

DES EXEMPLES RÉELS

dans l'enseignement des Mathématiques

Les Mathématiques ont-elles pour fin l'abstraction gratuite ou l'application au réel ? En ces termes la question est simpliste. Il apparaît au contraire, dans les synthèses de l'épistémologie contemporaine, que la pensée et l'action ne sont pas deux modes séparés, surtout opposés, mais deux aspects complémentaires d'un processus unique. Ils se renvoient nécessairement et constamment l'un à l'autre. Cela seul, soit dit en passant, suffit à récuser la notion traditionnelle de culture « désintéressée ».

L'enseignement, pour s'être cru obligé de choisir entre ces deux entités, l'action et la pensée, s'est confiné dans l'abstraction gratuite. De là deux conséquences :

1° l'aspect tout à fait byzantin, devant l'opinion, de notre discipline, et le mépris qui s'ensuit ;

2° *l'affaiblissement de l'abstraction elle-même*, coupée de ses sources ; ce qui, pour l'intention traditionnelle, est proprement une absurdité.

Ceci n'est pas un paradoxe, ou seulement de première vue, si l'on se réfère à l'épistémologie, qui est par définition l'effort de compréhension des sciences. Nous regrettons de ne pouvoir que schématiser en deux mots sa synthèse essentielle.

Notre enseignement, pour se réanimer comme justement des circonstances éminemment réelles le demandent, doit restituer au réel sa pleine fonction. Il s'agit que nos cours, de temps en temps, s'éclairent d'applications techniques. Il se trouve précisément que diverses techniques se rattachent directement aux Mathématiques (sans du tout en appeler à la physique) ; ainsi la Navigation. Les préambules indispensables s'en exposent en quelques minutes.

Nous donnons ci-dessous un petit aperçu de ces sortes d'applications, pour montrer d'abord qu'en effet elles sont d'accès facile, et principalement qu'elles s'attachent mot pour mot aux questions théoriques, au point enfin de conférer à celles-ci une vigueur que la simple sécheresse traditionnelle ne leur donne pas.

Quelques aspects de la théorie des constructions géométriques éclairés par des applications nautiques

1) PRINCIPE D'UNE CONSTRUCTION.

Soit un navire N (fig. 1) dont on veut connaître la position au large d'une côte. Sur ce navire on a moyen (cité en une autre occasion) de déterminer sa distance d à un repère A (phare, clocher) ou *amer*. Le navire appartient donc au *lieu géométrique* des points qui sont à la distance d de A ; ce lieu est le cercle (A, d) , dit *cercle de distance* (déjà cité pour illustrer la définition du cercle). On le trace sur la carte marine.

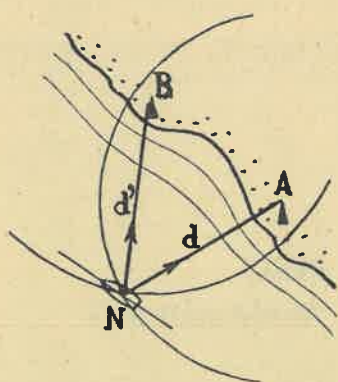


Fig. 1

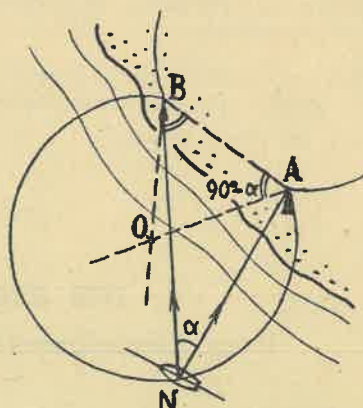


Fig. 2

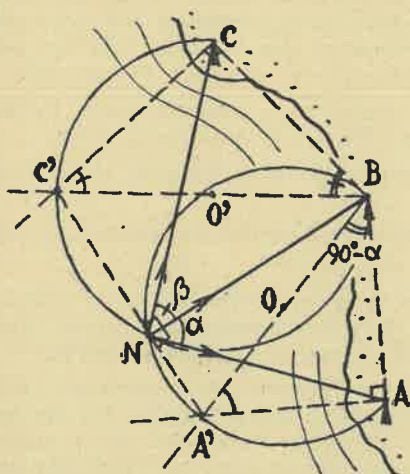


Fig. 3

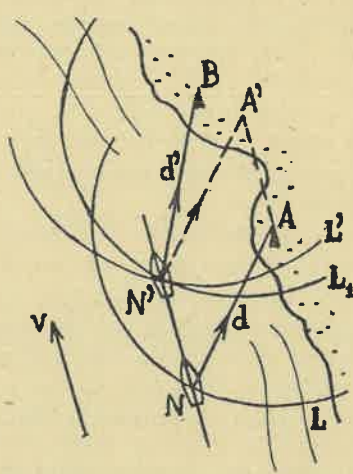


Fig. 4

Pareillement, le navire appartient à un second lieu, qui est le cercle de distance (B, d') . Devant appartenir aux deux lieux à la fois, N est point commun, c'est-à-dire point d'intersection.

