

### III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

#### LANGAGE ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES \*

Quand on se propose de rechercher si les Mathématiques sont utiles et comment elles le sont, on peut au moins affirmer — ce qui est hors de doute pour tout le monde — que cette discipline se prête, par excellence, à l'exercice d'un langage précis sur des sujets précis. Pour Cicéron, l'orateur idéal devait s'être exercé à la géométrie. Plus récemment, pour M. CAGNAC, c'est surtout au professeur de Mathématiques qu'échoit le rôle d'apprendre aux élèves la langue française.

On doit s'exprimer en langue correcte en toute circonstance, mais cette langue n'est que l'un des deux éléments d'une communication correcte... encore faut-il avoir quelque chose à communiquer. Ainsi on se dit parfois, lorsqu'on écoute certains discours : ce que j'entends est d'un français très correct, le style en est riche, la langue en est parfaite, mais il arrive aussi, dans cette même circonstance, que l'on ajoute, après réflexion : ce discours n'exprime rien, il ne signifie rien, il n'a aucun sens.

Faire connaître un fait, ou transmettre une idée, demandent :

- 1) une *existence* : un fait se produit, une idée vient à l'esprit ;
- 2) un *moyen de transmission* efficace.

N'examinons pas de trop près la question de l'existence brute d'un fait ou d'une idée : l'un et l'autre peuvent-ils vraiment exister indépendamment de toute représentation (qui est déjà une expression, même une photographie), nous sortirions de notre sujet ; nous sous-entendons un postulat d'existence des faits et des idées. Admettant cela, nous sommes exactement dans notre sujet, car *tout enseignement est un double exercice de transmission*.

Rappelons ce qu'on appelle acte de communication : tout acte par lequel des êtres vivants tentent d'influencer directement la conduite ou l'activité d'autres êtres vivants, par la parole, l'écriture et aussi les gestes, et aussi les sons, et, alors, la musique. Les parties en cause sont l'acteur et l'auditeur.

Dans tout enseignement, ce jeu est doublement pratiqué, sous les formes suivantes :

1<sup>er</sup> temps, le professeur est acteur, l'élève est auditeur ;

2<sup>e</sup> temps, les rôles sont inversés.

\* Les durées respectives de ces deux temps sont fort variables selon les professeurs et les niveaux d'enseignement. Ainsi, dans l'Enseignement Supérieur, le professeur est toujours acteur ; dans les petites classes, et surtout quand l'inspecteur général vient, on préfère que ce soit l'élève.

Insistons bien sur la nature de cet acte de transmission, acte de tout enseignement. Nous ne recherchons pas, c'est entendu, si l'idée ou le fait ont une existence *a priori*, mais nous affirmons que, sans expression, tout se passe comme si idée et fait n'existaient pas. Je suis souvent amené à dire à mes élèves : une chose qui n'est pas exprimée est une chose qui n'existe pas. Si c'est un paradoxe, cela traduit cependant une attitude que nous devons adopter.

Dans ce qui précède « expression » a un sens très général ; le dessin, par exemple, est évidemment un moyen d'expression en Mathématiques et en logique, entre autres. Dans ce qui va suivre, « expression » voudra dire « expression en langage parlé ou écrit ».

Examinons maintenant ce langage dont nous faisons usage dans l'enseignement des Mathématiques.

(\*) Conférence destinée aux candidats au C.A.P.E.S. et prononcée le 12 mars 1956 au Centre Pédagogique Régional de Paris.

Piu Servien prend le langage total et en fait deux classes : langage scientifique et langage lyrique (p. 14).

Une phrase appartient au *langage des sciences* si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

- 1) elle a un sens unique, universel ;
- 2) elle admet des phrases équivalentes (une infinité).

Équivalence a ici son sens précis, avec les qualités habituelles : R.S.T. Le meilleur exemple qu'on puisse donner, Hilbert le donne. Après l'énoncé de l'axiome : « deux points différents déterminent toujours une droite », est indiqué le faisceau suivant d'équivalentes : au lieu de « déterminent », nous pouvons dire « que la droite passe par ses deux points, ou qu'elle joint ces deux points, ou que les deux points sont situés sur la droite ». Nous voyons que nous pouvons, nous aussi, donner beaucoup d'exemples. Nous pouvons d'ailleurs pousser cette notion d'équivalence assez loin. Ainsi, lorsque l'on reconnaît que deux propriétés sont équivalentes, les phrases qui les expriment sont-elles alors des phrases équivalentes ? Si oui, où cela nous entraîne-t-il ?

