours qui le relient au point A. Evaluer la somme des coefficients ainsi affectés aux sommets situés :

a. Sur une même parallèle à la diagonale BD, coupant le segment AB ;

b. A l'intérieur du triangle ABD, ou sur son contour ;

c. Sur une même parallèle à l'un des côtés du carré ;

d. A l'intérieur du carré ABCD ou sur son contour.

3° On désigne par Σ l'aire plane limitée par un contour du type précédent reliant A et C, ainsi que par AB et BC. Calculer la somme des aires Σ obtenues pour tous les contours possibles.

4° On considère le segment MM' du quadrillage qui joint les points M (x, y) et M' $(x + 1, y)$ $0 \leqslant x \leqslant n - 1$ et $0 \leqslant y \leqslant n$. Calculer le nombre Π_x^y des contours qui relient A et C en empruntant le segment MM'.

Evaluer les sommes

$$\Pi_x^0 + \Pi_x^1 + \Pi_x^2 + \ldots + \Pi_x^n,$$
$$\Pi_0^y + \Pi_1^y + \Pi_2^y + \ldots + \Pi_{n-1}^y,$$

on montrera qu'elles sont respectivement indépendantes de x et de y, et on indiquera quel lien présente cette seconde somme avec la question du paragraphe 3° précédent.

V. CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

École Normale Supérieure de garçons (rue d'Ulm)*
(Groupe I)

Première composition.

On donne une fois pour toutes un trièdre trirectangle direct $Oxyz$ et un nombre $h > 0$. On appellera L la droite à l'infini du plan xOy.

A toute droite réelle D de l'espace, ne rencontrant pas L, on associe biunivoquement un couple ordonné de points a et a' du plan xOy de la façon suivante : les traces de D sur les plans $z = -h$ et $z = h$ se projettent respectivement en a_0 et a'_0 sur xOy ; a et a' sont obtenus respectivement à partir de a_0 et a'_0 en effectuant la rotation ayant pour angle $\frac{\pi}{2}$ et pour centre la trace de D sur xOy ; les points a et a' sont appelés respectivement image gauche et image droite de D.

I. — 1° Calculer les coordonnées x, y et x', y' des images a et a' de la droite D représentée par les équations : $x = \lambda z + p$, $y = \mu z + q$.

Montrer que, pour que deux droites ne rencontrant pas L soient coplanaires, il faut et il suffit que la distance de leurs images gauches soit égale à la distance de leurs images droites.

2° Etudier les droites D de l'espace ayant une image gauche donnée a ; on caractérisera ces droites par le fait qu'elles rencontrent deux droites imaginaires ne dépendant que de a, passant par deux points imaginaires fixes I et I' à l'infini et situées dans deux plans imaginaires fixes Π et Π'.

Les droites D ayant une image gauche donnée a et coplanaires à une droite fixe Δ d'images α et α' engendrent une quadrique réglée Q ; déterminer les lieux des images des deux systèmes de génératrices de Q, ainsi que les images du diamètre conjugué du plan xOy par rapport à Q ; caractériser les quadriques Q ainsi obtenues à l'aide des points I et I' et des plans Π et Π'.

3° La droite D passe par le point réel fixe M_0 à distance finie ; montrer que les images a et a' de D sont homologues dans une rotation du plan xOy dont on déterminera le centre et l'angle à l'aide des coordonnées de M_0 ; étudier la réciproque ; examiner le cas où M_0 est à l'infini, mais non sur L (a et a' sont alors homologues dans une translation du plan xOy).

II. — On a fait correspondre biunivoquement à tout déplacement (rotation ou translation) du plan xOy un point réel de l'espace, non situé sur L ; les déplacements associés aux points A, M... seront notés $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$... ; le déplacement « produit » des déplacements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$, obtenu en effectuant *d'abord* $\mathcal{A}$, puis $\mathcal{M}$, sera noté $\mathcal{MA}$.

1° On donne deux points M_1 et M_2 à distance finie, dont les cotes z_1 et z_2 ne sont pas opposées ; on désigne par M_3 le point représentatif de la rotation produit $\mathcal{M}_2\,\mathcal{M}_1$. Calculer les coordonnées de M_3 en fonction de celles de M_1 et M_2 (à cet effet il pourra être commode d'observer que la projection de M_3 sur le plan xOy est l'image gauche de la droite $M_1M'_2$, M'_2 étant le point symétrique de M_2 par rapport à xOy).

En utilisant les coordonnées homogènes, transformer les formules obtenues de façon à en obtenir d'autres qui soient valables, même si certains points M_i sont à l'infini, les déplacements correspondants étant alors des translations.

(*) Ces textes nous ont été obligeamment communiqués par la Librairie Vuibert ; nous l'en remercions (N.D.L.R.).

2° Un point réel A étant donné dans l'espace, non sur L, on appelle T_A la transformation ponctuelle qui, à tout point réel M non sur L, fait correspondre le point M' représentant le produit $\mathcal{MA}$; on appelle T_A^* la transformation qui fait correspondre à M le produit $\mathcal{AM}$.

Ecrire les formules définissant les transformations T_A et T_A^* en coordonnées homogènes.

Montrer que le produit des transformations T_A et T_B^* est indépendant de l'ordre dans lequel il est effectué ; on le désignera par T_A^B ; montrer que le produit de deux transformations T_A^B est une transformation de même nature.

Déterminer la figure transformée par T_A^B de la droite d'images a et a'.

3° Etant donnés un point réel M à distance finie, de cote z, et une droite D ne rencontrant pas L, on appellera *quasi-distance* de M à D le nombre $\frac{d}{\sqrt{1+\frac{z^2}{h^2}}}$, où d est la distance de M au point de D ayant la cote z. On appelle quasi-distance de M au plan réel P ne contenant pas L le minimum de la quasi-distance de M aux droites situées dans P.

Calculer la quasi-distance de M (x_0, y_0, z_0) au plan d'équation

$$ux + vy + wz + s = 0$$

(u et v non tous nuls) ; déterminer le lieu des points situés à une quasi-distance donnée d'un plan donné, et l'enveloppe des plans situés à une quasi-distance donnée d'un point donné.

Calculer la quasi-distance de M (x_0, y_0, z_0) à la droite D d'images a et a' données ; montrer que le lieu des points situés à une quasi-distance donnée d'une droite donnée est une quadrique Q considérée en I, 2° ; examiner la réciproque.

Montrer que la quasi-distance d'un point à une droite ou un plan est invariante par les transformations T_A^B ; en déduire que les quadriques Q considérées en I, 2° sont invariantes par une infinité de transformations T_A^B.

III. — On se propose d'étudier le lieu des images des génératrices d'une quadrique réglée sans point double et ne contenant pas L.

1° La quadrique est symétrique par rapport au plan xOy ; montrer que les images a et a' des génératrices d'un système décrivent en général deux coniques homofocales ; préciser la correspondance entre a et a' ; examiner le cas où la quadrique passe par I et I' ou est tangente à II et II' (voir I, 2°).

2° Examiner le cas général en observant qu'on peut transformer la quadrique donnée en une quadrique symétrique par rapport au plan xOy à l'aide d'une transformation T_A^B convenablement choisie.

Deuxième composition.

N.-B. — Les quantités qui interviennent dans le problème (constantes, variables, fonctions) sont supposées réelles.

Il est recommandé aux candidats de traiter d'abord la partie I ; cependant la partie II peut être traitée presque entièrement d'une manière indépendante de I.

I. — 1° On pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\, dt$, où n est un entier positif ou nul. Montrer que I_n décroît, si n croît. Etablir, par une intégration par parties, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} et en tirer la valeur de I_n. Trouver la limite, quand n augmente indéfiniment de $nI_n\, I_{n-1}$ et en déduire celle de nI^2_n.

Montrer que l'on a aussi :

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{n+3}{2}}}.$$

2° Démontrer, pour $|t| \leqslant \sqrt{n}$, l'inégalité :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$$

et pour t quelconque, l'inégalité :

$$e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

Déduire de ces inégalités et des résultats de 1° la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt.$$

II. — 1° On considère l'équation différentielle :

(E) $$v'' - 2uv' - av = 0,$$

où a est un coefficient numérique fixe donné et v une fonction de la variable u. Montrer que (E) admet des solutions développables en série entière en u. Parmi ces solutions, on établira en particulier l'existence d'une solution $v = f(u)$, fonction impaire de u [$f(u) = -f(-u)$] telle que $f'(0) = 1$ et d'une solution $v = g(u)$, fonction paire de u [$g(u) = g(-u)$], telle que $g(0) = 1$. Quel est l'intervalle de convergence de toutes les solutions développables en série entière ?

On considère la fonction $v = w(u)f(u)$ et on cherche à déterminer $w(u)$ de sorte que v soit solution de (E). Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $w(u)$; en déduire que, si $f(u)$ est connu, toutes les solutions de (E) s'obtiennent par des quadratures ; en conclure aussi que *toutes* les solutions de (E) sont développables en série entière en u.

Dans le cas particulier $a = 4$, montrer que $f(u)$ est une fonction simple. Donner, par la méthode précédente, une expression de $g(u)$ faisant intervenir une intégrale.

2° On pose $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{y}{x}$. Soit (F) l'équation différentielle linéaire du second ordre pour la fonction inconnue y de la variable x, lorsque v est lié à u par l'équation (E). Montrer que les courbes représentatives des fonctions y, solutions de (F), ont des asymptotes lorsque x augmente indéfiniment.

En admettant provisoirement l'hypothèse que (F) possède des solutions indéfiniment dérivables pour $x = 0$, quelles sont les valeurs possibles des dérivées successives, pour $x = 0$, d'une même solution de (F) ? L'équation (F) peut-elle posséder des solutions développables en série entière en x ?

3° Dans la suite du problème, on suppose $a = 4$. Déduire de la solution $v = f(u)$ de (E) une solution particulière de (F). Puis, en appliquant une méthode analogue à celle de la fin de II, 1°, déterminer toutes les solutions de (F) sous la forme d'intégrales. Quelles sont celles de ces solutions qui restent bornées quand x tend vers 0 ?