Plus généralement on peut caractériser la position du navire par d'autres mesures que des distances. Il existe pour chacune un lieu géométrique correspondant, cité opportunément dans le programme ; nous en donnons un exemple ci-dessous. Mais toujours le point cherché s'obtiendra à l'intersection de deux lieux géométriques. Il sera intéressant d'examiner toutes les combinaisons possibles, pour bien affermir cette idée importante. Signaler qu'elle s'applique même dans la Navigation au long cours.

2) ARC CAPABLE.

Sur le navire on a moyen (cité en une autre occasion) de déterminer l'angle ANB (fig. 2) ou *distance angulaire* de deux amers A et B. Le navire appartient donc au lieu des points d'où l'on aperçoit le segment AB sous l'angle α . Ce lieu est un *arc capable*. On le trace sur la carte.

Le tracé pratique est très proche de la *construction classique*. On porte en A et B, au rapporteur, l'angle $90^\circ - \alpha$; on obtient le centre O. Cette indication pratique permet de bien envisager la question, et son intérêt vivant la fait mieux retenir.

3) ENONCÉ D'UNE RÈGLE DE CONSTRUCTION.

Naturellement, il faut envisager aussi le cas où α est obtus. On trouve que l'on doit porter en A et B, cette fois, l'angle $\alpha - 90^\circ$, et de l'autre côté de AB. Il paraît alors indiqué de rassembler les deux constructions en une seule conclusion. On est conduit à la règle suivante :

Former $|90^\circ - \alpha|$. Porter cet angle en A et en B,

1° s'il est positif, du côté de la mer ;

2° s'il est négatif, du côté de la terre.

On remarquera que cette application fait bien sentir ce qu'est une *règle* de construction, notion parfois négligée par les élèves (parce que purement théorique, ce qui leur semble à juste raison un contresens). On voit parfaitement ici qu'une règle de construction est une marche à suivre, et qui doit répondre aux exigences suivantes :

- être soigneusement décomposée en temps successifs (sûreté) ;
- être concise (rapidité d'exécution) ;
- être complète, c'est-à-dire prévoir tous les cas (parer à toutes éventualités).

La composition d'une règle de construction apparaît enfin comme une tâche très sérieuse ; elle engage une responsabilité.

4) UNE DÉMONSTRATION SUR LES ANGLES INSCRITS.

Pour en revenir au problème initial, on peut déjà déterminer la position du navire par l'intersection d'un arc capable avec un cercle de distance, ou même par l'intersection de deux arcs capables. Ce sont là deux exemples de la variété des combinaisons possibles que nous avons signalée.

Considérons le cas de deux arcs capables. Le navire (fig. 3) est en vue de trois amers A, B, C. On a mesuré les distances angulaires α de A et B, et β de B et C. Le navire appartient à la fois aux deux arcs capables décrits respectivement sur AB et sur BC, avec les angles α et β . Il se trouve à leur intersection.

Or, si l'on réfléchit pratiquement, il s'avère que la construction effective de deux arcs capables est assez longue par rapport aux autres tracés sur la carte. Il est donc naturel de chercher une construction plus simple de N, qui demeure le véritable objectif.

Prenons l'initiative, à titre d'expérience théorique, de considérer les points A' et C' respectivement opposés à B dans les cercles O et O'. On démontre aisément, après l'avoir aperçu, que les trois points A', N, C' sont alignés (c'est un *exercice*

classique). N apparaît comme le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur la droite A'C'. Il suffirait donc de déterminer A' et C' pour résoudre le problème (exemple de l'analyse d'un problème).

Or, l'angle BAA' est droit comme inscrit dans un demi-cercle d'où un premier lieu de A' : la perpendiculaire en A à AB. De plus, l'angle AA'B vaut α comme inscrit, ce qui donne à l'angle ABA' la valeur $90^\circ - \alpha$; d'où un second lieu de A'. Ce point est ainsi déterminé, et C' pareillement.

Enoncer la règle (*synthèse*). Envisager le cas où α , par exemple, est obtus. Conclure (*récapitulation*).

Cette application incite l'élève à chercher des relations, rien que « pour voir ». Elle montre d'ailleurs à sa source l'initiative de l'esprit. Cette initiative est motivée.

5) TRANSFORMATIONS (TRANSLATION).

Pour faire le point du navire on a supposé jusqu'ici que les deux lieux provenaient de mesures effectuées simultanément. Or, il est assez intuitif que souvent on ne pourra remplir deux tâches à la fois, même à peu près. On connaît alors un lieu L à l'instant t (fig. 4) et un lieu L' à l'instant t' . On veut trouver la position du navire à l'instant présent t' , voire à l'instant passé t . Suivant une méthode générale en Mathématiques, on va se ramener au cas précédent.