*Le langage lyrique* est l'ensemble de toutes les autres phrases ; exemple : il n'y a pas de phrase équivalente à : « C'était pendant l'horreur d'une profonde nuit. » Toutes les quasi-équivalentes qu'on essaie de donner d'une phrase lyrique la gauchissent en des sens divers, l'attirent vers d'autres plages de son contenu et modifient les contours de son sens. (Dans cet ordre d'idées nous pourrions aller beaucoup plus loin et parler de la « surdétermination » des moyens d'expression propres aux arts).

Je me permets d'ajouter qu'il serait opportun de former une classe intermédiaire qu'on pourrait appeler celle du *langage philosophique*. Dans beaucoup de circonstances, il est difficile de saisir étroitement la pensée dans une formule verbale ; on poursuit la pensée sans l'atteindre, les phrases que l'on forme ont un sens que l'on juge toujours, ou trop restreint ou trop large. On n'atteint cette pensée que par une moyenne de sens non équivalents, on l'atteint par une sorte de coupure parmi un ensemble continu de sens plus ou moins voisins de celui qu'on veut exprimer ; c'est une sorte de « sens irrationnel », si l'on veut, par opposition avec le sens rationnel bien défini des phrases du langage scientifique. Exemple : essayez de donner la définition de « la liberté ».

Excusez-moi d'avoir fait cette digression ; nous ne sortons pas de notre sujet ; soyons heureux d'avoir reconnu et défini l'existence des phrases équivalentes : leur emploi très systématique dans notre enseignement nous permet sans cesse d'assurer la compréhension de ce que nous enseignons, c'est un procédé d'explication. Il est possible aussi que nous ayons parfois recours, mais avec prudence, à une moyenne de phrases presque équivalentes — langage philosophique alors — dans une explication particulièrement difficile.

Réciproquement — conformément au principe du double jeu — l'usage de phrases équivalentes servira pour le *contrôle des acquisitions* de nos élèves. Nous serions bien naïfs d'être satisfaits si l'élève répète correctement ce que nous disons ! L'effort de mémoire est, pour un enfant, moins pénible que l'effort de compréhension. D'ailleurs, l'enfant ne sait pas bien ce que signifie « comprendre ». Nous n'aurons le droit d'être satisfaits que si l'enfant parvient à exprimer en phrases différentes, même maladroitement, mais équivalentes, ce que nous lui avons exprimé une première fois, d'une certaine façon. L'enfant peut dire en toute bonne foi : « J'ai compris », nous savons qu'il n'en est peut-être rien au sens où nous entendons « comprendre » et, s'il vient vous trouver à la fin de la classe parce qu'il a eu zéro et vous dit : « Je croyais avoir compris », comprenez bien vous-même qu'il avait atteint un certain degré de compréhension que, vous, vous jugez insuffisant.

Il faudrait beaucoup d'introspection — et d'indiscrétion — pour parvenir à préciser quelles sont toutes les variétés de compréhensions qu'on héberge en soi-

même d'abord, et qu'on trouve chez autrui. Songez que M. FOUCHÉ nous a dit une fois qu'il lui a fallu vingt ans pour comprendre ce qu'est une différentielle ! Nous ne pensons pas que nous passerons pour plus intelligent que lui, si nous disons l'avoir compris en un quart d'heure !

A ce que nous avons dit des phrases équivalentes, il faut apporter une nuance. Toutes les phrases d'une même classe d'équivalence ayant un même sens déterminé, universel, ne sont cependant pas également bonnes, car on ne peut jamais connaître exactement le degré d'efficacité d'une transmission. Ce doute provient d'abord d'un certain *coefficient d'indétermination* attaché inévitablement au sens de chaque mot et provient surtout de la grande *variété des interprétations* possibles de chaque phrase. Pour le comprendre, il suffit de rappeler les expériences rapportées par M. SERVAIS dans le *Bulletin* du mois de janvier (p. 199). Vous dites simplement : « Soient deux cercles sécants », vous les dessinez et vous demandez : « Que voyez-vous ? ». Les interprétations d'une telle phrase — pourtant si simple —, les représentations, les enchaînements mentaux qu'elle déclenche, sont extrêmement divers. Il faut donc rechercher, parmi les phrases équivalentes d'une même classe, celles qui favorisent au mieux les enchaînements ultérieurs que vous voulez commander, celles qui vous mettent en résonance avec l'auditoire.