4° Soit $y = \varphi(x)$ la solution de (F) qui reste bornée quand x tend vers 0, et qui est telle que $e^{-\frac{1}{x^2}}\varphi(x)$ ait pour dérivée $e^{-\frac{1}{x^2}}$. On se propose de montrer que $\varphi(x)$ est continue et possède des dérivées de tous les ordres pour $x = 0$. En admettant provisoirement qu'il en soit ainsi, montrer que l'on a nécessairement :

$$\varphi(0) = 0. \qquad \varphi'(0) = 0. \qquad \varphi^{(2n)}(0) = 0 \text{ pour } n \geqslant 1,$$

et calculer, pour $n \geqslant 2$, la valeur a_{2n+1} de $\varphi^{(2n+1)}(0)$ en fonction de la valeur a_3 de $\varphi^{(3)}(0)$ supposée non nulle.

Les nombres a_{2n+1} étant maintenant définis en fonction de a_3 par les expressions précédentes, on considère la fonction :

$$\varphi_{2n+1}(x) = \varphi(x) - \frac{\beta}{a_3} \sum_{h=1}^{n} a_{2h+1} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

pour $n \geqslant 1$; calculer, pour $x \neq 0$, la dérivée de :

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \varphi_{2n+1}(x) ;$$

en déduire que $(-1)^n \varphi_{2n+1}(x)/x^{2n+1}$ est > 0 et reste borné quand x tend vers 0. Montrer ensuite que, pour chaque entier $k \leqslant \frac{2n}{3}$, la valeur absolue de la fonction :

$$\frac{1}{x^{2n+1-3k}} \frac{d^k}{dx^k} \varphi_{2n+1}(x)$$

reste bornée quand x tend vers 0, et que φ_{2n+1} est continu et possède des dérivées d'ordre $k \leqslant \frac{2n}{3}$ pour $x = 0$. Montrer enfin que $\varphi(x)$ est continue et possède des dérivées de tous les ordres pour $x = 0$; en déduire la valeur a_{2n+1} de $\varphi^{(2n+1)}(0)$.

5° Etudier les variations de la fonction $y = \varphi(x)$ et déterminer ses asymptotes.

Epreuve pratique de Mathématiques.

Axes de coordonnées. — Les données, en centimètres, sont rapportées à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

L'axe Oy est parallèle au bord inférieur de la feuille et à 20 de ce bord. Il est orienté positivement vers la droite.

Le plan xOy est le plan horizontal de projection.

Le plan yOz est le plan frontal de projection.

Le plan xOz est de profil et à 14 du bord gauche.

L'axe Ox est orienté positivement vers le bas et l'axe Oz vers le haut.

Données. — Un *cône de révolution* a pour sommet A :

$$x = 4 ; \quad y = -3\sqrt{2} ; \quad z = 4.$$

Son axe frontal fait 45° avec le plan horizontal et sur cet axe les cotes croissent de gauche à droite.

Le cône admet une génératrice verticale.

Un *cylindre parabolique* passe par la parabole du plan horizontal de projection définie par son sommet B :

$$x = 2{,}5 ; \quad y = 4 ; \quad z = 0 ;$$

et par son foyer F :

$$x = 5{,}5 ; \quad y = 4 ; \quad z = 0.$$

Les génératrices du cylindre ont pour paramètres directeurs :

$$0 ; \quad 1 ; \quad -1.$$

Questions. — 1° Déterminer les projections — horizontale et frontale — de l'intersection (C) du cône et du cylindre. Point courant et tangente. Eléments remarquables.

2° En tournant autour de la verticale (Δ) d'équations :

$$x = 10 ; \quad y = 0,$$

la courbe (C) engendre une zone (S) de révolution. Déterminer (S).

3° Représenter la portion de la zone (S) — mince et opaque — qui est extérieure au cône.

4° Indiquer, dans une notice rédigée sur la partie droite de la feuille, les particularités rencontrées dans l'exécution de l'épure et les méthodes employées pour les résoudre. On pourra mettre quelques lettres sur l'épure pour faciliter les explications.

École Normale Supérieure de jeunes filles (groupe I)

Première composition.

L'espace est rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Par droite ou plan horizontal, on entendra une droite ou un plan parallèle au plan xOy ; par coefficient angulaire d'une droite horizontale, le coefficient angulaire de sa projection sur le plan xOy.

On dira que deux droites se rencontrent si elles ont un point commun, à distance finie ou non.

Dans tout le problème, la lettre D désignera une droite variable, à distance finie et non horizontale, repérée par les équations

(D) $$x = az + p, \quad y = bz + q ;$$

a, b, p, q seront appelés coordonnées de D.

Tous les éléments considérés dans le problème peuvent être réels ou imaginaires.

I. — 1° On suppose que la droite variable D rencontre une droite fixe L, horizontale ou située à l'infini ; quelle relation y a-t-il alors entre les coordonnées a, b, p, q de D ?

Inversement, on suppose a, b, p, q liés par une relation linéaire :

(1) $$\alpha a + \beta b + \gamma p + \delta q + \varepsilon = 0 ;$$

Comment faut-il choisir les coefficients α, β, γ, δ, ε pour que la relation (1) exprime la rencontre de D et d'une droite fixe L, horizontale ou rejetée à l'infini ?

On considère la famille des droites D dont les coordonnées a, b, p, q vérifient deux relations linéaires telles que (1) ; montrer qu'en général cette famille se compose exactement des droites D qui rencontrent deux droites fixes L, L', horizontales ou rejetées à l'infini.

2° On donne une droite fixe L horizontale ou située à l'infini ; on considère la famille des droites D qui rencontrent L et dont les coordonnées a, b, p, q vérifient la relation.

(2) $$q = a.$$

En général ces droites D rencontrent une autre droite fixe L'. Former les équations de L' à partir des équations de L ; comment faut-il choisir L pour que L' soit à distance finie ?

Lorsque les droites L et L' sont à distance finie, comparer leurs cotes et leurs coefficients angulaires ; que peut-on dire de leur perpendiculaire commune ? En particulier, déterminer L' lorsque L est une horizontale isotrope rencontrant Oz.

Lorsque L est à l'infini et L' à distance finie, on mène par le point de coordonnées 1, 0, 0, la perpendiculaire l aux plans passant par L ; comparer les traces de L' et l sur le plan yOz.

3° Soient S et S' les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique Σ ; montrer qu'en général S contient deux génératrices, et deux seulement, dont les coordonnées vérifient (2), et que, si S en contient plus de deux, toutes les génératrices de S ont des coordonnées vérifiant (2).

Cas particulier où Σ est de révolution autour de Oz : lorsque S contient seulement deux génératices dont les coordonnées vérifient (2), quelle relation y a-t-il entre ces deux génératrices ? Lorsque toutes les génératrices de S ont des coordonnées vérifiant (2), quelle est la quadrique Σ, combien y a-t-il de génératrices de S' dont les coordonnées vérifient (2), et quelles sont ces génératrices ?

Cas particulier où Σ est un paraboloïde : soit II le plan directeur auquel sont parallèles les génératrices de S ; en supposant II donné et non parallèle à Ox, montrer que, pour que toutes les génératrices de S aient des coordonnées vérifiant (2),

il faut et il suffit que Σ contienne une certaine droite que l'on construira à partir de Π ; quelle est cette droite lorsque Π est le plan yOz ?

II. — Soit Δ la droite fixe qui a pour équations

$$(\Delta) \qquad x = 1, \quad y = z.$$

Dans *toute* la suite du problème, Q sera une quadrique variable, de révolution autour de Oz, non décomposée en plans horizontaux, et D sera la droite conjuguée de Δ par rapport à Q.

1° Q et D étant ainsi définies, montrer qu'il y a correspondance biunivoque entre les quadriques Q et les droites D dont les coordonnées a, b, p, q vérifient (2) ; écrire l'équation de Q en fonction de a, b, p.

Quelle particularité la droite D présente-t-elle lorsque Q est un cône ? Un cylindre ? Un paraboloïde ? Une sphère ? Lorsque Q contient un cercle donné d'axe Oz ?

2° D et D′ étant conjuguées de Δ par rapport à Q et Q′, montrer que, pour que Q et Q′ soient inscrites l'une à l'autre le long d'un cercle d'axe Oz, il faut et il suffit que D et D′ se rencontrent.

Connaissant le cercle de contact des quadriques Q et Q′ et leur cône circonscrit commun le long de ce cercle, construire le plan des droites D, D′ et le point commun à ces droites.

Comparer entre elles les conjuguées de Δ par rapport aux diverses quadriques Q qui ont un même cône asymptote.

3° On donne une quadrique Σ de révolution autour de Oz, coupant Oz aux points de cotes $\pm i$; un système de génératrices, soit S, est formé des conjuguées de Δ par rapport à des quadriques Q dont on demande l'enveloppe.

On donne un paraboloïde Σ, contenant Ox et admettant le plan yOz comme plan directeur ; un système de génératrices, soit S, est formé des conjuguées de Δ par rapport à des quadriques Q dont on demande l'enveloppe. Quelle relation y a-t-il entre les deux parties de cette enveloppe ? Que deviennent-elles lorsque Σ admet aussi le plan xOy comme plan directeur ?

III. — 1° On donne deux quadriques Q_1, Q_2 de révolution autour de Oz, non décomposées en plans horizontaux ; on considère les quadriques Q inscrites (ou circonscrites) à Q_1 le long d'un cercle d'axe Oz, à Q_2 le long d'un autre cercle d'axe Oz. Montrer que les plans de ces deux cercles sont en correspondance involutive.

En déduire le lieu des conjuguées de Δ par rapport aux quadriques Q considérées dans cette question ; comment faut-il choisir Q_1 et Q_2 pour que ce lieu soit un paraboloïde ?

2° On donne deux points P, P′, à distance finie ou non ; on considère les quadriques Q admettant P et P′ comme points conjugués. Montrer qu'en général les conjuguées de Δ par rapport à ces quadriques Q rencontrent deux droites fixes L, L′, horizontales ou rejetées à l'infini.

