

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN ALLEMAGNE OCCIDENTALE *

LES UNIVERSITÉS

I. — APERÇU HISTORIQUE.

Les Universités allemandes ont une position privilégiée qui n'est peut-être pas compréhensible immédiatement à l'étranger ; elle peut s'expliquer historiquement. Les plus anciennes universités datent du ^{xiv}^e siècle, comme celles d'Heidelberg ou celle de Cologne, qui remontent, la première à 1386, la seconde à 1388. Ce sont des universités catholiques où la jeunesse de la chrétienté occidentale trouve la totalité des connaissances de l'époque, envisagées naturellement du point de vue de la scolastique.

La renaissance de l'humanisme et la Réforme provoquent la transformation des universités, et, en outre, en fait surgir de nouvelles, comme celles de Marbourg en 1527, d'Iéna en 1558, de Wurzburg en 1582. La redécouverte du génie grec, et en particulier l'admiration de l'académie platonicienne, accrédite la croyance en la fécondité de la connaissance libérée de tout préjugé. Les universités allemandes en reçoivent une nouvelle impulsion et connaissent un magnifique développement. Dès cette époque, l'étudiant itinérant est devenu traditionnel, et, encore aujourd'hui, la jeunesse se considère comme obligée de se déplacer, dans toute la mesure du possible, pendant ses études universitaires, afin d'échapper à l'influence exclusive d'une seule conception scientifique.

Une nouvelle mutation apparaît avec le ^{xviii}^e siècle, le siècle des lumières, époque que les Allemands appellent « Aufklärung ». L'Université de Halle voit le jour en 1694 et celle de Göttingue en 1737 ; toutes deux proclament l'autonomie de la raison et s'imposent le principe de la libre recherche. Les sciences exactes et naturelles font leur entrée dans ces deux universités, dont les professeurs sont astreints à la recherche personnelle, et bientôt les autres universités suivront leur exemple.

Le début du ^{xix}^e siècle voit le mouvement de résistance aux conquêtes napoléoniennes, qui est à l'origine de la création de l'université de Berlin, dont Guillaume de Humboldt fut le promoteur, et Fichte le premier recteur. Dès lors, les universités ont à peu près la physionomie qu'elles garderont jusqu'au ^{xx}^e siècle. Leur principe est que l'université est au service de la science, qu'il n'y a pas de science vivante sans recherche, et que nul ne peut y être professeur s'il ne s'est distingué dans la recherche.

Quelle est la situation actuelle ? La période prestigieuse des universités allemandes appartient au passé, et il y a d'immenses difficultés à les reconstruire, après deux guerres mondiales épuisantes, et perdues. La première condition est de recouvrer la liberté d'enseignement. Aujourd'hui, cette liberté semble se borner à l'interprétation des plans d'études, mais un passé récent a appris à connaître les intrusions gouvernementales, les abus de la part du corps enseignant et les grossières violences d'un régime dictatorial. Combien est précieuse la liberté d'enseignement, on l'a vu en Allemagne, entre 1933 et 1945, lorsqu'il était interdit de citer un auteur juif, et qu'exposer la théorie de la relativité d'Einstein était une attitude très suspecte, et on peut même se demander si elle est rétablie aujourd'hui, notamment en médecine et dans les Sciences Expérimentales.

Le souvenir reste donc vif de la glorieuse liberté qui caractérise la période de 1814 à 1914, et qui s'exprimait à la fois par l'indépendance des professeurs, et par la possibilité pour les étudiants de choisir les cours selon leur convenance, de les suivre sans aucun contrôle, et de circuler librement d'une université à une autre.

(*) Voir les deux premières parties de cette étude dans les *Bulletins* 175 et 176.

Aujourd'hui, l'université s'affronte à de nombreux problèmes. Son principe a toujours été la formation purement scientifique, et nullement la formation professionnelle, même chez les futurs maîtres des lycées. Ce sont là des vues idéales qui se heurtent de plus en plus aux exigences de la vie active, et qui créent une lacune particulièrement grave pour les mathématiciens. Klein a signalé cette discontinuité (*Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*) et il a consacré une grande partie de son activité à la recherche d'une pénétration réciproque plus étroite entre les Mathématiques à l'école et à l'université ; ce problème n'est nullement résolu.