LES MOTS — Nous allons maintenant entrer dans quelques détails techniques, nous allons nous occuper des *mots* — c'est la matière première, c'est donc important — nous ne nous arrêterons pas à leur orthographe (où pourtant il y a beaucoup de fautes chez nos élèves). Puis nous passerons aux phrases, sans nous préoccuper de la syntaxe (où il y aurait pourtant aussi beaucoup à dire).

*Le choix d'un mot ou d'une locution* pour désigner une chose nouvelle en Mathématiques se fait, soit par un néologisme, soit par un emprunt au langage total.

Le choix d'un *néologisme* ne soulève pas de difficulté : on bâtit le mot selon une étymologie rappelant un caractère essentiel de l'objet ; exemples : courbe unicursale, ensembles équipotents ; cette spécialisation du mot lui confère une grande fidélité, et c'est si bien qu'on est conduit à en abuser en Mathématiques modernes, d'où un langage qui passe, à tort, pour pédant — mais notons que, pour le débutant, le mot bien choisi a un effet de choc et qu'il est bien retenu.

*L'emprunt au langage total* offre souvent un danger : l'objet mathématique acquiert une image, une projection parmi les objets du monde extérieur. Quelles doivent être les qualités de cette image pour qu'elle soit bonne ? Car on sent bien parfois qu'elle est bonne, que c'est une aide efficace pour accrocher une notion. Ainsi, « fonction continue » est bon, car « continu » a un sens courant si vague, que le besoin de précision ne peut se satisfaire qu'en attachant l'idée strictement à l'objet mathématique que cette locution désigne. Au contraire, le mot « relativité » est fort mauvais, car on est tenté de lui donner un contenu non dépourvu de sens, mais pourvu d'un sens étranger au véritable.

Ainsi, le choix et l'emploi des mots sont des difficultés. Plusieurs auteurs l'ont compris, qui, même dans un manuel élémentaire comme celui de M. CHÂTELET pour la classe de Première, paru il y a une quinzaine d'années, terminent par un lexique, c'est-à-dire un dictionnaire. Mais que peut-on attendre d'un dictionnaire ? « C'est un recueil de cercles vicieux », dit M. CAGNAC. Quelqu'un m'a dit : « Le sens d'un mot n'est jamais compris intégralement. » Un autre : « La recherche du mot et la préoccupation de la syntaxe empêcheraient notre esprit de se donner tout entier à la poursuite de la pensée. » Un autre encore (G. MAUNOURIT) : « Le mot du dictionnaire n'est pas un acte de communication, mais une forme extérieure commune à plusieurs de ces actes (voir F. GOBLOT, *Cahiers*). »

Nous voici mis en garde : le mot est tantôt le plus sûr, tantôt le plus dangereux des véhicules de la pensée, mais il nous faut vouloir que ce soit le plus sûr, et nous déclarons impossible, interdit, que le sens d'un mot ne soit pas parfaitement connu et pensé.

Voici d'abord une liste de mots empruntés au langage total et dont le sens, en Mathématiques, est différent du sens dans le langage total. Elle est loin d'être complète :

|                         |                             |             |
|-------------------------|-----------------------------|-------------|
| accroissement,          | homologue,                  | projection, |
| fonction croissante,    | lieu géométrique,           | quelconque, |
| vitesse,                | équivalent,                 | enveloppe,  |
| accélération,           | semblable,                  | terme,      |
| plan horizontal,        | égal,                       | facteur.    |
| intérieur d'une courbe, | nécessaire, il faut, si..., |             |

Quelquefois le mot *garde* intégralement son sens du langage total. C'est assez rare : condition suffisante, transformation, correspondance, unicité, univoque.