Connaissant les coordonnées des points P, P′, supposés à distance finie, déterminer les cotes et les coefficients angulaires de L et L′.

3° On donne deux points P, P′, à distance finie ou non, et une quadrique Q_1 de révolution autour de Oz, non décomposée en plans horizontaux ; on considère les quadriques Q admettant P et P′ comme points conjugués et inscrites (ou circonscrites) à Q_1 le long d'un cercle d'axe Oz. Montrer qu'en général ces quadriques Q enveloppent une autre quadrique fixe Q_2.

Connaissant les coordonnées des points P, P′, supposés à distance finie, former l'équation de Q_2 à partir de l'équation de Q_1. En particulier, enveloppe des cônes de révolution autour de Oz qui admettent P et P′ comme points conjugués.

Dans quel cas la quadrique Q_2 est-elle confondue avec Q_1 ?

Deuxième composition.

On considère l'équation différentielle (E)

$$y' = \cos xy$$

où x est une variable réelle et y une fonction réelle inconnue. On admettra que, quel que soit le couple (x_0, y_0) de nombres réels, il existe une solution et une seule de l'équation (E) prenant la valeur y_0 pour la valeur x_0 de la variable. On désignera par f la solution de (E) nulle pour la valeur 0 de la variable. On identifiera le couple (x, y) de nombres réels au point du plan d'abscisse x et d'ordonnée y dans un système d'axes orthogonaux avec même unité sur les deux axes. Les courbes intégrales de (E) sont les courbes représentant dans le plan les fonctions solutions de (E). On désignera par L la courbe représentative de la fonction f.

I. — 1° Lieu des points où les courbes intégrales ont une pente donnée ? Régions du plan où les courbes intégrales ont une pente positive ? Négative ? Lieu des points (x, y) tels que la solution prenant en x la valeur y possède en ce point un maximum ? Un minimum ?

2° Lieu des points d'inflexion des courbes intégrales ? Régions du plan où les courbes intégrales ont une pente croissante avec x ? Décroissante avec x ?

On notera $C(k)$ le lieu des points tels que $x \geqslant 0$, $xy = k$; Γ la portion, ne comprenant pas $C(\pi)$, du lieu des points d'inflexion des courbes intégrales comprise entre $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $C\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. On dessinera sur une même figure les courbes $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $C\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ et Γ.

3° Au voisinage d'un point de l'une de ces quatre courbes, quelle est l'allure de la courbe intégrale passant par ce point ?

II. — 1° Une courbe intégrale ne peut couper $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qu'en un point au plus.

2° Une courbe intégrale coupant $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en un point (x, y) tel que $x \geqslant y$ ne peut couper $C(\pi)$.

3° Montrer que L coupe $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en un point (X, Y). Prouver que $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$; que f a en X un maximum absolu égal à Y ; que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

4° Etudier le sens de concavité de L et ses intersections avec Γ.

III. — On se propose de calculer approximativement le nombre Y.

1° Quel que soit u réel, on a les inégalités :

$$(a) \qquad \cos u \geqslant 1 - \frac{u^2}{2};$$

$$(b) \qquad \cos u \leqslant 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}.$$

Généralisation ?

2° En utilisant l'inégalité (a) et l'inégalité $f(x) \leqslant x$ démontrée au II, 3°, prouver pour $x \geqslant 0$ une inégalité (c) de la forme $f(x) \geqslant x - \alpha x^5$ où α est une certaine constante.

3° En utilisant les inégalités (b) et (c), prouver une inégalité (d) de la forme

$$f(x) \leqslant x - \alpha x^5 + \beta x^9$$

où β est une certaine constante, cette inégalité étant valable pour x positif assez petit, ce qu'on précisera convenablement..

4° Variation et courbes représentatives des fonctions

$$c(x) = x - \alpha x^5 \text{ et } d(x) = x - \alpha x^5 + \beta x^9.$$

On montrera en particulier que la courbe représentant la fonction d possède un point d'inflexion d'abscisse positive, et un seul.

5° Prouver que la tangente d'inflexion en ce point à cette courbe est au-dessus de L pour x positif.

6° Calculer à 0,1 près les coordonnées du point d'intersection de cette tangente d'inflexion avec $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

7° Déduire de tout cela une borne inférieure et une borne supérieure de Y.

N.-B. — On a $\pi = 3{,}14$ à 0,01 près ; l'usage de tables numériques ou de règles à calcul est superflu.

Epreuve pratique de Mathématiques : même énoncé que pour l'E.N.S. de la rue d'Ulm.

Écoles Normales Supérieures (rue d'Ulm et boulevard Jourdan)

(groupes II et II bis)

N.-B. — *La partie III de ce problème ne figurait pas dans le texte destiné aux candidats du groupe II.*

1. — Dans l'espace rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, un point M varie avec le temps t ; ses coordonnées x, y, z vérifient les relations :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2} - y \ , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{2} + x \ , \quad \frac{dz}{dt} = \frac{z}{2} \ .$$

Former et intégrer deux équations différentielles du premier ordre vérifiées respectivement par les fonctions du temps $x + iy$ et $x - iy$. En déduire les valeurs de x, y, et z déterminées par (1) en fonction de t et de trois constantes d'intégration, qu'on calculera en fonction du paramètre réel u, sachant qu'à l'instant $t = 0$ on a :

$$\overrightarrow{OM}^2 = 4e^u, \quad (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6}, \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}) = -u,$$

où m est la projection de M sur le plan xOy.

2. On désigne par $C(u)$ la courbe décrite par M lorsque t prend toutes les valeurs réelles, u restant fixe. Comparer entre elles les courbes $C(u + k\pi)$ où k prend toutes les valeurs entières, u restant fixe.

Soit S la surface engendrée par l'ensemble des $C(u)$ lorsque u prend toutes les valeurs réelles. Montrer que S est une partie, qu'on précisera, d'une quadrique dont on formera l'équation cartésienne.

3. On désigne par $\Gamma(t)$ le lieu des points atteints par M à l'instant t fixe lorsque u prend toutes les valeurs réelles. Montrer qu'en un point M_0 quelconque de S ne passent qu'une courbe $C(u)$ et une courbe $\Gamma(t)$, que leurs tangentes en M_0 se coupent à angle droit, et font avec Oz un angle indépendant de M_0.

II. — Dans la partie II, M est assujetti à rester sur S, mais non pas sur une des courbes trouvées dans la partie I.

1. Soient ρ la distance à O de la projection m de M sur xOy et θ l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$. On suppose que ρ et θ sont des fonctions d'un même paramètre, munies

de dérivées continues. Soit ds la différentielle de l'arc de la courbe que M décrit alors sur S. Exprimer ds^2 en fonction de ρ, θ et des différentielles $d\rho$, $d\theta$.

2. On cherche à mettre l'expression précédente de ds^2 d'une infinité de manières sous la forme :

$$df^2 + [a(\rho, \theta)d\rho + b(\rho, \theta)d\theta]^2$$

où f est une fonction de ρ et de θ de la forme $f(\rho, \theta) = \rho\varphi(\theta)$, φ étant une fonction dérivable de la seule variable θ, et où a et b sont des fonctions associées à f et qui peuvent dépendre de ρ et de θ. Montrer que φ doit vérifier l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad 4\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 + \varphi^2 = 4.$$

3. Intégrer cette équation différentielle. Elle possède une infinité de solutions φ_α, fonctions de θ dépendant d'une constante d'intégration α, et en outre deux solutions exceptionnelles qui n'entrent pas dans cette catégorie.

En fixant la valeur de α, on choisit une intégrale non exceptionnelle $\varphi_\alpha(\theta)$ et on pose $f_\alpha(\rho, \theta) = \rho\varphi_\alpha(\theta)$. Déterminer les fonctions $a_\alpha(\rho, \theta)$ et $b_\alpha(\rho, \theta)$ associées à f_α ; montrer que :

$$a_\alpha(\rho, \theta)d\rho + b_\alpha(\rho, \theta)d\theta$$

est la différentielle totale d'une fonction g_α de ρ et de θ qu'on déterminera.

4. On désigne par $D_\alpha(\lambda)$ et $\Delta_\alpha(\mu)$ les lieux de M définis sur S respectivement par $f_\alpha(\rho, \theta) = \lambda$ et $g_\alpha(\rho, \theta) = \mu$ où λ et μ sont des constantes pouvant prendre toutes les valeurs réelles. Montrer que par un point M_0 quelconque de S ne passent, pour α donné, qu'une courbe $D_\alpha(\lambda)$ et une courbe $\Delta_\alpha(\mu)$, et que leurs tangentes en M_0 se coupent à angle droit.

5. α et μ étant fixes, on suppose que M décrit $\Delta_\alpha(\mu)$ d'un mouvement où la vitesse garde une longueur constante. Que peut-on dire de son vecteur accélération ?

6. α et λ étant fixes, on suppose que M décrit $D_\alpha(\lambda)$ et on envisage les points M' et M" situés, pour chaque position de M, sur la même courbe $\Delta_\alpha(\mu)$ que M, les arcs MM' et MM" de $\Delta_\alpha(\mu)$ étant de sens contraires et de longueurs égales et indépendantes de μ. Lieu des points M' et M" ?

7. Lorsqu'on prend pour φ l'une des deux solutions exceptionnelles de (E), comment peut-on définir des courbes $D(\lambda)$ et $\Delta(\mu)$ possédant des propriétés analogues à celles établies pour $D_\alpha(\lambda)$ et $D_\alpha(\mu)$ dans les questions II-4, II-5 et II-6 ?

III. — Dans cette partie du problème, on désignera le temps par τ.

On considère dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ot, Ou, un point P de masse un, se déplaçant sous l'action exclusive d'un champ de forces dépendant de la fonction de forces :

$$U(t, u) = e^{t+u}.$$

Parmi toutes les trajectoires possibles pour P, on considère seulement celles pour lesquelles le point P passe en O avec une vitesse d'intensité $\sqrt{2}$ et celles qui correspondent à la même valeur de la constante des forces vives que les précédentes.