D'autre part, la nécessité de la recherche scientifique est évidente, le grand public en a lui-même nettement conscience. Toutes ces considérations font que les universités occupent une place de choix dans les préoccupations gouvernementales et que leur reconstruction a une priorité dans les projets officiels. En conclusion, leurs perspectives d'avenir sont de nouveau favorables, si elles parviennent à concilier recherche et enseignement sans s'isoler du monde qui les entoure et des hommes qui y vivent.

II. — LES ÉTUDIANTS.

On dit souvent en Allemagne que l'université française est faite pour l'Etat, l'université américaine pour l'étudiant, et l'université allemande pour le professeur. Il y a dans cette boutade une part de vérité. Quand l'étudiant pénètre dans l'université de son choix, il éprouve le sentiment d'être négligeable, et de pénétrer dans le temple de la science, dont les professeurs sont les desservants. Ceux-ci choisissent les cours à leur convenance, en font un terrain d'expérience où ils construisent une théorie selon de nouveaux points de vue, sans préoccupation pédagogique, et sans que l'auditeur puisse s'aider d'un livre. Il en résulte que, si les étudiants rendent en général justice à leurs professeurs, ces derniers sont souvent portés à taxer les étudiants d'incapacité, d'inintelligence, et à les accuser de ne s'intéresser qu'à leur futur gagne-pain. Pourtant, les bacheliers qui entreprennent des études supérieures de Mathématiques constituent une sélection, et il serait imprudent d'accuser le lycée d'être incapable de juger les aptitudes scientifiques de ses élèves.

Notons que les étudiants sont nombreux, et qu'un cours peut avoir jusqu'à 200 auditeurs. Il y a d'autre part une nette discontinuité dans le passage du lycée à l'université ; l'enseignement du lycée se maintient dans l'intuition, tandis que, dans l'université, dès les débuts, les cours sont souvent exposés de manière abstraite et axiomatique et il en résulte pour l'étudiant un contraste pénible et qui devient même vite accablant. Il faudrait s'efforcer de réaliser l'« abstrait dans l'intuition » et d'obtenir un enseignement plus humain ; cela vaudrait aux professeurs une vive reconnaissance de la part des étudiants.

Beaucoup de débutants ne connaissent pas le succès, 25 à 40 % en calcul différentiel et intégral. Quelques-uns recommencent, la plupart changent d'orientation, et cela est d'autant plus fâcheux que ce ne sont pas nécessairement les plus médiocres qui abandonnent dès la première année. Notons enfin, et ce n'est pas le privilège de l'Enseignement Supérieur allemand, que les professeurs ont des obligations nombreuses et variées, qu'ils ont le souci légitime de leur carrière, laquelle dépend essentiellement de leurs succès scientifiques personnels, et on comprendra que finalement les étudiants aient à souffrir de toutes ces considérations.

Du fait même de la nouveauté des études supérieures mathématiques, on n'estime pas nécessaire, pour les aborder, d'avoir acquis une formation secondaire spécialisée ; par contre, une solide culture générale est indispensable, qui permettra de se faire une idée juste de l'évolution des Mathématiques, et d'y voir autre chose qu'une construction logique qui ne serait qu'un jeu de l'esprit.

Il est également indispensable que les étudiants puissent lire les ouvrages étrangers. Après la guerre, les étudiants arrivaient à l'université avec des connaissances fort incomplètes, et ils ne pouvaient pas lire le français. Maintenant, la situation est différente, grâce au travail en séminaire, et on peut interdire la participation aux séminaires à ceux qui ne peuvent lire, ni le français, ni l'anglais.