Donnons aussi des exemples de *mots à sens multiples*, ce qui est gênant et choquant. Cela se rencontre dans l'enseignement le plus élémentaire. (L'inconvénient disparaît quand les sens sont très différents) :

diamètre : droite, ou segment, ou longueur ;  
 cercle et circonférence (c'est un ennui, dans les dispositions relatives) ;  
 axe : de rotation, de demi-tour, l'axe  $ox$  ;  
 pente :  $\sin \alpha$  ou  $\operatorname{tg} \alpha$  ;  
 symétrie : plan, espace, variables, relation, fonction ;  
 déterminé : dont le sens est toujours à préciser — ce mot n'a pas de sens ;  
 cône : surface ou solide ;  
 et voir : qu'est-ce que « voir », et voir avec quoi ?  
 intervalle  $(a, b)$  et en cotée ;  
 sens  $> 0$  ; sens d'un axe.

Il y a des mots habituellement *mal employés*.

Chez les débutants : droite et segment de droite, — « abaisser » la perpendiculaire est ridicule, — l'énoncé : la perpendiculaire est plus courte que toute oblique n'a pas de sens, — surface (pour aire). Je voudrais que l'expression « augmenter indéfiniment » fût bannie définitivement.

Le mot « arbitraire » doit être re-défini chaque fois qu'on l'emploie ( $ox = 0$ ,  $x > 2$ ).

La locution « en général » a deux sens.

Quant au choix de l'article défini, ou de l'article indéfini, il est remarquable de trouver chez nos élèves l'intervention systématique. Citons un exemple où l'importance de l'article est en évidence : Trouver  $a$  et  $b$  de façon que  $a$  et  $b$  soient les racines de  $x^2 + ax + b = 0$  et : « ...que  $a$  et  $b$  soient racines de l'équation » sont deux problèmes différents qui n'ont pas la même solution.

Enfin, ne négligeons pas les mots : or, donc, car, par suite, autrement dit, alors, c'est-à-dire, en effet — ni la ponctuation ; en particulier, après toute égalité il y a logiquement un signe de ponctuation ayant un sens, et l'absence de signe a aussi un sens.

Pour terminer, signalons qu'il y a des mots n'appartenant pas au langage mathématique : forcément, obligatoirement, auxquels nos élèves ont recours pour nous convaincre. Il m'arrive quelquefois de dire avec fermeté : le mot « petit », le mot « grand », n'appartiennent pas au langage mathématique. Lui appartiennent, les locutions : infiniment grand ou petit, plus grand que, plus petit que. Petit, grand, ainsi que presque et quasi, appartiennent à la physique.

LES PHRASES. — Parlons maintenant *des phrases*, des expressions proprement dites. Il y a beaucoup de fautes qu'on prend pour des fautes de Mathématiques, mais qui sont, en réalité, des fautes d'expression. Plus précisément, ce ne sont même pas des fautes : la phrase, considérée comme acte de communication, ne remplit pas son rôle, sa « signification » n'est pas celle que l'acteur voulait. Songez que lorsque l'élève me récite sa leçon, je m'attends à retrouver ce que j'ai pensé, *malgré deux*

*transmissions déformantes*, la mienne et la sienne ! Peu d'espoir, en vérité. Et songez à toutes les déformations possibles, s'il y a des sous-entendus !

Exemple : Je demande à un élève (H.E.C., élève moyen) ce qu'est une identité. Réponse : « C'est deux expressions qui prennent la même valeur quel que soit  $x$ . » Je rectifie. — « C'est ce que je voulais dire », reprend l'élève, et m'informant un peu mieux de ce qu'il voulait dire, je constate qu'il a pensé : une identité, c'est ce qui se produit lorsque l'on a... Pour nous, « identité » désigne un être mathématique, une catégorie d'égalités (comme « équation » désigne une autre catégorie d'égalités), pour l'élève, identité désignait la circonstance, le phénomène. Il n'y avait pas de faute, il y avait un changement dans la fonction du mot.

Ces confusions sont très fréquentes. Pour juger de la valeur mathématique d'une phrase d'élève, il faudrait d'abord en faire l'analyse logique et grammaticale. Je crois qu'on ne pourrait guère éviter ces difficultés que par un réglage résolument axiomatique du langage (voir GOBLLOT, *Cahiers pédagogiques*, 15 novembre 1955, p. 2).