1. Déterminer les mouvements correspondants. Comparer ces trajectoires entre elles.

2. Quel lien ont ces trajectoires avec les courbes $\Delta^\alpha(\mu)$ de la partie II ?

N.-B. — La partie III, sauf par sa question 2, est indépendante du reste du problème.

St-Cloud et Fontenay -- option Mathématiques

Première composition.

1. Calculer la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{vmatrix}$$

et vérifier qu'elle est indépendante de θ.

2. Soit (S) le système de trois équations linéaires où les inconnues sont u, v, w :

$$(S)\begin{cases} u\cos\theta + v\sin\theta + w = 2\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} \\ u\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)+v\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)+w=2\varepsilon_1\sin\left(\dfrac{\theta-\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right) \\ u\cos\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)+v\sin\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)+w=2\varepsilon_2\sin\left(\dfrac{\theta-\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

θ et α sont deux angles donnés ; ε_1 et ε_2 peuvent prendre, indépendamment, les valeurs $+1$ et -1.

a. Montrer que les cas où ε_1 et ε_2 ont des signes contraires peuvent se ramener au cas $\varepsilon_1=\varepsilon_2=+1$ en changeant θ en $\theta+\frac{2\pi}{3}2\pi$ ou θ en $\theta-\frac{2\pi}{3}$.

b. Résoudre le système (S) pour $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-1$.

Montrer que u, v, w s'expriment au moyen des seules fonctions trigonométriques de l'angle $\frac{3\theta-\alpha}{2}$.

3. Ox et Oy étant deux axes rectangulaires, on donne le cercle (C) d'équation $x^2+y^2=R^2$ et, sur ce cercle, un point F défini par $(Ox, \overrightarrow{OF})=\alpha$.

Chercher l'équation générale des courbes du second ordre admettant F pour foyer et passant par les trois sommets d'un triangle équilatéral PQR inscrit dans (C) ; on désignera par θ l'angle $(Ox, \overrightarrow{OP})$ et par $ux+vy+wR=0$ l'équation de la directrice associée à F.

On obtient deux familles de coniques dépendant chacune des deux paramètres θ et α.

Montrer que l'une des familles, (H), est constituée par des hyperboles d'excentricité égale à 2, dont la directrice associée à F passe constamment par O. Achever la détermination de l'équation uniquement pour cette famille (H).

4. Etudier la famille (H) quand on fixe le triangle PQR. On prendra le point P sur Ox ($\theta=0$).

a. Trouver et construire le lieu des centres des hyperboles (H) quand α varie. Montrer qu'une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de O amène ce lieu en coïncidence avec lui-même.

b. Déterminer, quand α varie, les lieux des deux sommets, les enveloppes des tangentes en ces sommets, l'enveloppe de l'axe focal, et l'enveloppe des hyperboles (H).

On précisera la nature et la position géométrique des lieux et enveloppes demandés dans le § *b* et on pourra les étudier géométriquement.

Deuxième composition.

N.-B. — Les graphiques demandés seront tracés dans un système d'axes rectangulaires Ox Oy. Les parties I et II sont indépendantes.

I. — On considère l'équation différentielle (E) :

$$(E) \quad | \quad xyy'' - xy'^2 + yy' + y^2 = 0$$

dans laquelle x représente la variable, y une fonction inconnue de x, y' et y'' ses dérivées première et seconde.

1° Intégrer cette équation en posant $\frac{y'}{y} = t$, t étant une fonction à déterminer. Donner l'expression de l'intégrale générale y.

2° Soit (f) l'ensemble des courbes intégrales de l'équation (E) qui passent par le point A de coordonnées,

$$x = 1,$$
$$y = \frac{1}{e},$$

e représentant la base du système des logarithmes népériens. Montrer que la famille (F) des courbes intégrales de l'équation (E) se déduit simplement des courbes (f). Pouvait-on prévoir ce résultat avant l'intégration ?

3° Construire les courbes de la famille (f). Discuter leur forme et leur position relative. Trouver le lieu géométrique de leurs points où la tangente est parallèle à Ox et construire ce lieu.

Tracer avec soin l'ensemble des courbes (f) sur une même figure.

II. — 1° n étant un entier positif, vérifier que la fonction

$$y_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

est une intégrale particulière de l'équation (E).

Tracer la courbe représentant les variations de $y_n(x)$. Soit (C_n) cette courbe. Déterminer le maximum M_n de la fonction $y_n(x)$. Montrer que M_n décroît quand n croît.

Etudier la nature de la série de terme général

$$U_n = \text{Log } M_{n+1} - \text{Log } M_n$$

où le symbole Log désigne un logarithme népérien. En déduire la limite de M_n quand n croît indéfiniment.

2° La courbe (C_n) possède deux points d'inflexions I et I', dont les abscisses sont positives. Calculer leurs coordonnées x_1, y_1, $x_{1'}$, $y_{1'}$. Trouver les limites des rapports $\frac{y_1}{y_{1'}}$ et $\frac{M_n}{y_1}$ pour n infini.

3° Calculer l'aire (A_n) de la surface comprise entre (C_n), l'axe Ox et la parallèle à l'axe Oy d'abscisse $x_0 > 0$. Trouver la limite de (A_n) quand x_0 croît indéfiniment, n restant fixe, et la limite de (A_n) quand, x_0 restant fixe, n croît indéfiniment.

Les deux courbes (C_n) et (C_{n+1}) se coupent en un point H_n autre que O. Montrer que l'aire comprise entre (C_n) et (C_{n+1}), pour les valeurs de x supérieures à l'abscisse de H_n, est mesurée par un nombre fini et donner sa mesure.

Les trois courbes (C_{n-1}), (C_n), (C_{n+1}) se coupent en trois points F_n, G_n, H_n autres que O. Calculer l'aire (Ω_n) du triangle curviligne $F_nG_nH_n$ formé par ces trois courbes. Trouver la limite de (Ω_n) quand n croît indéfiniment.

Option sciences naturelles

1. Etudier les variations de la fonction $y = \frac{x}{e^x - 1}$ et tracer la courbe représentative (C).

Montrer que le signe de la dérivée seconde de y est celui de $x\left(\frac{x}{2} - th\frac{x}{2}\right)$ et préciser ce signe.

Donner une interprétation géométrique de la fonction y en considérant un point M qui décrit la courbe représentative de la fonction $y = e^x - 1$, et vérifier ainsi le sens de variation de y.

2. Démontrer qu'on peut trouver une constante m telle que y étant toujours la fonction $\frac{x}{e^x - 1}$ la différence $y - mx$ conserve la même valeur quand on change x en $-x$. Interpréter géométriquement ce résultat sur la courbe (C).

Calculer le développement limité jusqu'à l'ordre 6 de la fonction y au voisinage de $x = 0$.

3. Etudier les variations de la fonction

$$z = \text{Log } y = \text{Log } \frac{x}{e^x - 1}$$

où le symbole Log désigne un logarithme népérien et construire la courbe représentative (Γ).

Donner un infiniment grand équivalent à z quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

Montrer que le signe de la dérivée seconde de z est celui de $\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(sh\frac{x}{2}\right)^2\right]$ et préciser ce signe.

La différence $z - mx$ possède-t-elle, pour la même valeur de la constante m, la propriété de $y - mx$?

Calculer le développement limité jusqu'à l'ordre 4 de z au voisinage de $x = 0$.

4. y représentant toujours la fonction $\frac{x}{e^x - 1}$ donner, en faisant par exemple une intégration par parties de $\int \text{Log } y\, dx$, une expression de la différence $\left(\int y\, dx - \int \text{Log } y\, dx\right)$ où ne figurent que des fonctions élémentaires de x et de y.

En déduire l'aire comprise entre la courbe (C), la courbe (Γ), l'axe Oy et la droite d'équation $x = x_0$. Comparer cette aire à l'aire comprise entre (C), (Γ), l'axe Oy et la droite d'équation $x = -x_0$.

École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique

Section A_1 - Mathématiques.

Première question. — On considère l'intégrale :

$$\int_0^k t^{a-1} e^{-t}\, dt$$

dans laquelle a et k sont des nombres réels donnés.

Pour quelles valeurs de a cette intégrale a-t-elle une limite quand k tend vers $+\infty$?

On désigne cette limite, lorsqu'elle existe, par :

$$F(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

Trouver, par une intégration par parties, une relation simple entre $F(a)$ $F(a+1)$.

En déduire, lorsque a est égal à un nombre entier positif n, la valeur de $F(n)$.

2e question. — On considère l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{h^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad (\textit{équation 1})$$

Le nombre h désigne un paramètre réel qu'on supposera positif ou nul dans toute la suite du problème.

On pose : $y = x^h \times Y$.

Trouver l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction Y. Soit E cette équation.

Rechercher pour cette équation E une solution sous forme de développement en série entière :

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

On pourra traiter d'abord les cas simples de $h = 0$ et de $h = 1$, puis le cas général où h est un nombre positif quelconque.

On verra que dans chaque cas le coefficient a_0 est arbitraire. Pour déterminer complètement la série entière Y, on prendra pour a_0 les valeurs suivantes :

pour $h = 0$, $a_0 = 1$;

pour $h = 1$, $a_0 = \frac{1}{2}$;

pour h quelconque, $a_0 = \frac{1}{2^h \times F(h+1)}$,

[$F(h+1)$ désignant l'expression $F(a)$ de la première question où l'on a remplacé a par $h+1$].

On donnera dans chaque cas l'expression du terme général de la série Y et on vérifiera la convergence de cette série.

3e question. — Pour une valeur quelconque de h, on désigne par J_h la solution y de l'équation 1 qui correspond à la solution Y de l'équation E qu'on vient de déterminer sous forme de série entière.

Donner les développements en séries entières de J_0, de J_1 et d'une façon générale de J_n, n désignant un nombre entier positif.

Trouver une relation simple entre J_1 et la dérivée de J_0 par rapport à x.

4e question. — On prend l'équation 1 dans le cas particulier de $h = 0$. Soit H cette équation. On vient d'en déterminer une première solution qui est J_0. On se propose de trouver une autre solution non proportionnelle à J_0. On pose pour cela :

$$y = J_0 \operatorname{Log} x + v$$

(Log désignant le logarithme népérien).

Trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction v. En chercher une solution sous forme de série entière.

Choisir le coefficient indéterminé de cette série pour simplifier au maximum les autres coefficients.

Vérifier la convergence de la série obtenue.

5e question. — On transforme l'équation différentielle H en posant $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$

On obtient une équation différentielle K.

On considère d'autre part l'équation différentielle $u'' + u = 0$. (*équation L*).

On associe une solution z de l'équation K et une solution u de l'équation L de façon que les courbes intégrales correspondantes soient tangentes en un même point M_0 (de coordonnées x_0, y_0 non nulles). Démontrer que, pour x croissant ou décroissant à partir de x_0, la courbe intégrale de K est comprise entre l'axe des x et la courbe intégrale de L tant que u et z ne changent pas de signe.

En déduire que la fonction z a une infinité de zéros et donner une borne supérieure de l'intervalle entre deux zéros consécutifs.

Géométrie.

Les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ sont perpendiculaires. On donne le point fixe

$$A\ (x = a > 0,\ y = 0).$$

A tout point M du plan, on associe son inverse M′ dans l'inversion de pôle O et de puissance a^2.

I. — On suppose ici que le point M décrive la droite fixe D d'équation $y = x \operatorname{tg} \alpha$. On désigne par ω le centre du cercle circonscrit et par H l'orthocentre du triangle AMM′.

1° Calculer les coordonnées du point H en fonction de a, de α et de l'ordonnée (variable) λ du point ω.

2° Montrer analytiquement que le cercle circonscrit au triangle AωH passe par un deuxième point fixe S dont on calculera les coordonnées (en fonction de a et de α).

3° Géométriquement :

a. Indiquer, sans utiliser les résultats déjà obtenus, la nature de la correspondance qui relie les points ω et H (en préciser les éléments) ;

b. A quelle courbe la droite ωH reste-t-elle tangente ?

II. — A tout point M (x_0, y_0) du plan, on associe la droite Δ_M menée par M perpendiculairement à AM′.

1° *a.* Former l'équation de Δ_M en fonction de a, x_0, y_0.

b. Inversement, la droite Δ_M étant donnée, comment peut-on construire géométriquement un tel point M ? Discuter (analytiquement *ou* géométriquement) suivant la position de la projection orthogonale de O sur Δ_M.

2° On suppose à nouveau que le point M décrive la droite D d'équation $y = x \operatorname{tg} \alpha$.

a. Trouver analytiquement l'enveloppe (P_D) de la droite Δ_M; préciser les éléments géométriques qui caractérisent cette enveloppe.

b. Retrouver géométriquement cette enveloppe (P_D).

c. On suppose maintenant que la droite D pivote autour de O ; trouver analytiquement et géométriquement l'enveloppe de (P_D).

3° *a.* Trouver analytiquement et géométriquement l'enveloppe de la droite Δ_M quand M décrit un cercle de centre O.

b. Trouver analytiquement et construire l'enveloppe de Δ_M quand M décrit le cercle de centre A passant par O.

III. — Déterminer toutes les courbes telles qu'en chaque point M de l'une quelconque (C) d'entre elles, la droite Δ_M soit la tangente en M à (C). Donner l'allure générale de la courbe (C) particulière qui passe par le point $B\ (x = \frac{a}{2},\ y = 0)$, et en calculer le rayon de courbure en ce point B.

N.-B. — Les candidats sont priés de *numéroter visiblement* les pages de leur copie, dans l'ordre où elles doivent être lues.

Section A_2.

I. — Dans tout ce qui suit le symbole $\operatorname{Log} x$ désigne le logarithme népérien de x ; a désigne un nombre positif donné.

1° Suivant les valeurs de a, étudier les variations de z en fonction de x :

$$z = (a+x)\,\mathrm{Log}\,(a+x) + (a-x)\,\mathrm{Log}\,(a-x).$$

Courbes représentatives. Indiquer, suivant les valeurs de a, le nombre des racines de l'équation $z = 0$.

2° Etudier les variations de la fonction $y = \dfrac{\mathrm{Log}\left(\frac{3}{4}+x\right)}{\mathrm{Log}\left(\frac{3}{4}-x\right)}$. Préciser la tangente au point d'abscisse $x = \frac{3}{4}$ de la courbe représentative qu'on construira. Indiquer le nombre maximum des racines de l'équation $\mathrm{Log}\left(\frac{3}{4}+x\right) = \mathrm{K}\,\mathrm{Log}\left(\frac{3}{4}-x\right)$.

3° Calculer $\mathrm{I} = \int_0^x \mathrm{Log}\left(\frac{a+x}{a-x}\right).\,dx$.

II. — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$, la bissectrice Δ d'équation $y - x = 0$, le point A de coordonnées $x = 0$ et $y = 2R$, et le cercle (C) de diamètre OA.

Par un point M variable de Δ, extérieur au cercle (C), on mène les deux tangentes à (C) coupant $x'Ox$ en P et Q (S et T sont respectivement les points de contact).

1° Montrer que la droite ST passe par un point fixe I qu'on précisera et que P et Q restent toujours conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes qu'on indiquera.

2° Trouver la relation qui relie constamment les abscisses x' de P et x'' de Q. Montrer que le cercle circonscrit au triangle APQ passe par un deuxième point fixe ; lieu du centre.

3° Déterminer M pour que $PQ = l$ (l, longueur donnée).

4° On transforme la figure par l'inversion de pôle A et de puissance $4R^2$. Que peut-on dire de la droite qui joint les points P' et Q' transformés respectifs de P et Q, et des centres ω et ω' des cercles transformés des droites MS et MT ?

Section B.-Mathématiques.

I. *Questions préliminaires.* — 1° Résoudre le système :

$$a - b = 2ab,$$
$$a + b = -1.$$

Indiquer une résolution graphique de ce système.

2° Donner les développements limités jusqu'à l'ordre trois inclus des fonctions :

$$u = \sqrt{1+\alpha} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}$$

au voisinage de $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

II. *Problème.* — On considère les fonctions x et z de la variable x, définies par :

$$y = \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}\,e^x ; \qquad z = \sqrt{-\frac{x+a}{x+b}}\,e^x$$

a et b étant des paramètres ($a \neq b$).

1° a. Pour quelles valeurs de x la fonction y est-elle définie ?

b. Pour quelles valeurs de x la fonction z est-elle définie ?

2° a. Calculer la dérivée y' de y.

b. Calculer la dérivée z' de z.

3° On convient d'appeler $f(x)$ la fonction qui est égale à y lorsque y est définie et qui est égale à z lorsque z est définie.

Montrer que $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ sont définies pour toutes les valeurs de x sauf pour des valeurs exceptionnelles que l'on précisera.

4° Déterminer a et b pour que la dérivée $f'(x)$ soit nulle pour $x = 0$ et pour $x = 1$. Il y a deux fonctions qui répondent à ces conditions. On les désignera par $f_1(x)$ et $f_2(x)$, les notations étant choisies de manière que $f_1(0) < f_2(0)$.

Donner dans deux tableaux les expressions de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$.

5° Etudier les variations de $f_1(x)$ et tracer sa courbe représentative. On précisera les points de rencontre de la courbe avec les axes de coordonnées, les tangentes en ces points, les coordonnées des maxima et minima, les branches infinies.

6° Même question pour $f_2(x)$.

7° Donner le développement limité jusqu'à l'ordre trois inclus de la fonction $f_2(x)$ au voisinage de zéro.

Géométrie et géométrie analytique.

Le plan est rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires xOy et on considère les points A, B de l'axe $x'x$ d'abscisses respectives a, $2a$ $(a > 0)$ et la droite D médiatrice de OA. Soit $(\mathcal{C})$ la transformation produit (dans l'ordre indiqué) des trois transformations : symétrie par rapport à la droite D, inversion de pôle A et de puissance $4a^2$, translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

I. — 1° Montrer qu'il existe deux droites qui sont, chacune, globalement invariantes dans $(\mathcal{C})$. Déterminer le cercle (Γ) de centre O globalement invariant dans $(\mathcal{C})$.

2° Réduire la transformation $(\mathcal{C})$ au produit d'une inversion positive et d'une symétrie par rapport à une droite. En déduire qu'elle est réciproque. Un point M (x, y) ayant pour transformé le point M' $(x' y')$ calculer les coordonnées de l'un en fonction des coordonnées de l'autre et de a.

3° Trouver le lieu de M' lorsque M décrit un cercle (Ω) passant par O. Quelle est l'enveloppe de ce lieu si le centre de (Ω) décrit le cercle de diamètre OB. (Solution géométrique et analytique).

II. — On suppose maintenant que M décrit l'hyperbole équilatère de sommets O et B.

1° Construire le lieu (C) de M'. (On pourra écrire son équation sous la forme $y^2 = f(x)$ ou en chercher une représentation paramétrique).

2° La courbe (C) est tangente au cercle (Γ) en un point F et une sécante variable issue de F la coupe en deux points P, Q. Démontrer que OP et OQ sont perpendiculaires et que $\overline{FP}.\overline{FQ}$ reste constant. Quel est le lieu du milieu de PQ ?

3° Un point quelconque P de (C) est déterminé par l'angle $\varphi = (Ox, OP) + k\pi$. On lui associe le point P', situé aussi sur (C), défini par $(Ox, OP') = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Montrer que l'équation de la droite PP' s'exprime en fonction du paramètre $\sin 2\varphi$, et trouver son enveloppe quand P décrit (C).

N.-B. — On rappelle que les coordonnées XY du point inverse d'un point de coordonnées x, y, dans une inversion ayant pour pôle l'origine des coordonnées et pour puissance μ sont :

$$X = \frac{\mu x}{x^2 + y^2} \qquad Y = \frac{\mu y}{x^2 + y^2}$$

Géométrie descriptive.

Dimensions en millimètres.

Format 297 × 420, grande dimension horizontale.

Réserver à droite de la feuille une colonne verticale de 120 de largeur destinée à recevoir un texte succinct permettant de suivre les différentes phases de la construction de l'épure. La rédaction de ce texte est obligatoire.