On connaît en effet le parcours du navire, de t à t' , en direction et sens par la boussole ou *compas*, et en longueur par l'indicateur de vitesse, sur la machine. Autrement dit on connaît le *vecteur libre* NN', soit v . Le point N' appartient donc au transformé du lieu L par la *translation* v . Soit L₁ ce transformé ; le point cherché N' est à l'intersection de L₁ avec L'.

Cette application éclaire la notion de translation, et elle fait ressortir l'importance des transformations en vue des problèmes de constructions. Elle montre aussi le principe de leur emploi.

Elle donne enfin l'occasion d'appliquer les théorèmes sur la transformation des figures élémentaires, droite et cercle ; ceci pour tous les lieux L déjà signalés. Par exemple (fig. 4) pour transformer un cercle de distance (A, d), on transforme son centre et on garde le même rayon.

6) CONVENANCE D'UNE INTERSECTION.

Les intersections peuvent avoir à satisfaire à certaines conditions, provisoirement laissées en attente. Dans le problème du point, il faut qu'une intersection se situe dans une certaine portion du plan, représentant la mer. L'une des deux intersections se trouve à chaque fois rejetée (fig. 1, 2, 3, 4) comme ne répondant pas à cette condition.

Ceci illustre la notion de *convenance d'une racine* dans les problèmes d'algèbre. Elle enseigne par ailleurs l'analogie foncière entre les démarches de l'algèbre et celles de la géométrie. Cette analogie est au surplus commode à connaître.

7) DISCUSSION D'UN PROBLÈME.

Nous avons réservé cette question parce que, dans le problème du point, il n'y a justement aucune discussion. La position du navire est connue sans ambiguïté, à coup sûr.

Mais cette absence peut précisément éclairer la question de l'existence des solutions. Dans le problème ci-dessus on sait d'avance que la solution existe : le navire a nécessairement une position. Dans d'autres problèmes, au contraire, on ignore au commencement si le point cherché (le point ou tout autre objet) existe ; on saura, à supposer qu'il existe, qu'il répondra à telles conditions nécessaires ; mais ces dernières, en elles-mêmes, laisseront son existence hypothétique.

L'Inspection générale a rappelé notre attention sur cette question, en dégageant à cette occasion la notion de problème « spéculatif ». Le problème du point en Navigation est un net exemple de problème non spéculatif. Déjà, par conséquent, il participe à la compréhension de cette notion, par l'exemple contraire.

Nous pourrions citer, dans le même genre d'applications, un exemple de problème spéculatif, net et intéressant, mais il convient de nous limiter.

Nous pensons que ce très bref aperçu aura déjà montré l'intérêt, rien même qu'au point de vue théorique, de quelque ouverture de notre enseignement sur des choses réelles. Les théories mal comprises des élèves prennent toute leur netteté dans des applications effectives. Comment en irait-il autrement, puisque c'est la pensée mathématique elle-même, comme le fait voit l'épistémologie, qui exige du réel, pour abstraire ? La culture ne peut pas être « désintéressée », c'est-à-dire littéralement sans intérêt, sans raison... Entreprendre sans intérêt est une absurdité.

Nous pensons aussi que cet aperçu aura montré la facilité d'introduire quelques applications dans nos cours, sans préparation spéciale, sans « distraction » de la tâche officielle. Mais il va sans dire qu'un professeur serait bien intraitable, une fois le problème terminé, et ne serait-ce que pour détendre un instant les élèves (pédagogie de l'attention), de refuser de répondre à une question d'ordre purement technique qu'ils auraient à poser, pour avoir pris justement intérêt au problème. Ce peut être au contraire, pour le professeur, l'occasion d'un contrôle.

On pourra renvoyer les élèves, d'une façon générale, à une bibliothèque de classe : excellente raison pour un travail personnel. Il est invraisemblable d'ailleurs que les grandes lignes de la civilisation technique soient ignorées de l'« honnête homme » du xx^e siècle. Il appartient peut-être au professeur de Mathématiques de guider les élèves de ce côté ; ce serait pour nous un honneur. L'aperçu précédent montre en fait que cette direction se ferait d'elle-même : les applications se relient entre elles, peuvent être groupées en centres d'intérêt.

Nous nous permettons de signaler que les idées ci-dessus sont le résultat d'années de recherches et qu'elles ont été éprouvées en classe, surtout en Seconde. Les élèves prennent plaisir à exercer leur savoir, non plus seulement sur des « devoirs », mais, comme disait Descartes, « dans le grand livre du monde ».

Qui s'en étonnerait ?

C. DELAPIERRE.

(Ecole Militaire Préparatoire, Les Andelys).