La notion de limite est fertile aussi en confusions dont on ne sait pas bien si elles sont dans le langage ou dans les idées. Cela se produit chez les physiciens (mais pour eux cela n'a pas d'importance, car  $b = f(a)$  ne les intéresse que si  $x \simeq a$  entraîne  $y \simeq b$ ). C'est ainsi qu'est née l'expression : telle propriété est « vraie à la limite » qui est une expression fautive, ou du moins laisse le passage libre à beaucoup d'inexactitudes (par exemple, « la vitesse moyenne est la longueur du vecteur vitesse moyenne »).

Nous avons maintenant de graves observations à formuler sur l'emploi du verbe *être*.

Cet auxiliaire, on le fait servir à trop de constructions, toujours on exige de lui un travail trop lourd. Exemple : vous demandez une définition : « Qu'est-ce qu'un A ? ». La réponse commence spontanément sous la forme : « Un A est... » et vous sentez aussitôt que vous n'en sortirez pas. Cette forme impose que vous définissiez A par un attribut ; cela va bien si A est un être simple, mais, souvent, il vous faut, pour être satisfait de la définition, une avalanche d'attributs ! Allez demander ainsi : « Qu'est-ce qu'un déterminant ? » « Qu'est-ce qu'une fraction ? » Vous êtes certains d'avoir une réponse incomplète ou incorrecte, ou bien, votre interlocuteur s'en tirera, s'il est rusé, en éludant la question : « Une fraction est un ensemble de deux entiers, etc... »

Nous devons enseigner la tournure de langage qu'il convient d'adopter en de telles circonstances.

Cette difficulté n'est pas très importante. Il y a plus grave. Prenons les deux phrases suivantes :

1) Un rectangle est un parallélogramme ayant un angle droit.

2) Un vecteur est un segment de droite orienté.

Je dis que l'une de ces deux phrases est fautive. En effet :

Elles sont toutes les deux de la même forme qui est très fréquente :

Un A est un B ayant la particularité C.

Deux cas se présentent alors :

1) le B particularisé par C est encore un A (les B obtenus forment un sous-ensemble de l'ensemble des A). C'est ce qui se produit dans 1) ;

2) le B particularisé n'est plus un A. C'est ce qui se produit dans 2) ; le vecteur n'est plus un segment, c'est un être nouveau, tout à fait différent. La seconde phrase est fautive.

De tels exemples abondent en Mathématiques ; la forme empruntée au langage total est insuffisante à cause du verbe être. Il faut compléter (« est avec appartenance », « est, avec exclusion » ou d'autres façons).

Notons que les élèves adoptent quelquefois le sens 2) à la place du sens 1) ; ils disent : « Un rectangle n'est pas un parallélogramme. »

Le verbe être appelle l'attribut, dit-on. Oui, quand vous dites « le triangle est isocèle ». Mais, souvent, son rôle est loin d'être aussi modeste. « L'Etat c'est moi », dit Louis XIV : mais Louis XIV peut dire également : « Moi, c'est l'Etat. » L'attribut est si exclusif, que la réciproque est assurée. Cela se produit souvent en Mathématiques et les élèves ne sentent pas du tout cette force absolue du verbe être dans ce cas. Ainsi, on rencontre souvent des théorèmes ayant la forme, « l'ensemble des A est l'ensemble des B ». Quelle peine avons-nous toujours, pour obtenir de nos élèves, la réciproque ! N'est-il pas choquant qu'ils n'en éprouvent pas le besoin logique ? La cause en est la faiblesse d'expression du verbe être, acte de communication complètement avorté. Nous ne nous en tirerons que par plusieurs équivalentes : « est identique à... », ou « il y a correspondance biunivoque par identité entre les objets de A et ceux de B, etc... ».

LE STYLE. — En ce qui concerne le style en général, distinguons-en trois sortes : style d'explication, style d'exposition, style de rédaction. Cette classification ne porte nullement sur la correction du langage, et style d'explication ne veut pas dire style familier. Il est entendu que nous devons bannir chez nos élèves et chez nous-mêmes le langage enfantin, simplet ou exagérément elliptique. Il y a de quoi plaisanter en énumérant quelles sont les opérations de l'algèbre : le tirer, le porter, la chasse, la disparition, l'apparition, etc... Nous devons éviter les tournures fâcheuses, comme : « les  $x$  se barrent », les « on a » répétés sans fin. Dans le style d'explication, on peut tolérer une certaine liberté, on s'interrompt, on reprend, on côtoie, mais prudemment le langage lyrique, si vous voulez, dans le but de provoquer une image. On sent bien alors qu'on n'écrit pas ce que l'on dit, mais cette liberté provisoire qu'on se donne est indispensable au rendement d'une bonne explication.