Il faut faire une dernière remarque, au sujet des étudiants qui suivent des cours de Mathématiques, sans être des spécialistes ; il s'agit des médecins, des pharmaciens et de ceux qui se destinent aux Sciences Expérimentales. Les professeurs se plaignent qu'ils ne peuvent pas écrire les simples formules qui sont exigées pour la compréhension de leurs cours de physique expérimentale. Pour ces étudiants, une solide formation mathématique scolaire est nécessaire. Nulle connaissance ne peut être significative en tant que science si elle n'est pas munie d'une solide armature logique ; pour cela, la Mathématique est un modèle dont la rigueur et la clarté ne peuvent être atteintes par aucune autre science, et enfin la vie actuelle est tellement imprégnée de Mathématiques, notamment dans la technique et dans l'économie, qu'on ne peut guère se passer d'une certaine formation dans cette science.

III. — LES INSTITUTS MATHÉMATIQUES.

Les instituts, qu'on appelle aussi séminaires, sont issus des petits séminaires qu'on trouvait autrefois dans toutes les universités, mais ils sont aujourd'hui beaucoup mieux équipés. Autrefois, l'institut était un simple local pour les maîtres de conférences et les assistants, où on tenait des séances de séminaire. On y trouvait une petite bibliothèque pour laquelle il n'était en général prévu aucun prêt ; elle était parfois utilisée par les étudiants, en présence des assistants, mais les heures d'utilisation étaient très limitées. L'installation était loin d'offrir les commodités d'une bibliothèque universitaire. A l'origine, une des raisons de la création des instituts fut précisément le désir de remédier aux insuffisances des bibliothèques universitaires, généralement pauvres en ouvrages mathématiques, et qui refusaient de faire des achats en rapport avec les besoins des mathématiciens.

Aujourd'hui, l'institut est le principal lieu de travail des étudiants et des professeurs ; les étudiants s'y retrouvent entre eux, et ils peuvent y avoir des contacts plus directs avec les professeurs, qui s'efforcent d'y passer la plus grande partie de leurs heures d'activité. Les étudiants peuvent utiliser la bibliothèque, où ils trouvent notamment la littérature internationale, et, parfois, comme à Fribourg ou à Munster, une section pour la pédagogie des Mathématiques et une collection d'ouvrages scolaires. Aussi le poste de directeur de l'institut n'est-il plus une fonction administrative accessoire ; il comporte une grande responsabilité intellectuelle à l'égard des jeunes générations d'étudiants.

L'avantage qu'on voit dans l'institution des séminaires est qu'elle évite à l'étudiant d'être confiné dans la solitude de sa chambre ; les idées qu'il peut former dans cette solitude sont peu de choses par rapport au profit qu'il peut retirer de discussions avec ses camarades. D'autre part, l'université ne constituait autrefois qu'une moitié de la vie de l'étudiant ; l'autre appartenait à l'activité des associations. Cela n'existe plus, d'où un vide très sensible que le séminaire contribue à combler. Par contre, on fait grief aux instituts d'aboutir à une fragmentation de l'université en écoles professionnelles, et d'assujettir étroitement les étudiants à leurs professeurs, ce qui est contraire aux traditions universitaires. Ce à quoi on objecte que le souci de la formation professionnelle et du développement de la personnalité n'implique pas nécessairement la perte de la liberté, tout dépend de la manière dont les choses se passent en pratique ; au surplus, comment ne pas fragmenter l'activité de l'université, quand on a affaire à 6.000 étudiants ?

IV. — LES ÉTUDES.

Pour tous les débutants qui visent quelque examen mathématique, sont prévus, pendant les deux premiers semestres, des cours de calcul infinitésimal et de géométrie analytique. Il y a encore d'autres cours et travaux pratiques, dont nous reparlerons, au total une douzaine d'heures hebdomadaires, mais en principe la présence n'est pas obligatoire et l'assiduité n'est pas contrôlée. Il y a jusqu'à 200 auditeurs en calcul différentiel, dont une bonne moitié seront des mathématiciens spécialistes, les autres des physiciens ou des naturalistes, etc... Les cours diffèrent naturellement beaucoup d'un professeur à l'autre ; il n'y a pas d'instructions officielles pour le choix des

matières, et aucun livre de cours, même si le professeur est l'auteur d'ouvrages ; c'est une tradition, comme nous l'avons déjà signalé. Mais il y a naturellement à chaque époque un style général qu'on retrouve partout plus ou moins. Dans le passé, l'enseignement ne pouvait pas ne pas subir l'influence de mathématiciens comme Kowalewski, Toeplitz, Weierstrass. Dans les dix dernières années, les cours ont subi l'influence des idées d'Elie Cartan, particulièrement fertiles dans l'extension de formules classiques (Gauss, Green, Stokes) aux espaces à n dimensions.