Ligne de terre à 50 au-dessus du grand axe de la feuille. Placer sur la ligne de terre α et ε respectivement à 40 et 90 du bord gauche de la feuille.

Sur la ligne de rappel passant par α, placer les projections de A (cote 40, éloignement 20). Dans l'espace :

le point B est confondu avec la projection horizontale de A,
le point C est confondu avec la projection frontale de A,
le point D est symétrique de A par rapport à la ligne de terre.

Sur la ligne de rappel passant par ε, placer les projections de E (cote et éloignement nuls).

Le triangle BCE est une section plane d'une pyramide ayant pour sommet D, et dont la base est dans le plan perpendiculaire à AB et passant par A. Construire les projections et la vraie grandeur de cette base LMN (L sur DB, M sur DC, N sur DE).

Construire les projections du solide ayant pour bases BCE et LMN. Ponctuer.

Tracer le développement de la surface latérale de ce solide supposée fendue suivant BL.

Il est recommandé :

1° d'éviter de superposer les figures ;
2° de tracer les arêtes en trait interrompu court plutôt qu'en ponctué.

Section D.

I. — Etudier la fonction :

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{x}};$$

courbe représentative, tangentes aux points d'abscisses $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$, point d'inflexion.

On pose $x = \cos^2 a$, $0 \leqslant a < 2$ radians ; exprimer en fonction de a :

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \qquad \text{et } z = \frac{1 + 2\sqrt{x(1-x)}}{2x-1}.$$

Soit b tel que $\operatorname{tg} b = z$, $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$ radians ; exprimer l'angle b en fonction de l'angle a. (La relation est différente suivant que x est inférieur ou supérieur à $\frac{1}{2}$).

II. — On donne une droite (D), un point A sur (D), un point O n'appartenant pas à (D). Un angle droit pivote autour de son sommet O, ses côtés rencontrent (D) aux points variables M et M'.

Montrer que le cercle (C) passant par A et tangent en M à la droite OM et le cercle (C') passant par A et tangent en M' à la droite OM' sont orthogonaux (c'est-à-dire que leurs tangentes en A sont perpendiculaires).

Soit P le second point commun aux deux cercles (C) et (C') ; montrer que l'angle des droites (PM, PA) est égal à l'angle des droites (OM, D). En déduire une relation entre les angles des droites (PM, PM') et (OM, OM'). Interpréter cette relation.

Soit O' le symétrique de O par rapport à (D) ; montrer que l'angle des droites (PA, PO') est égal à l'angle des droites (D, OO'). En déduire le lieu de P. Donner une propriété remarquable de la droite joignant les centres des deux cercles (C) et (C').

III. — Il a été convenu que trois frères mangeraient des biscuits pour leur goûter. L'aîné rentre d'abord, donne un biscuit au chien, fait du reste trois parts égales, en prend une et s'en va. Le cadet rentre à son tour, donne un biscuit au chien et, ignorant que son frère est déjà passé, fait du reste trois parts égales, en prend une et sort. Le troisième, rentrant enfin, commence lui aussi par donner un gâteau au chien, et, comme ses frères, avec le reste, fait trois parts égales. Aucun biscuit n'a été fractionné. Quel était initialement le nombre des biscuits ? (On choisira le plus petit des nombres possibles).

Même question en supposant que le nombre des enfants est n, qu'ils rentrent l'un après l'autre, donnent un gâteau au chien, font du reste n parts égales et sortent en emportant l'une des parts.

VI. CONCOURS GÉNÉRAL

Classe de Mathématiques.

Dans un plan (P) on donne un cercle (A) de centre O, de rayon a, d'axe $z'z$ [droite perpendiculaire à (P) en O]. α désigne un angle donné $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. On posera $c = \frac{a}{\cos\alpha}$.

I. — A tout point h de (P), non intérieur au cercle (A), correspondent les éléments suivants : un cercle (h) ayant h comme centre et orthogonal à (A) ; deux cônes de révolution ayant (h) comme directrice commune et tels que toutes leurs génératrices fassent l'angle donné α avec le plan (P). H désigne le sommet d'un quelconque de ces deux cônes. Soit (Δ) l'axe radical des cercles (h) et (A) et soit K le pied de (Δ) sur la droite Oh. On désigne par (Q) le plan déterminé, en général, par le point H et la droite (Δ). La perpendiculaire en H au plan (Q) coupe le plan (P) en H' (en supposant $Oh \neq a$).

1° Démontrer les relations :

$$\overrightarrow{hH'} = \overrightarrow{Oh}\,\mathrm{tg}^2\alpha \qquad \overrightarrow{OH'} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\overrightarrow{Oh}.$$

En déduire que (Δ) est la polaire de H' par rapport au cercle (C) de centre O et de rayon c.

Étendre la définition du plan (Q) au cas particulier où h est sur (A), et à celui où h est rejeté à l'infini sur un diamètre $x'Ox$ du cercle (A). Dans ce dernier cas, montrer que le plan jouant le rôle de (Q) est tangent au cône de révolution $(\mathcal{A})$ de sommet O, d'axe $z'z$, de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

2° Montrer qu'il existe une sphère (N) passant par le cercle (C) et telle que le plan polaire de H' par rapport à (N) soit (Q), et que le plan (Q) coupe la sphère (N) sous l'angle α.

Prouver que le plan (Q) coupe le cercle (C) en deux points λ, λ' tels qu'en chacun d'eux la tangente à (C) fait avec le plan (Q) l'angle α : en d'autres termes le plan (Q) coupe le cercle (C) sous l'angle α.

3° La droite Oh coupe (C) en deux points F, F'. Établir que :

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{F'H}{F'H'} = \cos\alpha$$

et que, dans le plan $Hz'z$, le point H appartient à l'hyperbole de foyers F, F' et d'excentricité $\frac{1}{\cos\alpha}$. Montrer que HH' est normale à cette courbe en H.

Quand h varie librement dans (P) [comme il a été stipulé au début de I], mon-

trer que le lieu des deux points H qui correspondent à h est une surface de révolution dont on précisera une génération et la forme, et qu'on appellera, dans la suite, surface (Σ).

N.-B. — On appellera région *intérieure* à (Σ) l'ensemble de tous les points de l'espace situés, par rapport à la surface (Σ), du même côté que la droite $z'z$.

II. — 1° Le lieu des points H de (Σ) correspondant à des cercles (h) dont un point de rencontre avec (A) est maintenu fixe, est formé de deux droites dont on précisera la construction. Etablir les points suivants :

a. La surface (Σ) contient une infinité de droites qu'on appellera (D) [c'est-à-dire que tout point d'une telle droite est un point de (Σ)] ;

b. Par un point quelconque H de (Σ), passent deux droites (D) distinctes et deux seulement.

2° Regardons ici comme fixe un point H de (Σ), et comme variable un point H_1 qui décrit une courbe quelconque (Γ) tracée sur (Σ) et passant par H.

Montrer que le point de rencontre de la droite HH_1 avec le plan (P) est un centre d'homothétie des cercles (h) et (h_1) correspondant aux points H et H_1, et que ses polaires par rapport à ces cercles, qui sont parallèles à l'axe radical de (h) et (h_1), sont équidistantes de cet axe radical.

3° On suppose que la courbe (Γ) ait une tangente en H. Déduire du paragraphe précédent que cette tangente est située dans le plan (Q) relatif au point H.

Ce résultat permet de qualifier (Q) « plan tangent à la surface (Σ) en H ». Etudier si tout plan passant par une des droites (D) de (Σ) [voir II, 1°] est un plan tangent à la surface (Σ). Etablir que le plan tangent (Q) à (Σ) en un point H de (Σ) possède une infinité de points qui font partie de la région *intérieure* à (Σ) et une infinité de points de l'autre région ; les distinguer en projection orthogonale sur le plan (P) [en supposant $Oh \neq a$].

III. — Les données sont ici, outre la surface (Σ), un point S de l'espace, non situé sur (Σ). On laissera de côté les cas particuliers où S serait situé, soit dans le plan (P), soit sur la droite $z'z$. Dans les paragraphes (3), (4), (5) de la présente partie (III), on *supposera essentiellement que le point* S *appartienne à la région intérieure à* (Σ).

1° Sur une droite (D) de la surface (Σ), il existe (en général) un point H tel que le plan tangent en H à (Σ) passe par le point donné S. L'objet de notre étude est la courbe (Λ) lieu des points situés sur la surface (Σ) et tels, de plus, que le plan tangent à (Σ) en un tel point passe par S.

On appelle s la projection orthogonale de S sur (P), (L) la polaire du point s par rapport au cercle (A), g le pied de (L) sur la droite Os.

Un point H de (Λ) peut-il être situé sur (A) ?

En écartant ce cas particulier, soit K le pied sur Oh de la polaire (Δ) de h par rapport à (A) [cf. début de I]. On désigne par $h\mu$ la perpendiculaire abaissée de h sur la droite Os et par $s\nu$ la perpendiculaire abaissée de s sur la droite Oh. On suppose les droites $z'z$, Os, Oh orientées, chacune *ad libitum*. Etablir la condition nécessaire pour que H appartienne à (Λ) :

$$\frac{\overline{K\nu}}{\overline{Kh}} = \frac{\overline{sS}}{\overline{hH}}$$

2° Démontrer que les droites $\nu\mu$ et gK ont même direction. En déduire que :

$$\frac{\overline{Os}}{\overline{Oh}} = \frac{\overline{K\nu}}{\overline{g\mu}}$$

Déduire de ces proportions et du fait que (h) et (A) sont des cercles orthogonaux que, lorsque H varie sur (Λ), le rapport $\frac{\overline{g\mu}}{\overline{hH}}$ reste constant. Donner son expression en fonction de $\overline{Os}$, $\overline{sS}$ et de l'angle α.

Démontrer que la courbe (Λ) est située dans un plan fixe (ϖ) passant par la droite (L) et ne dépendant que des données : surface (Σ), point S.

3° D'après l'hypothèse indiquée dans le préambule de (III), faite dorénavant sur le point S, justifier que la droite *hs* est sécante au cercle (A).