Le style d'exposition est plus dépouillé, on l'emploie presque exclusivement dans une grande classe, il tend vers le style de rédaction, et, quand on utilise ce dernier, il faut le marquer par un changement du ton et du débit pour que les élèves sachent qu'ils doivent prendre des notes complètes et puissent le faire.

Il faudrait arriver à inculquer ceci : une solution se rédige et c'est difficile, et cela se travaille comme un devoir de français et c'est un devoir de français d'abord. La rédaction est elle-même un problème indépendant du problème proprement dit, et ce problème consiste en la recherche d'un *compromis*, expliquons-nous.

Deux qualités sont également appréciables dans la valeur en signification d'un texte : l'intelligibilité, la *facilité de compréhension* : le lecteur est conduit par petits pas, sans effort, les sauts de raisonnement lui sont évités, il n'a aucun intermédiaire à parcourir tout seul, mais alors la rédaction est longue.

L'autre qualité, au contraire, c'est la *concision* qui satisfait les esprits rapides, vigoureux et avides.

Toute rédaction est donc imparfaite, puisque ce qu'elle gagne dans l'une des qualités, elle le perd dans l'autre.

Notons que ces deux tendances se trouvent respectivement très accusées parmi les travaux originaux de nos savants classiques. Ainsi, on cite Rieman comme auteur cherchant l'extrême concision ; on cite Hermite comme un ciseleur. Poincaré, entraîné et submergé par son génie, regrette parfois une première rédaction faite toute d'une traite et se fait travailleur de style. Einstein, aussi bien que Napoléon, laissent à d'autres le souci de mettre en forme ce qu'ils ont produit.

La tendance moderne est, je crois, la recherche de la concision, laquelle est obtenue au mieux par l'usage des *symboles* ; mais attention chez le débutant : cet usage conduit vite au mécanisme et l'élève est souvent tenté de mettre au rang de symbole ce qui n'est qu'une abréviation : les rédactions deviennent des schémas, des squelettes ; ce qui était concision devient rapidité, escamotage. Si vous voyiez certaines solutions de nos élèves !... Je ne sais si autrefois les élèves parlaient et rédigeaient mieux, je sais qu'aujourd'hui tout ce qu'on fait doit être vite fait, mais notre

méthode actuelle d'enseignement est peut-être en partie responsable de ce genre d'insuffisance de nos élèves. Autrefois, le professeur dictait, les élèves copiaient, le professeur était ainsi engagé personnellement et tout entier, sa forme devait être parfaite et définitive, il était le modèle permanent et quelque chose en rentrait bien dans l'élève, à force et malgré lui !

Depuis, on lui a reproché cette façon ; aujourd'hui, c'est la classe vivante, c'est l'élève qui fait tout ! — mais comment le fait-il ? — après quels balbutiements et combien de faux-pas, et sans élégance, sans cadence ! (pensez à la cadence d'un raisonnement). Pour une leçon ainsi faite, exclusivement par l'élève, pour un devoir ainsi corrigé, exclusivement par l'élève, il n'est pas question de rédaction : du chaos ne se rédige pas.

Cette façon doit être immédiatement suivie d'une mise en forme très nette, due au maître, et d'une concision raisonnable. Ne jamais manquer cette deuxième étape, faute de temps, dirait-on, que la rédaction ne soit jamais sacrifiée, avec la consolation illusoire d'un « ils ont compris, cela suffit ».

En conclusion, nous dirons que — là comme ailleurs — il n'y a pas de règle : pas de cours dicté, bien entendu, mais dictez parfois, donnez à vos élèves un modèle de ce qu'on doit dire et écrire, mais exercez-les aussi à former eux-mêmes leurs modèles ; sachez qu'il leur plaira de vous imiter, surtout s'ils vous aiment.

J. SIROS (*Lycée Lakanal*).