Plus récemment encore s'est manifestée l'influence bourbakiste, qui fait apparaître de nouvelles perspectives par sa construction originale et systématique des Mathématiques. Les conceptions bourbakistes permettent de rapprocher et d'unifier différentes notions (par exemple les intégrales de Riemann, de Stieltje, de Lebesgue), et fournit une introduction adéquate à la topologie qui, déjà à l'époque prébourbakiste, s'était développée en une branche autonome et importante étudiée pendant le deuxième semestre (à partir du théorème de Heine-Borel).

Tout cela demande à être élaboré, pour être mis à la portée du débutant moyen. Pour le moment, si nous vivons une sorte de siècle de la « totale bourbakisation », il faut reconnaître que ces théories ne font pas grand cas des étudiants qui ne sont pas supérieurement doués. Le problème reste posé, de trouver la méthode convenable, qui reste dans un juste milieu. Si nous sommes trop abstraits, nos étudiants nous suivent encore ; mais les physiciens protestent, car ils ont besoin de gens qui résolvent des problèmes concrets, et non pas qui restent dans les nuages, à jongler avec des symboles abstraits.

A côté du cours de calcul infinitésimal, il y a, pour les deux premiers semestres, un cours de géométrie analytique, titre qui peut recouvrir des contenus très différents. Au début du siècle, on s'inspirait des ouvrages bien connus de Salmon, du programme d'Erlangen, de la géométrie projective sous forme axiomatique. A quoi s'ajoutent aujourd'hui le calcul vectoriel, le calcul matriciel. Dans certains cours, il s'agit, partant d'un système d'axiomes comme ceux de Hilbert pour la géométrie euclidienne, ou d'un système équivalent, de montrer comment on peut en déduire les théorèmes de la géométrie élémentaire, ou de démontrer l'isomorphie entre les figures géométriques et des expressions connues et définies dans le corps des nombres réels.

Ces cours sont précieux pour les futurs professeurs de Mathématiques, mais s'ils s'adressent aux débutants, les physiciens pourront encore à bon droit protester. Ces vues, bien que profondes et belles, leur sont inutiles ; ce qu'il leur faut, c'est la connaissance des vecteurs, du calcul dans l'espace à trois dimensions, les déterminants, les matrices, et tout cela au plus tôt. C'est pourquoi il existe dans certaines universités, Berlin en particulier, un cours d'introduction destiné à alléger le cours principal et à ménager une meilleure transition entre le lycée et l'université.

Ceci pose le problème des cours de Mathématiques pour les non spécialistes, comme chimistes, biologistes, économistes. Tous voudraient posséder les méthodes générales essentielles qui leur sont nécessaires, mais voudraient les acquérir avec le minimum de théorie. Satisfaire ce vœu, dit l'auteur, c'est « comme l'œuf de Christophe Colomb ». Personne ne s'en charge volontiers, si bien que les Mathématiques finissent par être négligées dans les examens relatifs à ces catégories d'étudiants. En somme, le problème se pose aussi dans les classes supérieures des lycées, et un professeur de lycée expérimenté serait sans doute le plus compétent pour résoudre ces difficultés.

Nous avons parlé jusqu'à présent des étudiants débutants, les seuls qui entrent dans le cadre du livre étudié, puisque celui-ci se fixe l'âge extrême de 21 ans. Mais il est évidemment impossible de fixer une frontière nette, puisque les étudiants ne sont pas répartis par années, et qu'ils suivent tel ou tel cours à telle ou telle époque selon leurs préférences personnelles. Par exemple, certains étudient la théorie des fonctions dès le troisième semestre, tandis que d'autres attendent, pour le faire, le sixième.