En observant que le point I de rencontre de (L) et de (Δ) est d'égale puissance positive par rapport au cercle (h) et par rapport au faisceau ($\mathcal{F}$) de cercles contenant (A) et ayant (L) comme axe radical, montrer qu'il existe deux cercles (U) et (U') de ce faisceau ($\mathcal{F}$) qui sont tangents au cercle (h) ; il peut arriver que l'un de ces cercles dégénère en une droite.

4° H et H_1 désignent ici deux points de la courbe (Λ), (h) et (h_1) les cercles correspondants ; montrer que (h) et (h_1) ont un centre d'homothétie situé sur la droite (L).

Démontrer que les cercles (h) et (h_1) s'échangent, en général, par une inversion qui laisse invariants la droite (L) et le cercle (A).

En déduire que les cercles (U) et (U') sont fixes, quel que soit H sur (Λ).

5° Préciser dans quelle région de l'espace devrait être choisi le point S pour que l'un des cercles (U) et (U') soit une droite [on trouvera qu'intervient ici le cône ($\mathcal{A}$) défini à la fin de I, 1°].

En supposant que (U) ne soit pas une droite, démontrer que tout point H de (Λ) est situé sur un cône de révolution *fixe*, de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et tel que le cercle (U) soit une directrice de ce cône.

Conclure que (Λ) est portée par une conique du plan (ϖ).

Discuter la nature de cette conique selon la position de S dans la région intérieure à (Σ).

Quelle est la tangente à (Λ) en H ? Reconnaître qu'elle est conjuguée harmonique de la droite HS par rapport aux deux droites (D) de la surface (Σ) qui passent par H.

Note relative au paragraphe 5° de III. *On rappelle que l'intersection d'un cône de révolution de demi-angle au sommet α' avec un plan qui fait l'angle β' avec l'axe du cône est, quand ce plan ne contient pas le sommet du cône, une conique : cette dernière est une ellipse si $\alpha' < \beta'$, une parabole si $\alpha' = \beta'$, une hyperbole si $\alpha' > \beta'$.*

Classe de Première.

NOTA. — *Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation de la solution. Il est recommandé, en particulier, de dessiner les figures sur une feuille séparée avec un numéro de renvoi.*

Problème. — Dans ce problème, on propose d'abord d'établir quelques propriétés générales des parallélépipèdes, puis d'étudier certains parallélépipèdes particuliers.

Les notations suivantes seront employées : A, B, C, D étant les sommets successifs d'un parallélogramme formant l'une des faces (ou facettes) d'un parallélépipède (U), on désignera par A', B', C', D' les sommets de (U) respectivement opposés à A, B, C, D (deux sommets sont opposés quand ils n'appartiennent pas à une même face) ; les diagonales de (U) sont alors les segments AA', BB' CC', DD', qui ont le même milieu S, centre de symétrie (ou centre) de (U). Si l'on considère les trois arêtes de (U) issues d'un même sommet, par exemple les arêtes DA, DB', DC, issues de D, les extrémités A, B', C, autres que D, de ces trois segments sont les sommets d'un triangle AB'C que l'on appellera le triangle « semi-diagonal » associé au sommet D (les côtés de ce triangle sont des diagonales des trois faces ayant D comme sommet).

I. — Soit (U) un parallélépipède quelconque.

1° Démontrer que la diagonale DD' coupe les plans AB'C et A'BC' des triangles « semi-diagonaux » associés aux sommets D et D' respectivement en des points G

et G′ qui sont les points de concours des médianes de ces triangles, et que les points G et G′ partagent le segment DD′ en trois segments égaux.

2° Démontrer que la somme des carrés des longueurs des douze arêtes de (U) est égale à la somme des carrés de ses quatre diagonales.

3° (U) est dit circonscriptible lorsqu'il existe une sphère tangente aux plans de ses six faces (sphère inscrite). Démontrer qu'un parallélépipède circonscriptible peut être caractérisé par l'égalité des aires de ses faces.

II. — On donne dans un plan (V), un triangle ayant pour sommets A, B′ C. On désigne par I, J, K respectivement les milieux des côtés B′C, CA, AB′, et par a, b, c leurs longueurs, par G le point de concours des médianes de ce triangle, par H son orthocentre, par O le centre, par OX l'axe et par R le rayon du cercle qui lui est circonscrit. On appelle (W) tout parallélépipède dont un sommet, D, admet AB′C comme triangle « semi-diagonal » associé.

1° Démontrer qu'un parallélépipède (W) est déterminé, soit par la donnée de son sommet D, qui peut être arbitrairement choisi hors du plan (V), soit par la condition d'admettre comme centre un point donné S, hors du plan (V).

Comment l'un des points D ou S se déduit-il de l'autre ? Comment les directions et les longueurs des arêtes de (W) sont-elles liées à celles des segments SI, SJ, SK ?

2° On désigne respectivement par p, q, r, les longueurs des arêtes DA, DB′, DC, et par α, β, γ, δ, celles des demi-diagonales SA, SB′, SC, SD de (W). Calculer p^2, q^2, r^2 et δ^2 en fonction de a, b, c, α, β, γ, ainsi que α^2, β^2, γ^2, δ^2 en fonction de a, b, c, p, q, r.

III. — Les données et les notations sont celles de la partie II. On appelle (W_0) tout parallélépipède (W) dont les six faces sont des losanges.

1° Démontrer que les parallélépipèdes (W_0) peuvent être caractérisés par le fait que le sommet D est situé sur la droite OX. Quels sont les lieux géométriques de leurs centres S et de leurs sommets D′ (opposés à D) ? Peuvent-ils aussi être caractérisés par une propriété des arêtes opposées du tétraèdre DIJK (ou du tétraèdre D′AB′C) ?

Désignant par p la longueur commune des arêtes d'un parallélépipède (W_0), calculer, en fonction de p, a, b, c, les carrés des longueurs de ses demi-diagonales, et les carrés des aires de ses faces.

2° Démontrer qu'un parallélépipède (W_0) ne peut être circonscriptible que si le triangle AB′C est isocèle, ou équilatéral.

On suppose que le triangle AB′C est isocèle, sans être équilatéral ; soient :

$$B'A = B'C = a, \qquad AC = b \qquad (b \neq a), \qquad \widehat{AB'C} = \theta.$$

Déterminer, en prenant comme inconnue la distance $OD = x$, les positions de D sur OX pour lesquelles (W_0) est circonscriptible ; on calculera x en fonction de a et b, et en fonction de R et de $\cos\theta$. Entre quelles limites doit être compris l'angle θ, ou bien le rapport $\frac{b}{a}$, pour qu'il existe un parallélépipède (W_0) circonscriptible ?

Soit D_0 une position de D pour laquelle (W_0) est circonscriptible. Quelles relations existe-t-il entre les angles $\widehat{AD_0C}$, $\widehat{AD_0B'}$, $\widehat{CD_0B'}$? On pose $\widehat{AD_0C} = \varphi$. Calculer en fonction de a et de b, le cosinus de l'angle φ, la longueur commune p des arêtes de ce parallélépipède, et le rayon ρ de la sphère inscrite ; calculer également $\cos\varphi$ en fonction de $\cos\theta$.

IV. — On reprend les données et les notations de la partie II. On appelle (W_1) tout parallélépipède (W) dont les trois diagonales issues des sommets A, B′, C ont même longueur.

1° Quels sont les lieux géométriques des centres S et des sommets D des parallé-

lépipèdes (W_1) ? Montrer que ces parallélépipèdes peuvent être caractérisés par une propriété des arêtes opposées du tétraèdre DAB'C.

Soit α la longueur commune des demi-diagonales SA, SB', SC d'un parallélépipède (W_1) ; calculer, en fonction de a, b, c, α, les carrés p^2, q^2, r^2 et δ^2 des longueurs de ses arêtes et de sa demi-diagonale SD. Désignant par σ_1, σ_2, σ_3 les aires des triangles DB'C, DCA, DAB', on considère deux quelconques de ces triangles, par exemple DB'C et DCA qui ont en commun le côté DC ; établir les relations :

$$4(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = r^2(q^2 - p^2) = r^2(a^2 - b^2).$$

Démontrer qu'il n'existe pas de parallélépipède (W_1) circonscriptible lorsque le triangle AB'C n'est pas équilatéral.

2° On rappelle que les parallélépipèdes rectangles sont les seuls parallélépipèdes ayant leurs quatre diagonales égales.

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un parallélépipède (W) ayant ses quatre diagonales égales est que les trois angles du triangle AB'C soient aigus (ou bien que l'orthocentre H du triangle AB'C soit intérieur au triangle). Calculer, pour un tel parallélépipède, les carrés p^2, q^2, r^2, α^2 en fonction de a, b, c.

3° On suppose maintenant que le triangle AB'C est équilatéral ($b = c = a$). Lorsque le point D (ou le point S) décrit OX, on obtient des parallélépipèdes (W) qui sont à la fois du type (W_0) et du type (W_1), et qui sont tous circonscriptibles.

On pose alors $OD = x$, et $\widehat{ADC} = \varphi$; calculer, en fonction de x et de a (ou de R), pour le parallélépipède (W) correspondant au sommet D, les longueurs p, α, δ des arêtes et des demi-diagonales, le rayon ρ de la sphère inscrite, ainsi que $\cos\varphi$. Entre quelles limites varient ρ et φ lorsque D décrit OX ?

Le bloc-notes de L'A.P.M.

★ Recommandations importantes à tous les Collègues.

Facilitez le travail de notre Trésorier.

Effectuez, dès maintenant, le renouvellement de votre cotisation, soit 600 F (par virement C.C.P. Paris 5708-21). Cette cotisation, selon les nouveaux statuts, doit être versée AVANT LE 1er DÉCEMBRE, dernier délai.

Changements d'adresse : Les Collègues qui changent de poste au 1er octobre sont priés de donner leur nouvelle adresse aussitôt que possible ; ils éviteront ainsi des lenteurs ou des erreurs dans la distribution du *Bulletin*. Qu'ils profitent donc du renouvellement de leur cotisation pour indiquer clairement leur nouvelle adresse.