Quatre cours essentiels sont prévus pour la période intermédiaire des études :

la théorie de la mesure de Lebesgue ; les équations différentielles ; la théorie des fonctions ; la géométrie différentielle.

Le premier est moins fréquenté généralement que les trois autres ; il est parfois remplacé par un cours sur la théorie de l'intégration dans le style Bourbaki.

Le cours sur les équations différentielles est le plus fréquenté, notamment par tous ceux qui veulent aborder les études de physique avec le bagage mathématique indispensable. Pour des raisons historiques, ce cours est fait en liaison avec la théorie des groupes de Lie.

Le cours sur la théorie des fonctions offre évidemment de grandes possibilités de varier le mode d'exposition, mais le plus riche en vues générales et en connexions avec d'autres domaines, c'est le cours de géométrie différentielle. Il importe de ne pas négliger ces digressions par souci de purisme, car on ne peut demander aux auditeurs de les trouver eux-mêmes. Citons, par exemple : théorie de la représentation des surfaces et introduction à la cartographie ; représentation conforme locale et conception des surfaces à trois dimensions comme surfaces de Riemann ; démontrer élémentairement que la surface sphérique n'est pas applicable sur un plan ; démontrer le théorème sur la somme des angles d'un triangle géodésique à l'aide du théorème de Gauss-Bonnet.

On peut faire des remarques analogues à propos de l'algèbre ; depuis l'apparition du livre de Van der Waerden, les cours se sont fort modernisés ; les concepts de groupe, de corps et d'anneau sont devenus usuels ; la théorie de Galois occupe sa juste place, et on veille à ce qu'elle ait sa pleine signification, afin que les futurs professeurs puissent, avec son aide, faire la lumière sur les classiques problèmes de construction.

La géométrie est traitée très inégalement dans les diverses universités ; dans certaines, il n'y en a pas, en dehors des cours de géométrie analytique et de calcul différentiel ; dans d'autres au contraire, comme Fribourg, on retrouve la géométrie dans de nombreux autres cours. Il faut citer essentiellement les leçons sur les fondements de la géométrie, et celles sur la topologie.

Les premières étaient importantes, surtout avant la première guerre mondiale (influence de Hilbert) ; elles le sont beaucoup moins aujourd'hui et c'est sans doute regrettable, car elles sont particulièrement précieuses pour éclairer la géométrie élémentaire des lycées.

La topologie est importante pour la recherche moderne dont le préliminaire naturel est la connaissance des espaces topologiques. Ici encore le cours Bourbaki a fait surgir un tout autre aspect. Le leitmotiv de Bourbaki est de faire une construction neuve des Mathématiques. Ce n'est pas la géométrie élémentaire ni les nombres réels, qui donnent la base d'une construction mathématique totale, du moins pour les mathématiciens expérimentés, ce sont les structures fondamentales : algèbre, structures d'ordre, espaces topologiques. On obtient alors une meilleure économie dans le système d'axiomes, et les groupes, sur lesquels Klein avait autrefois attiré l'attention, ne sont plus qu'une structure parmi les autres.

Ce serait une erreur de croire qu'il en résulte un accroissement des matières à étudier, et une surcharge pour l'étudiant. L'idée bourbakiste essentielle est d'arriver à un meilleur groupement des sujets, à une présentation plus économique, plus resserrée et plus rigoureuse. Il y a des sujets qui passent au second plan, et c'est seulement la capacité de pensée abstraite qui croît constamment. Il y a d'ailleurs eu de tout temps des disciplines mathématiques pour lesquelles, d'un point de vue purement scientifique, on aurait pu souhaiter des leçons universitaires ; mais il faut faire un choix, et le souci primordial est de favoriser les trois grandes branches que les futurs professeurs ont à connaître et à enseigner : analyse, géométrie et algèbre.

En résumé, Bourbaki veut nous procurer une meilleure possibilité de dominer l'ensemble des Mathématiques, et c'est pourquoi il y a lieu, dans nos cours, de prendre ses idées en considération.

A côté des matières essentielles que nous venons de passer en revue, il y a

encore des connaissances qui sont exigées des futurs maîtres, et sur l'importance desquelles l'administration insiste constamment : la géométrie descriptive, la géodésie élémentaire, l'astronomie mathématique. Le professeur doit être mis en état d'animer son enseignement par des applications et, par là, d'intéresser les esprits plutôt tournés vers la pratique. Mais on rencontre ici une résistance muette de la part de nombreux professeurs qui, absorbés par leurs préoccupations théoriques, interprètent très libéralement leurs obligations à cet égard. On dit parfois : si un étudiant a pu comprendre les méthodes modernes des hautes Mathématiques, il lui sera facile d'étudier seul les parties élémentaires des Mathématiques appliquées. C'est peut-être vrai en théorie, mais il est probable que l'étudiant n'agira pas ainsi, si on ne l'a pas déjà intéressé à ces applications à l'université.

Aussi se préoccupe-t-on de plus en plus d'instituer des leçons sur la pratique et la didactique de l'enseignement mathématique, afin d'améliorer la capacité professionnelle des étudiants, d'éviter qu'ils soient exclusivement intéressés par la recherche abstraite peut-être inféconde pour les Mathématiques scolaires, et aussi de leur éviter de regrettables désillusions tout au long de leur future carrière ; qu'ils ne soient pas amenés plus tard à adopter l'attitude de ces professeurs qui reçoivent les stagiaires qu'on leur confie en disant : « Commencez par oublier tout ce que vous avez appris à l'université. »

Les adversaires d'une telle formation invoquent les principes traditionnels de l'université allemande : pas de formation professionnelle, seulement la formation scientifique ; la pédagogie s'acquiert pendant les années de stage, et on reprend l'argument, « qui peut le plus peut le moins », oubliant ainsi que le succès dans une science ne dépend pas seulement de l'intelligence, mais aussi du goût que l'on éprouve pour cette science, et qui n'existera pas si on ne l'a pas éveillé à l'université.

Il est certain que si des leçons de pédagogie mathématique devaient présenter à l'étudiant une technique rigide et sans vie, il vaudrait autant ne pas les faire. Et ce n'est pas encore aujourd'hui que de telles leçons résoudreont le difficile problème de la formation des maîtres. Il y a toujours lieu de réaliser de meilleures liaisons entre les Mathématiques de l'école et celles de l'université, comme le souhaitait déjà Klein.

Quelques mots enfin sur l'histoire des sciences ; nombreux sont ceux qu'elle intéresse, dans leur souci de formation générale des étudiants. La compréhension historique est en effet de plus en plus nécessaire en un temps où tous les exposés se font de plus en plus axiomatiquement. On risque d'en retirer une impression d'arbitraire dans le choix des axiomes, les Mathématiques semblent un jeu de l'esprit, et le mathématicien un homme qui ne suit que sa fantaisie.

Ces erreurs ne se produiront pas si l'on apprend à connaître la laborieuse évolution des Mathématiques au cours des siècles. Alors on voit dans les Mathématiques une chaîne de magnifiques découvertes dues au labeur de l'intelligence humaine. Mais gardons-nous de voir dans l'histoire des sciences une panacée ; il importe qu'elle ne soit pas étudiée pour elle-même, et qu'elle ne soit pas une collection de faits et de dates ; c'est pourquoi il n'y a pas lieu de l'imposer.

Terminons en signalant qu'au cours des semestres intermédiaires d'études, les étudiants mathématiciens ont à choisir une deuxième matière, qui est souvent la physique, bien que ce choix implique un travail très lourd (35 heures par semaine, en y comprenant les travaux pratiques). Mais la deuxième matière est aussi la chimie, ou la biologie, la géographie, la religion, ou l'éducation physique. Les directeurs d'instituts mathématiques apprécient cette diversité des matières, bien qu'elle entraîne des difficultés dans l'assiduité aux cours, en particulier pour ceux qui ont choisi l'éducation physique. Mais elle apporte plus de variété et d'animation dans la vie de l'étudiant, pour lequel l'étude exclusive des Mathématiques constitue un cadre trop étroit.