Par un rapide versement des cotisations vous permettrez à la trésorerie de notre Association de faire face aux charges que représente l'accroissement de nos publications.

★ Les prochains « Bulletins ».

179 (15 octobre), premier numéro de la 36e année, 180 (1er décembre), 181 et 182 (Annales du Baccalauréat et du B.E.P.C.), 183 (15 janvier), 184 (1er mars), 185 (15 mai), 186 (septembre, concours 1957) dernier numéro de la 36e année. Soit au total *huit* « *Bulletins* ».

★ Le numéro du 15 octobre (n° 179).

Nous désirons donner à ce premier numéro de la nouvelle année scolaire une importance particulière.

Son contenu sera aussi représentatif que possible de l'effort entrepris par l'A.P.M. : grandes études (les conférences de M. LICHNEROWICZ, « *Applications linéaires et matrices* », et de M. LELONG, « *Formes quadratiques et hermitiennes* »), essais et discussions pédagogiques, comptes rendus de livres et documents utiles,

informations sur l'activité de l'A.P.M. et les perspectives offertes à l'enseignement des Mathématiques dans le cadre de la future réforme générale de l'enseignement.

Une double feuille encartée dans le numéro contiendra la table des matières de la 35e année du *Bulletin*. Une présentation de l'activité de l'A.P.M. et des avantages offerts par l'adhésion compléteront ce document qui pourra être affiché dans les salles de professeurs ou distribué aux nouveaux Collègues. Il en sera commandé un tirage supplémentaire et quelques exemplaires seront envoyés aux délégués de l'A.P.M. dans les divers établissements ainsi qu'à tous les Collègues qui en feront la demande.

*** Les Journées d'études de novembre 1956.**

Le *Bulletin* 177 a donné les premières précisions sur le stage de Sèvres (1-3 novembre 1956). Le *Bulletin* 179 complétera la préparation pédagogique de ces discussions.

Quant à l'organisation pratique du stage, rappelons que les Recteurs désigneront un certain nombre de participants dans chaque académie ; pour ces Collègues le déplacement et l'hébergement à Sèvres seront remboursés. Les Collègues qui le désirent peuvent présenter leur candidature au Recteur de leur résidence.

Pour les Collègues dont la candidature n'aurait pas été retenue, il resterait la possibilité de solliciter l'autorisation d'absence nécessaire (pour la journée du 3 novembre, car le stage commencera le 1er novembre après-midi).

Que tous ceux qui souhaitent participer à ces journées veuillent bien en prévenir directement le Président de l'A.P.M. Ils recevront éventuellement toute documentation de dernière heure qui pourra leur être utile.

DELAGRAVE

Nouveauté

G. WALUSINSKI

AIDE-MÉMOIRE DE COSMOGRAPHIE

Classes de Mathématiques, Sciences Exp[les] et Philosophie

Un volume (11,5 × 18,5), couverture forte . . . . . 190 F

AIDE-MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUES

Classes de 1re A,B,C, Moderne

par F. BRACHET et J. DUMARQUÉ. . . . . 95 F

Rappel : F. BRACHET et J. DUMARQUÉ

ARITHMÉTIQUE et INITIATION à la GÉOMÉTRIE

Classe de Sixième

Un vol. (14,5 × 20), Broché. 220 F Cart. 295 F Livre du Maître 285 F

Le Gérant : G. WALUSINSKI.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 89.686. — Dépôt légal : III-1956

LES ÉDITIONS LAMARRE

4, rue Antoine-Dubois, PARIS (6e)

Annoncent la parution prochaine

du 6e ouvrage de la collection « HISTOIRE DES SCIENCES »

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

de

BECKER et HOFMANN

Préface de M. BOULIGAND
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Texte français de R. JOUAN

380 pages 12 × 19, couverture pellior, imitation cuir, lettre or **1 250 F**

Déjà parus :

HISTOIRE DE LA SCIENCE DES RELIGIONS

de **Gustav MENSCHING**
Professeur de Science comparée des Religions à l'Université de Bonn
Préface de M. E. VERMEIL
Professeur à la Sorbonne

120 pages 12 × 19, couverture pellior, imitation cuir, lettres or **450 F**

HISTOIRE DE LA CHIRURGIE

du Dr **WALTER VON BRUNN**
Professeur à l'Université de Leipzig
Préface de P. PADOVANI
Professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris, Chirurgien des Hôpitaux

160 pages 12 × 19, couverture pellior, imitation cuir, lettres or **575 F**

HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE

du Dr **Friedrich BECKER**
Professeur à l'Université de Bonn
suivie de l'**Astronomie Moderne,** par Ernest ESCLANGON
Membre et ancien Président de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes

Un vol. 174 pages 12 × 19 **550 F**

HISTOIRE DE LA PHYSIQUE

de **Max VON LAUE** (Prix Nobel)
Présentée par Maurice DE BROGLIE
de l'Académie française, de l'Académie des Sciences

Un vol. 198 pages 12 × 19 **700 F**

HISTOIRE DE LA CHIMIE

de **Paul WALDEN**
Ancien directeur de l'Institut de la Chimie à l'Université de Rostock
Traduite et présentée par Eugène DARMOIS
Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Un vol. 127 pages 12 × 19 **450 F**

A paraître : **HISTOIRE DES SCIENCES HUMAINES**

MASSON & Cie, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6e

COURS DE

MATHÉMATIQUES

sous la direction de

G. CAGNAC
Inspecteur de l'Académie de Paris

L. THIBERGE
Inspecteur Général de l'E.N.

Nouveauté

Arithmétique

Classe de Mathématiques

par

Y. CROZES
Professeur au Lycée Henri-IV

Un volume avec figures, exercices et problèmes, broché ..... **Octobre 56**

Arithmétique, cl. de 6e. Un volume avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **510 F**

Géométrie et Arithmétique, cl. de 5e. Un vol., avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **550 F**

Arithmétique, Algèbre et Géométrie, classe de 4e. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **570 F**

Arithmétique, Algèbre et Géométrie, classe de 3e. Un volume avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **1 330 F**

Géométrie plane, cl. de 2e C et M. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **615 F**

Algèbre, cl. de 2e C et M. Un volume avec figures, exercices et problèmes, cartonné ..... **495 F**

Algèbre et Géométrie, cl. de 2e A et B. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, broché ..... **600 F**

Géométrie dans l'espace, cl. de 1re C et M. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, cart. .. **685 F**

Algèbre et Trigonométrie, cl. de 1re C et M. Un volume, avec figures, exercices et problèmes, cart. .. **980 F**

Algèbre et Géométrie, cl. de 1re A et B. Un volume avec figures, exercices et problèmes, broché .... **680 F**

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Algèbre et Trigonométrie

par J. COMMEAU, Professeur agrégé au Lycée Kléber. Un fort volume de 504 pages, avec figures, exercices et problèmes ; broché .... **1 970 F**

EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE DES PRINCIPES

DE LA

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

par

Robert BRISAC

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Professeur au Lycée de Marseille

Préface de **René DE POSSEL**
Professeur à la Faculté des Sciences d'Alger

In-8 (16-25), 77 pages, 1955 ..... **1 200 F**
Port en sus ..... **30 F**

TRAITÉ DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
Ouvrages réunis par Jean-Louis DESTOUCHES

IV.

MÉCANIQUE

A L'USAGE DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

par

Mlle N. DEQUOY

Préface de M. A. CHATELET

In-8 (16-25), de XII-195 pages, 63 figures, 1954 ..... **950 F**
Port en sus ..... **100 F**

En vente aux Editions GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands Augustins - PARIS VIe - DANton 05-10

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD

GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

ARITHMÉTIQUE 6e *(Jusqu'à épuisement)*	220 F
ARITHMÉTIQUE 6e — Nouvelle édition mise à jour	330 »
Corrigé des exercices de 6e	300 »
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6e et 5e	185 »
GEOMÉTRIE 5e et 4e	400 »
ARITHMÉTIQUE 5e	350 »
Corrigé des exercices de 5e	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4e	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3e	350 »
GÉOMÉTRIE 3e	325 »
GÉOMÉTRIE 5e, 4e, 3e (pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages **cartonné**).	800 »
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3e MODERNE COURT.	100 »
ALGÈBRE 2e A.B.C.M.	500 »
GÉOMÉTRIE 2e A.B.C.M.	465 »
ALGÈBRE 1re A.B.	180 »
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1re C.M.	550 »
GÉOMÉTRIE 1re A.B.C.M.	500 »

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1re partie, A.B.C.M.	390 »
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	410 »

Roland MAILLARD et **Albert MILLET**

Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Charlemagne
Chargé d'un cours à l'École Normale Supérieure

Professeur agrégé au Lycée Janson-de-Sailly et à l'École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du Second degré

Classe de Sixième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Cinquième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Quatrième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Troisième (Nouvelle édition). *Un volume.* + Corrigés.

Classes de Seconde Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Seconde Classique C et Moderne :
Algèbre. *Un volume.*
Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.

Classes de Première Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Première Classique C et Moderne :
Algèbre et Trigonométrie. *Un volume.*
Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Sciences expérimentales. *Un volume.*

Classes de Philosophie et Sciences expérimentales :
Cosmographie. *Un volume.*

Classe de Philosophie :
Trigonométrie et Algèbre. *Un volume.*
Mathématiques (Trigonométrie, Algèbre et Cosmographie). *Un volume.*

Classe de Mathématiques :
Algèbre. *Un volume.*
Arithmétique. *Un volume.*
Cosmographie. *Un vol.*
Géométrie. *Un volume.*
Géométrie descriptive. *Un volume.*
Trigonométrie. *Un vol.*
★ Mécanique. *Un vol.*

Classe de Mathématiques (Technique)
Algèbre. *Un volume.*
Géométrie. *Un volume.*
Trigonométrie. *Un volume.*

Cours Complémentaires

Classe de Sixième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Cinquième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Quatrième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Troisième. *Un volume.* + Corrigés.

+ Les **Corrigés,** hors commerce, sont exclusivement réservés à MM. les Professeurs de Mathématiques.

CLASSIQUE HACHETTE